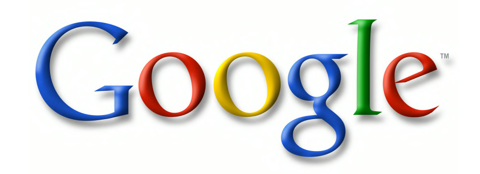
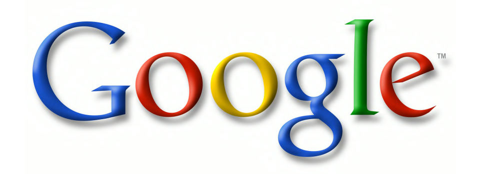



Google


SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG:
CHRISTO ET ECCLESIÆ

Lehrbuch

der

STATIK

von

August Ferdinand Möbius,

Professor der Astronomie zu Leipzig, Correspondenten der Königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin und Mitgliede der naturforschenden Gesellschaft in Leipzig.

Erster Theil.

Mit zwei Kupfertafeln.

LEIPZIG

bei Georg Joachim Göschen.

1837.

Vorrede.

Die erste Veranlassung zu einer anhaltenderen Beschäftigung mit der Statik und damit zur Abfassung der vorliegenden Schrift gab mir das Studium des zwar kleinen, aber gehaltreichen und elegant geschriebenen Werkes von Poinsot über die Statik *). Ich lernte daraus, wie die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht zwischen Kräften, welche auf einen frei beweglichen festen Körper wirken, einfacher, als auf irgend einem andern der bisher bekannten Wege, mit Hülfe der Theorie der von ihm sogenannten *couples* (Paare von einander gleichen und nach parallelen aber entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräften) entwickelt werden können; und die dem Ende des Werks beigefügte Abhandlung (*Mémoire sur la composition des momens et des aires*), worin die Theorie dieser Kräftepaare noch weiter verfolgt wird, und mehrere, zum Theil neue, Sätze, die Eigenschaften der Momente von Kräften betreffend, aus dieser Theorie höchst einfach hergeleitet werden, nahm mein ganzes Interesse in Anspruch.

Da ich nun bei fortgesetzter Beschäftigung mit diesen Gegenständen mehrere eigene Untersuchun-

*) Élémens de Statique... par L. Poinsot. 4ème édit. Paris 1824.

gen anstellte und Ansichten gewann, nach denen, wie es mir schien, die einzelnen Lehren der Statik theils vervollständigt, theils auf eine etwas systematischere Weise, als in den bisherigen Lehrbüchern, geordnet werden könnten, so fühlte ich mich bewogen, meine zum Theil schon in Crelle's mathematischem Journal bekannt gemachten Untersuchungen im Zusammenhange zu veröffentlichen und damit ein für sich bestehendes Lehrbuch der reinen Statik abzufassen, in welchem die Lehren dieser Wissenschaft möglichst vollständig und in systematischer Folge auseinandergesetzt sind.

Die Methode, deren ich mich in diesem Lehrbuche bedient habe, ist ausschliesslich weder die synthetische noch die analytische. Doch habe ich in der Regel der erstern den Vorzug gegeben, wenn eine einfache geometrische Construction zur Führung eines Beweises oder zur Lösung einer Aufgabe hinreichend war, so wie ich auch nicht selten die schon durch Analysis gefundenen Sätze durch geometrische Betrachtungen noch zu erläutern gesucht habe: beides aus dem Grunde, weil bei Untersuchungen, welche räumliche Gegenstände betreffen, die geometrische Betrachtung eine Betrachtung der Sache an sich selbst und daher die natürlichste ist, während bei einer analytischen Behandlung, so elegant diese auch seyn mag, der Gegenstand sich hinter fremdartigen Zeichen verbirgt und damit unserem Auge mehr oder weniger verloren geht.

Ueberhaupt findet zwischen der Statik und der Geometrie ein sehr inniger Zusammenhang statt, indem nicht allein erstere Wissenschaft der Hülfe der letztern unumgänglich bedarf, sondern weil

auch umgekehrt, gleichsam zum Lohne für die geleistete Hülfe, die Statik der Geometrie neue Sätze zuführt, Sätze, die nicht selten wiederum zum Vortheile der Statik verwendet werden können. Der Belege hierzu wird man nicht wenige in diesem Buche finden. Zuweilen haben Statik und Geometrie sogar einen gemeinschaftlichen Zweck und weichen nur in Hinsicht der zu diesem Zwecke führenden Mittel von einander ab. Ein Beispiel hierzu ist die Untersuchung, in wie viel Punkten zwei oder mehrere Körper einander berühren müssen, wenn ihre gegenseitige Lage unveränderlich seyn soll. Denn diese und ähnliche Untersuchungen können eben sowohl mit Hülfe statischer Principien, als rein geometrisch angestellt werden. Möge es daher dem Leser nicht unangenehm auffallen, wenn er hier in Fällen, wo eine Reihe geometrischer Sätze mir entweder an sich merkwürdig, oder wegen ihres Einflusses auf andere Untersuchungen der Beachtung werth schien, von dem Gebiete der Statik auf das der reinen Geometrie geführt wird.

Das Werk zerfällt in zwei Theile, von denen der erste das Gleichgewicht an einem einzigen Körper, der zweite das Gleichgewicht an mehrern mit einander verbundenen Körpern behandelt. Jedem der beiden Theile ist eine Anzeige des Inhalts vorangesetzt, woraus die Aufeinanderfolge der behandelten Gegenstände zur Genüge erkannt werden kann. Es dürfte aber nicht überflüssig seyn, hier Einiges über ihren gegenseitigen Zusammenhang noch vorauszuschicken, wobei sich zugleich Gelegenheit zu einigen Bemerkungen finden wird, für welche im Buche selbst kein passender Ort war.

Die ersten Elemente habe ich eben so, wie Poinsot, durch die schon erwähnte Theorie der Kräftepaare zu vereinfachen gesucht. Doch bin ich hierin einen Schritt weiter gegangen. Poinsot nämlich trägt diese Theorie erst dann vor, nachdem er parallele Kräfte und auf einen Punkt wirkende Kräfte zusammenzusetzen gelehrt hat. Dagegen folgt hier die Theorie der Paare unmittelbar auf die allgemeinsten Sätze vom Gleichgewichte, und dann erst die Theorie von der Zusammensetzung von Kräften, welche nicht Paare bilden. Denn nicht nur lässt sich die letztere Theorie, nachdem die erstere vorausgegangen, ungleich einfacher, als ohnedem, entwickeln, sondern es ist auch, wie man sich überzeugen wird, die erstere Theorie ganz unabhängig von der letztern darstellbar.

Bereits in einem in Crelle's math. Journal *) befindlichen Aufsatze habe ich gezeigt, wie die Theorie der Paare selbstständig entwickelt und aus ihr ohne weiteres die sechs Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht zwischen Kräften, die nach beliebigen Richtungen im Raume auf einen frei beweglichen Körper wirken, hergeleitet werden können, woraus sich zuletzt die drei Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht zwischen Kräften in einer Ebene, als für einen speciellen Fall, ergeben. Wiewohl nun die grosse Kürze dieses Wegs ihm zur Empfehlung gereichen möchte, so dürfte doch der unmittelbare Fortgang zu dem allgemeinsten Falle Manchem für das erste Studium zu überraschend scheinen, und ich habe es daher im Gegenwärtigen vorgezogen, die auf dieselbe Weise behandelte Theorie des Gleichge-

---

*) 7. Band, S. 205 216.

wichts in einer Ebene vorauszuschicken und dadurch den Leser zum Verständniss der Theorie des Gleichgewichts im Raume vorzubereiten.

Die im 6ten Kapitel des ersten Theils folgende weitere Ausführung der Theorie der Momente beschäftigt sich mit der Beantwortung der zwei Fragen: erstens, nach welchen Gesetzen das Moment eines Systems von Kräften im Raume, welche nicht im Gleichgewichte sind, von einer Axe zur andern, auf welche das Moment bezogen wird, veränderlich ist; und zweitens, unter welchen Bedingungen und auf welche Weise aus den Momenten des Systems für eine Anzahl von Axen die Momente für noch andere Axen gefunden werden können. Die Untersuchungen, zu welchen die erste dieser Fragen veranlasst, sind — die Darstellung der Momente durch Kugelsehnen, den darauf gegründeten Beweis für das Parallelogramm der Kräfte und die Theorie der Nullebenen und Nullpunkte ausgenommen — schon von Poinsot und Andern geführt worden. Die zweite Frage habe ich in grösster Allgemeinheit zu beantworten gesucht und Resultate erhalten, von denen bisher nur einige specielle Fälle bekannt waren.

In den noch übrigen Kapiteln des ersten Theils wird angenommen, dass ein frei beweglicher Körper, auf welchen Kräfte wirken, auf irgend eine Weise aus seiner Lage verrückt wird, während die Kräfte auf ihre Angriffspunkte mit unveränderlicher Stärke und parallel mit ihren anfänglichen Richtungen zu wirken fortfahren, und es wird nun untersucht, wie durch diese Lageänderung des Körpers die Wirkung der Kräfte geändert wird. Der einfachste hierbei mögliche Fall ist der, wenn die Kräfte parallele Richtungen ha-

ben und auf eine einzelne Kraft zurückgeführt werden können. Denn alsdann bleiben sie auch bei jeder Verrückung des Körpers auf eine einzelne Kraft reducirbar, und diese Kraft trifft immer auf einen Punkt, welcher gegen die Angriffspunkte der erstern Kräfte eine unveränderliche Lage hat und unter dem Namen des Mittelpunkts paralleler Kräfte bekannt ist. Aehnliche Untersuchungen habe ich hier auch in Bezug auf Systeme nicht paralleler Kräfte angestellt und glaube, dass die gewonnenen Resultate nicht bloss ihrer Neuheit willen *), sondern auch wegen ihrer verhältnissmässigen Einfachheit und weil sie zu vielleicht noch fruchtreichern Forschungen über diesen Gegenstand Veranlassung geben können, der Beachtung nicht unwerth sind.

Genau mit diesen Untersuchungen hängt die Lehre von der Sicherheit des Gleichgewichts zusammen. Denn halten sich die Kräfte anfänglich das Gleichgewicht, so wird dasselbe bei einer auch noch so geringen Lageänderung des Körpers im Allgemeinen aufgehoben, und jenachdem die Kräfte den Körper in die anfängliche Lage zurückzubringen oder noch weiter davon zu entfernen suchen, wird das Gleichgewicht sicher oder unsicher genannt. Ich habe daher nicht angestanden, auch die Lehre von der Sicherheit, so weit es ohne Einmischung der Dynamik geschehen konnte, hier vorzutragen und, unterstützt

*) Neu bis auf die erst kürzlich von Minding über denselben Gegenstand, jedoch auf eine von der meinigen ganz verschiedene Weise angestellten und mit zum Theil merkwürdigen Ergebnissen begleiteten Untersuchungen. Man findet dieselben in Crelle's Journal 14. Band S. 289, 15. Band, S. 27 und 313. — Eine Uebersicht der von mir gefundenen und in gegenwärtiger Schrift dargelegten Resultate siehe im 16. Bande S. 1. desselben Journals.

durch die vorhergehenden Ergebnisse, die Function zu entwickeln, aus deren Vorzeichen erkannt wird, *ob ein* gegebenes Gleichgewicht sicher oder un*sicher* ist. Die Umständlichkeit, mit welcher ich diesen Gegenstand behandelt habe, dürfte dadurch, dass ungeachtet der elementaren Behandlung, deren er fähig ist, sich über ihn in den bisherigen Lehrbüchern der Statik nur weniges oder nichts vorfindet, hinlänglich gerechtfertigt werden.

Zwischen dem Zustande des Gleichgewichts in Bezug auf Sicherheit und den Eigenschaften des grössten oder kleinsten Werthes einer veränderlichen Grösse findet eine grosse Aehnlichkeit statt. Dies leitet auf die Vermuthung, dass es eine Function der die Kräfte und deren Angriffspunkte bestimmenden Grössen gebe, welche beim Gleichgewichte ein Maximum oder ein Minimum ist. Die Entwickelung dieser Function, deren zweites Differential die Merkmale für die Sicherheit oder Unsicherheit abgiebt, ist in dem letzten Kapitel des ersten Theiles enthalten. Das erste Differential derselben Function muss zu Folge der Natur der Grössten und Kleinsten null seyn, welches zu dem in diesem Kapitel gleichfalls behandelten Princip der virtuellen Geschwindigkeiten führt. Die Herleitung einer noch andern Function, die beim Gleichgewichte ebenfalls ein Maximum oder ein Minimum ist, und die für den Fall, dass die Kräfte durch unendlich kleine Linien ausgedrückt werden, bereits von Gauss aufgestellt worden, macht den Beschluss des ersten Theils.

Im zweiten Theile wird das Gleichgewicht an mehrern mit einander verbundenen Körpern betrachtet. Hier suchte ich zuerst mit möglichster Schärfe und Allgemeinheit die Bedingungen eines

auch für Kräfte an den Körpern angebracht werden, doch keine Bedingungen für's Gleichgewicht hervorgehen.

Wenn aber auch die Lage von Körpern oder der Theile einer Figur unveränderlich ist, so lassen sich doch immer specielle Bedingungen für das Verhalten der Theile zu einander ausfindig machen, unter denen die Unbeweglichkeit in eine unendlich kleine Beweglichkeit übergeht. Wie diese Bedingungen statisch gefunden werden können, und wie damit zugleich Maxima und Minima der Figur bestimmt werden, dies habe ich im 5ten Kapitel gezeigt und die dazu angegebene Methode durch mehrere Beispiele erläutert. Irre ich mich nicht, so ist diese Methode noch einer grössern Ausbildung fähig und wegen ihres Nutzens für die Geometrie dieser Ausbildung nicht unwerth.

Die einfachste Art, auf welche mehrere Körper mit einander verbunden seyn können, besteht darin, dass keiner mit mehr als zwei der übrigen verbunden ist. Ein solches System wird im Allgemeinen eine Kette genannt, und, wenn die Körper unendlich klein sind, ein Faden. Die Lehre vom Gleichgewichte an Fäden wird im 6ten, 7ten und 8ten Kapitel behandelt. Nachdem in dem 6ten die Theorie des Gleichgewichts an einem vollkommen biegsamen Faden auseinandergesetzt worden, wird im 7ten auf die, wie es scheint, noch nicht beachtete vollkommene Analogie aufmerksam gemacht, die zwischen dem Gleichgewichte an einem solchen Faden und der Bewegung eines materiellen Punktes statt findet, und wonach jedes Fadengleichgewicht als das Abbild der Bewegung eines Punktes, und umgekehrt, an-

gesehen werden kann, und jedem Satze in der Theorie des einen ein Satz in der Theorie des andern entspricht. Insbesondere habe ich hiernach das Princip der Flächen, das Princip der lebendigen Kräfte und das Princip der kleinsten Wirkung, insofern diese Sätze die Bewegung nur eines Punktes betreffen, aus der Dynamik auf das Fadengleichgewicht übergetragen und damit drei entsprechende Sätze erhalten, von denen der dritte neu und merkwürdig zugleich seyn dürfte.

In Betreff des 8ten und letzten Kapitels, welches das Gleichgewicht an elastischen Fäden untersucht, werde noch bemerkt, dass die der Natur der Sache sehr angemessene Eintheilung elastischer Fäden in elastisch dehnbare, biegsame und drehbare aus einer im *Journal de l'école polytechnique, Tome X. p.* 418, befindlichen Abhandlung von Binet über diesen Gegenstand entlehnt worden, und dass, obschon zwischen dem Gleichgewichte an einem elastischen Faden und der Bewegung eines Punktes keine Analogie herrscht, es mir doch gelungen ist, in Bezug auf das Gleichgewicht an einem elastisch biegsamen Faden Sätze aufzufinden, welche dem zweiten und dritten der eben gedachten drei Sätze rücksichtlich des Gleichgewichts an einem vollkommen biegsamen Faden und damit dem Princip der lebendigen Kräfte und dem Princip der kleinsten Wirkung entsprechen.

Inhalt des ersten Theiles.

Gesetze des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche auf einen einzigen festen Körper wirken.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Sätze vom Gleichgewichte.

Zweites Kapitel.

Vom Gleichgewichte zwischen Kräftepaaren in einer Ebene.

Drittes Kapitel.

Vom Gleichgewichte zwischen Kräften in einer Ebene überhaupt.

Viertes Kapitel.

Vom Gleichgewichte zwischen Kräftepaaren im Raume.

Fünftes Kapitel.

Vom Gleichgewichte zwischen Kräften im Raume überhaupt.

Siebentes Kapitel.

Von den Mittelpunkten der Kräfte.

Sechstes Kapitel.

Weitere Ausführung der Theorie der Momente.

Siebentes Kapitel.

Von den Mittelpunkten der Kräfte.

Achtes Kapitel.

Von den Axen des Gleichgewichts.

Neuntes Kapitel.

Von der Sicherheit des Gleichgewichts.

Zehntes Kapitel.

Von den Maximis und Minimis beim Gleichgewichte.

Erster Theil.

Gesetze des Gleichgewichts

zwischen Kräften,

welche auf einen einzigen festen Körper wirken.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Sätze vom Gleichgewichte.

§. 1.

Ein ruhender Körper kann nicht von selbst sich zu bewegen anfangen. Die Ursache der Bewegung eines vorher ruhenden Körpers muss daher eine äussere seyn. Diese äussere Ursache der Bewegung nennt man Kraft.

Nicht immer wird durch die Wirkungen von Kräften auf einen oder mehrere in Verbindung mit einander stehende Körper Bewegung erzeugt. Es kann auch geschehen, dass die Wirkungen der Kräfte sich gegenseitig aufheben. Dieser Zustand der Ruhe, welcher ungeachtet mehrfacher Veranlassung zur Bewegung statt findet, heisst Gleichgewicht, und die Wissenschaft der Bedingungen, unter welchen die auf einen, oder mehrere mit einander verbundene, Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sind, wird die Statik genannt.

§. 2.

Im Vorliegenden werden wir die Bedingungen des Gleichgewichts nur bei festen Körpern, d. h. bei denen in Untersuchung ziehen, bei welchen die gegenseitigen Entfernungen ihrer Theilchen durch keine Kraft geän-

dert werden können. Allerdings ist dieser Begriff von Festigkeit nur ideal, indem es keinen Körper in der Natur giebt, dessen Gestalt durch die Einwirkung von Kräften nicht in etwas, sei es auch noch so unmerklich, geändert würde. Die Resultate, zu denen wir unter der Annahme solch' einer idealen Festigkeit durch die Theorie gelangen, werden daher durch keine Erfahrung vollkommen bestätiget werden. Indessen wird von diesen Resultaten die Erfahrung um so weniger abweichen, je weniger die dabei angewendeten Körper von jener idealen Festigkeit sich entfernen.

Uebrigens werden wir in diesem ersten Theile der Statik das Gleichgewicht nur an einem einzigen, mit keinem andern in Berührung stehenden und somit frei beweglichen, festen Körper betrachten. Ein solcher ist daher in dem Nächstfolgenden, auch wenn er nicht besonders erwähnt wird, stets als vorausgesetzt anzunehmen.

§. 3.

Derjenige Punkt eines Körpers, den eine auf den Körper wirkende Kraft zunächst in Bewegung zu setzen strebt, heisst der Angriffspunkt der Kraft. Die Richtung aber, nach welcher sich dieser Punkt, wäre er ohne Verbindung mit dem Körper, durch die Kraft getrieben, bewegen würde, nennt man die Richtung der Kraft.

Ausser dem Angriffspunkte und der Richtung ist bei jeder Kraft noch ihre Intensität oder Stärke zu berücksichtigen, eine Grösse, deren Begriff hier noch nicht näher bestimmt werden kann, sondern erst im weitern Fortgange dieses Kapitels durch die Principien des Gleichgewichts selbst seine Bestimmung erhalten wird.

§. 4.

I. Grundsatz. An einem frei beweglichen Punkte, auf welchen eine Kraft wirkt, kann immer eine zweite, der erstern das Gleichgewicht haltende, Kraft angebracht werden, und diese zweite muss, wenn Gleichgewicht statt finden soll, eine der erstern entgegengesetzte Richtung haben.

Nicht je zwei auf einen frei beweglichen Punkt nach entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräfte halten einander das Gleichgewicht. Geschieht dieses aber, so sollen die Kräfte ihrer **Intensität** nach **einander gleich**, oder schlechthin einander **gleich** genannt werden.

Wenn von drei Kräften die erste und zweite, an einem Punkte nach entgegengesetzten Richtungen angebracht, mit einander im Gleichgewichte sind, und wenn dasselbe auch von der zweiten und dritten gilt, so gilt es auch von der ersten und dritten; oder kürzer:

II. Grundsatz. Zwei Kräfte, deren jede einer dritten gleich ist, sind einander selbst gleich.

III. Grundsatz. Ist von zwei oder mehrern auf einen Körper wirkenden Systemen von Kräften jedes für sich im Gleichgewichte, so sind es auch die Kräfte aller Systeme in Vereinigung.

IV. Grundsatz. Wenn zwischen mehrern auf einen Körper wirkenden Kräften Gleichgewicht statt findet, und eine Anzahl derselben für sich im Gleichgewicht ist, so herrscht

auch zwischen den übrigen, für sich genommen, Gleichgewicht.

§. 5.

Folgerungen. *a.* Hält eine Kraft p einem Systeme S zweier oder mehrerer Kräfte das Gleichgewicht, so ist auch jede andere der p gleiche Kraft q, wenn sie an dem Angriffspunkte A von p und nach der Richtung von p angebracht wird, mit S im Gleichgewichte. Denn sei r eine zweite der p, also auch (II.) der q, gleiche Kraft. Man bringe q in A nach der Richtung von p, und r ebendaselbst nach der entgegengesetzten Richtung, an. Alsdann ist q mit r im Gleichgewicht, und es wird folglich das Gleichgewicht zwischen p und S dadurch nicht gestört. (III.). Bei dem nunmehrigen Systeme von p, q, r, S sind aber auch p und r im Gleichgewichte; folglich muss auch zwischen q und S Gleichgewicht statt finden. (IV.).

b. Halten sich mehrere Kräfte p, q, r,... das Gleichgewicht, so besteht dasselbe auch zwischen Kräften p', q', r',..., die den ersteren resp. gleich sind und auf die Angriffspunkte der erstern nach entgegengesetzten Richtungen wirken. Denn lässt man p', q', r',... mit p, q, r,... zugleich wirken, so ist p' mit p, q' mit q, u. s. w. besonders im Gleichgewichte; folglich sind es auch p, q, r,... und p', q', r',... in Vereinigung (III.). Weil aber p, q, r,... für sich im Gleichgewichte sind, so herrscht dasselbe auch zwischen p', q', r',... (IV.)

In dem System von p', q', r',... kann nach *a.* für p' die ihr gleiche Kraft p nach der Richtung von p', und eben so q für q' nach der Richtung von q', u. s. w.

gesetzt werden. Hiernach lässt sich der voranstehende Satz auch also ausdrücken:

Das Gleichgewicht zwischen mehrern Kräften wird nicht unterbrochen, wenn man jede Kraft an ihrem Angriffspunkte nach einer, ihrer anfänglichen entgegengesetzten, Richtung anbringt.

c. Bezeichne P ein System von Kräften, und P' ein zweites, in welchem die Angriffspunkte und Intensitäten der Kräfte dieselben wie im ersten, die Richtungen aber die entgegengesetzten sind. In der derselben gegenseitigen Beziehung stehen die Systeme Q und Q', S und S'. Ist nun 1) P mit Q und 2) P mit S im Gleichgewichte, so ist es auch Q' mit S. Denn wegen 1) ist nach *b.* P' mit Q' im Gleichgewichte, folglich sind wegen 2) nach III. P', Q', P, S zusammen im Gleichgewichte. Es sind aber die Systeme P und P' für sich im Gleichgewichte, weil sie zusammen aus Paaren von einander gleichen Kräften bestehen, die auf einerlei Punkt einander entgegen wirken. Mithin müssen nach IV. auch Q' und S sich das Gleichgewicht halten.

Da endlich nach *a.* statt Q' die Kräfte des Systems Q selbst, nach entgegengesetzten Richtungen genommen, gesetzt werden können, so lässt sich der eben erwiesene Satz folgendergestalt aussprechen: Wenn von zwei Systemen von Kräften (Q und S) jedes mit einem dritten (P) im Gleichgewicht ist, so sind sie es auch unter sich, nachdem die Kräfte des einen (Q) an ihren Angriffspunkten nach entgegengesetzten Richtungen angebracht worden.

§. 6.

Zwei auf einen Körper wirkende Systeme von Kräften nenne man gleichwirkend, wenn das eine, nach-

dem die Richtungen seiner Kräfte in die entgegengesetzten verwandelt worden, dem andern das Gleichgewicht hält. So sind, mit Anwendung der vorigen Bezeichnung, die Systeme *P'* und *Q*, oder *P'* und *S*, so wie *P* und *S'*, gleichwirkend, wenn *P* mit *Q*, oder *P* mit *S* im Gleichgewicht ist; und eben so sind *Q* und *S* gleichwirkend, wenn *Q'* und *S*, also auch *Q* und *S'* sich das Gleichgewicht halten.

Mit Hülfe dieser Benennung lässt sich der Satz in §. 5. *c.* auf mehrfache Weise ausdrücken:

1) *Zwei Systeme von Kräften* (*Q und S*), *deren jedes mit einem dritten* (*P*) *im Gleichgewicht ist, sind von gleicher Wirkung; und umgekehrt:*

2) *Sind zwei Systeme* (*P und S'*) *gleichwirkend, so ist mit jedem dritten Systeme* (*Q*), *mit welchem das eine* (*P*) *das Gleichgewicht hält, auch das andere* (*S'*) *im Gleichgewichte; d. i.: Gleichwirkende Systeme können in Bezug auf das Gleichgewicht für einander gesetzt werden.*

3) *Zwei Systeme* (*Q und S*), *deren jedes einem dritten* (*P'*) *gleichwirkend ist, sind es auch unter sich.*

§. 7.

Eben so, wie ganze Systeme, können auch einzelne Kräfte unter sich und mit Systemen einerlei Wirkung haben. Sollen zwei einzelne Kräfte gleichwirkend sein, so muss, nach der vorhergehenden Definition gleichwirkender Systeme, die eine, in entgegengesetzter Richtung genommen, der andern das Gleichgewicht halten. Es müssen folglich beide, wenn sie auf einen und denselben Punkt des Körpers wirken, einerlei Richtung und gleiche Intensität haben.

Eine einzelne Kraft, welche mit einem Systeme von zwei oder mehrern Kräften gleichwirkend ist, heisst die Resultante des Systems.

Hat daher ein System eine Resultante, und wird diese mit entgegengesetzter Richtung als neue Kraft dem Systeme hinzugefügt, so kommt dadurch das System ins Gleichgewicht. Und umgekehrt: ist ein System im Gleichgewichte, so ist jede Kraft desselben, nach entgegengesetzter Richtung genommen, die Resultante der jedesmal übrigen.

Ist die Kraft p die Resultante des Systems S, und soll auch die Kraft q als Resultante von S gelten können, so müssen nach §. 6. 3. p und q gleichwirkend sein und folglich, wenn sie auf einerlei Punkt wirken, einerlei Richtung und gleiche Intensität haben. *Einem Systeme von Kräften können daher nicht zwei Resultanten zukommen, die, auf denselben Punkt wirkend, an Intensität oder Richtung verschieden wären. Und eben so müssen zwei Kräfte, deren jede auf denselben Punkt wirkend mit demselben Systeme das Gleichgewicht hält, gleiche Intensität und einerlei Richtung haben.*

§. 8.

Aus jedem Systeme von mehr als zwei Kräften, welche im Gleichgewichte sind, lassen sich immer auf mehrfache Weise zwei gleichwirkende Systeme bilden, indem man zu dem einen System einen beliebigen Theil der Kräfte des anfänglichen Systems nach entgegengesetzten Richtungen nimmt, und das andere System aus den übrigen Kräften mit nicht veränderten Richtungen bestehen lässt. Man kann daher die Statik auch als die Wissenschaft betrachten, welche lehrt,

unter welchen Bedingungen zwei Systeme von Kräften gleiche Wirkung mit einander haben, und wie ein gegebenes System in ein anderes von gleicher Wirkung verwandelt werden kann, — auf ähnliche Art wie die mathematische Analysis in Bezug auf Grössen überhaupt die aus ihnen zusammengesetzten Ausdrücke mit einander vergleichen und umformen lehrt.

Sind aber zwei Systeme in statischer Rücksicht von einerlei Wirkung, so sind sie es auch in dynamischer, d. h. sie bringen einerlei Bewegung hervor, wie dies ganz leicht mit Zuziehung des Grundsatzes erhellet, dass die Bewegung eines Körpers durch Hinzufügung oder Wegnahme von Kräften, die unter sich im Gleichgewichte sind, nicht geändert wird. Die Statik ist hiernach die nothwendige Vorbereitungswissenschaft zu der Bewegungslehre oder Dynamik, indem sie die vorgegegebenen Kräfte dergestalt mit einander verbinden, oder in andere verwandeln lehrt, dass daraus mittelst der Principien der Dynamik die bewirkten Bewegungen am einfachsten hergeleitet werden können.

§. 9.

V. Grundsatz. Wenn Kräfte in beliebiger Anzahl einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt haben und nicht im Gleichgewichte sind, so kann dieses immer durch Hinzufügung einer neuen auf denselben Punkt wirkenden Kraft hergestellt werden; oder:

Ein System von Kräften, die auf einen und denselben Punkt wirken und nicht im Gleichgewichte sind, hat eine auf denselben Punkt wirkende Resultante.

Zusätze. *a.* Die Richtung und Stärke jener das Gleichgewicht haltenden Kraft oder dieser Resultante ist aus den Kräften des Systems nur auf eine Weise bestimmbar (§. 7.). Fallen daher die Richtungen sämmtlicher Kräfte in dieselbe gerade Linie, so ist darin auch die Richtung ihrer Resultante enthalten, indem sonst, wenn die Resultante mit dieser Linie einen Winkel bildete, jede andere Gerade, welche mit der Linie denselben Winkel macht, die Richtung der Resultante seyn könnte.

b. Aus gleichem Grunde ist von zwei Kräften p und q, die einerlei Angriffspunkt A (Fig. 1.) haben und mit einander einen Winkel bilden, die ihnen das Gleichgewicht haltende Kraft r, folglich auch ihre Resultante, in der Ebene des Winkels enthalten. Denn seyen AP, AQ, AR die Richtungen von p, q, r, so müssen, auch wenn diese Linien über A hinaus nach P', Q', R' verlängert werden, die Kräfte p, q, r nach den Richtungen AP', AQ', AR' im Gleichgewichte seyn (§. 5. *b.*). Man drehe nun das System letzterer drei Richtungen in der Ebene des Winkels $P'AQ'$ um A herum, bis AP' in AP fällt, so fällt AQ' in AQ; AR' aber muss in AR fallen, indem, wenn AR' nicht die Richtung AR, sondern irgend eine andere AS erhielte, die nach AP und AQ wirkenden Kräfte p und q sowohl durch eine nach AR als durch eine nach AS gerichtete Kraft in's Gleichgewicht gebracht werden könnten, welches nicht möglich ist. (§. 7.). Die Richtung AR' fällt aber nach der Drehung ersichtlich nur dann, und dann immer, mit AR zusammen, wenn AR in der Ebene PAQ enthalten ist.

c. Sind zwei auf einen Punkt A wirkende Kräfte p und q einander gleich, so wird der Winkel ihrer Richtungen AP und AQ von ihrer Resultante halbirt.

Denn man vertausche die Kräfte, indem man p nach AQ und q nach AP wirken lässt, so wird die Resultante nunmehr mit AQ denselben Winkel machen, den sie vorher mit AP bildete. Da aber p und q einander gleich sein sollen, so ist durch diese Vertauschung das System der beiden Kräfte, folglich auch ihre Resultante, unverändert geblieben. Die Resultante muss daher mit AP und AQ gleiche Winkel machen, d. i. den Winkel PAQ halbiren.

§. 10.

VI. Grundsatz. Zwischen Kräften, die auf einen und denselben Punkt nach einerlei Richtung wirken, giebt es kein Gleichgewicht. — Die ihnen das Gleichgewicht haltende Kraft hat daher die entgegengesetzte Richtung, und ihre Resultante mit ihnen selbst einerlei Richtung.

VII. Grundsatz. Wenn die Richtungen zweier auf einen Punkt wirkenden Kräfte einen Winkel bilden, so fällt die Richtung der Kraft, welche zum Gleichgewichte erforderlich ist, in den Scheitelwinkel, also die Richtung der Resultante in den Winkel selbst.

§. 11.

Die Intensität einer Kraft nennt man das Doppelte, Dreifache u. s. w. der Intensität einer andern Kraft, oder geradezu die eine Kraft das Doppelte, Dreifache u. s. w. der andern, wenn sie von zwei, drei u. s. w. Kräften, welche einzeln der andern gleich sind und auf einen Punkt nach einerlei Richtung wirken, die Resultante ist.

Zwei Kräfte P und Q, sagt man hiernach, verhalten sich wie die ganzen Zahlen p und q, wenn es eine

dritte Kraft giebt, von welcher P das $p$fache und Q das $q$fache ist; oder was auf dasselbe hinauskommt: wenn das $q$fache von P dem $p$fachen von Q gleich ist. Weil aber Kräfte auch in irrationalen Verhältnissen zu einander stehen können, so stellen wir noch folgende Definition des Verhältnisses zwischen Kräften auf, die der bekannten Euklidischen Definition des Verhältnisses zwischen Grössen überhaupt, nachgebildet ist:

Zwei Kräfte P und Q verhalten sich wie die Zahlen p und q, wenn von beliebigen Gleichvielfachen, die man von P und p, und beliebigen Gleichvielfachen, die man von Q und q nimmt, das Vielfache von p dem Vielfachen von q gleich, oder kleiner, oder grösser als dasselbe ist, je nachdem die Vielfachen von P und Q, wenn man beide nach entgegengesetzten Richtungen auf einen Punkt wirken lässt, sich entweder das Gleichgewicht halten, oder man in der Richtung des Vielfachen von P, oder des Vielfachen von Q eine Kraft hinzuzufügen nöthig hat, um Gleichgewicht hervorzubringen.

Hiernach kann das Verhältniss zweier Kräfte P und Q stets durch Zahlen, und dieses so genau, als man will, bestimmt werden. Sei nämlich $P = Q + Z$, wo $Q + Z$ einstweilen noch nicht die Summe, sondern die Resultante zweier nach einerlei Richtung wirkender Kräfte Q und Z bezeichnen soll, so dass in Folge der gesetzten Gleichung auf der Seite von Q noch eine Kraft Z angebracht werden muss, um der Kraft P auf der andern Seite das Gleichgewicht zu halten. Man nehme nun von P irgend ein Vielfaches nP, und von Q, wenn es möglich ist, ein Vielfaches mQ, welches dem nP gleich ist, und es werden sich die Kräfte P und Q wie die Zahlen m und n verhalten. Giebt

es aber kein dem nP gleiches Vielfaches von Q, so lässt sich doch immer von Q ein solches Vielfaches mQ nehmen, dass mit Anwendung der vorigen Bezeichnungsart 1) $nP = mQ + X$ und 2) $nP + Y = (m+1)Q$ ist. Verhalten sich nun P und Q, wie die Zahlen p und q, so muss, zufolge der Definition, wegen 1), $np > mq$, und wegen 2), $np < (m+1)q$ seyn. Das gesuchte Verhältniss $p:q$ ist daher zwischen den zwei Verhältnissen $m:n$ und $m+1:n$ enthalten, deren Unterschied desto kleiner, kleiner als jede angebbare Grösse, wird, je grösser man n, und folglich auch m, nimmt.

§. 12.

So wie auf diese Weise das Verhältniss je zweier Kräfte numerisch bestimmt werden kann, so ist auch umgekehrt, wenn von zwei Kräften ihr numerisches Verhältniss und die eine gegeben ist, auch die andere gegeben. Von zwei oder mehrern Kräften werden daher alle bestimmt seyn, wenn es nur eine derselben unmittelbar ist, für jede andere aber ihr Verhältniss zu jener bestimmt ist. Man pflegt hiernach eine gewisse Kraft als Einheit anzunehmen und jede andere Kraft durch die Zahl auszudrücken, die sich eben so zu der numerischen Einheit, wie letztere Kraft zu der als Einheit festgesetzten Kraft verhält.

Wenn daher in dem Folgenden von der Summe oder dem Unterschiede zweier Kräfte die Rede seyn wird, so ist darunter nichts anderes, als die Kraft zu verstehen, deren Zahl der Summe oder dem Unterschiede der den erstern Kräften zugehörigen Zahlen gleich ist. Eben so wird eine Kraft kleiner, als eine andere, genannt werden, wenn die Zahl der erstern

kleiner, als die der letztern ist, oder, was nach obiger Definition des Verhältnisses dasselbe aussagt: wenn die erstere erst in Verbindung mit einer andern nach derselben Richtung wirkenden Kraft mit der andern gleiche Wirkung erhält. Denn die gewöhnliche Erklärung, wonach eine Grösse kleiner, als eine andere, heisst, wenn sie einem Theile der andern gleich ist, kann auf Kräfte nicht angewendet werden, da Kräfte, als intensive Grössen, nicht, gleich den extensiven, aus unterscheidbaren Theilen zusammengesetzt sind.

Sehr vortheilhaft kann man in der Statik die Kräfte auch durch Linien ausdrücken. Ist nämlich A der Angriffspunkt einer Kraft, so trage man nach der Richtung zu, in welcher sie wirkt, eine ihrer Intensität proportionale Linie AB, d. i. eine Linie, welche in demselben Verhältniss zu der als Linieneinheit angenommenen Länge steht, als die Kraft zu der Einheit der Kräfte; und auf diese Weise wird mit der Linie AB der Angriffspunkt, die Richtung und die Intensität der Kraft zugleich vorgestellt.

§. 13.

Lehrsatz. Die Resultante zweier auf einen Punkt nach einerlei Richtung wirkenden Kräfte P und Q ist der Summe derselben gleich.

Beweis. Verhalten sich P und Q wie zwei ganze Zahlen p und q, giebt es also eine Kraft U, von welcher P das $p$fache und Q das $q$fache ist, so kann man statt P, pKräfte, und statt Q, qKräfte, deren jede $=U$ ist und nach derselben Richtung wie P oder Q wirkt, setzen. Von diesen $p+q$ Kräften mit einerlei Richtung ist aber die Resultante das $(p+q)$ fache von

U, oder die Kraft $p+q$, wenn P und Q durch die ihnen proportionalen Zahlen p und q ausgedrückt werden.

Dasselbe erhellet auch daraus, dass, wenn sich $P:Q=p:q$ verhält, das $q$fache von P, oder qP, mit pQ, also auch pP und qP nach einerlei Richtung mit pP und pQ nach einerlei Richtung, d. i. das $(p+q)$fache von P mit dem $p$fachen der Resultante von P und Q ins Gleichgewicht gebracht werden kann, und dass sich daher diese Resultante zu der Kraft P wie $p+q$ zu p verhält.

Lässt sich das Verhältniss zwischen P und Q nicht durch ganze Zahlen ausdrücken, so ist der Beweis mit Anwendung der Grenzverhältnisse zu führen, oder auf ähnliche Art, wie Euklides in seiner Lehre von den Verhältnissen zu Werke geht, was ich aber, um Weitläufigkeit zu vermeiden, hier unterlasse.

Zusatz. Auf ganz ähnliche Weise ergiebt sich, dass auch von drei oder mehrern Kräften, welche auf einen Punkt nach einerlei Richtung wirken, die Resultante ihrer Summe gleich ist; dass von zwei einander nicht gleichen Kräften, welche auf einen Punkt nach entgegengesetzten Richtungen wirken, die Resultante der Unterschied der beiden Kräfte ist und die Richtung der grössern hat; dass von mehrern an einem Punkte angebrachten Kräften, welche in derselben Linie zum Theil nach einerlei, zum Theil nach entgegengesetzten Richtungen wirken, und deren je zwei, wenn sie entgegengesetzte Richtungen haben, mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden, die Resultante der algebraischen Summe der Kräfte gleich ist, und nach der Richtung derjenigen Kräfte wirkt, mit denen sie einerlei Zeichen hat; dass endlich, wenn diese algebraische Summe sich Null findet, Gleichgewicht herrscht.

§. 14.

VIII. Grundsatz. **Zwei Kräfte, welche auf zwei Punkte eines frei beweglichen festen Körpers wirken, sind nur dann, und dann immer, im Gleichgewichte, wenn sie gleiche Intensitäten und einander gerade entgegengesetzte Richtungen haben**, so dass letztere in die, die beiden Punkte verbindende, Gerade selbst fallen.

Folgerungen. *a.* Sind zwei Kräfte auf die besagte Art im Gleichgewichte, und wird von einer derselben die Richtung in die entgegengesetzte verwandelt, so hat man zwei Kräfte, die gleiche Intensität und einerlei Richtung haben und nach §. 6. gleichwirkend sind. Die Wirkung einer Kraft wird daher nicht geändert, wenn man zu ihrem Angriffspunkt einen beliebigen andern Punkt ihrer Richtung wählt, der mit dem anfänglichen fest verbunden ist; oder, wie man sich kurz auszudrücken pflegt: *eine Kraft kann ohne Aenderung ihrer Wirkung auf jeden Punkt ihrer Richtung verlegt werden.*

b. Es wird daher auch das Gleichgewicht eines Systems von Kräften nicht gestört und überhaupt die Wirkung eines Systems nicht geändert werden, wenn man die Intensität und Richtung jeder Kraft ungeändert lässt, für den Angriffspunkt aber irgend einen andern mit dem erstern fest verbundenen Punkt ihrer Richtung nimmt; mit andern Worten: die Wirkung einer Kraft auf einen festen Körper ist schon genugsam durch die Richtung und Intensität der Kraft bestimmt, indem für ihren Angriff jeder Punkt des innerhalb des Körpers fallenden Theiles ihrer Richtung genommen werden kann.

c. Der Satz, dass auf einen Punkt wirkende Kräfte eine auf denselben Punkt wirkende Resultante haben,

lässt sich hiernach allgemeiner also ausdrücken: Zwei oder mehrere Kräfte, deren Richtungen sich in einem Punkte schneiden, haben eine durch denselben Punkt gehende Resultante.

d. Eben so gilt Alles, was im vorigen §. von Kräften erwiesen wurde, die einerlei Angriffspunkt und in dieselbe Gerade fallende Richtungen haben, auch dann schon, wenn bloss die letztere Bedingung erfüllt ist. *Unter der Voraussetzung also, dass je zwei Kräfte, deren Richtungen einander entgegengesetzt sind, mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden, ist von zwei oder mehrern Kräften, von denen die Richtungen (und mithin auch die Angriffspunkte) in dieselbe Gerade fallen, die Resultante gleich der Summe der Kräfte und die Richtung der Resultante einerlei mit der Richtung derjenigen Kräfte, mit denen sie einerlei Zeichen hat; ihr Angriffspunkt aber kann willkührlich in der Geraden genommen werden. Ist die Summe der Kräfte null, so sind sie im Gleichgewichte.*

Zweites Kapitel.

Vom Gleichgewichte zwischen Kräftepaaren in einer Ebene.

§. 15.

Seyen p und q zwei auf einen Punkt A (Fig. 2.) nach den Richtungen AP und AQ wirkende Kräfte, r ihre Resultante, deren Richtung AR in die Ebene PAQ fällt (§. 9. *b.*). Die Intensität dieser Resultante

und die Winkel ihrer Richtung mit den Richtungen von p und q können von nichts Anderem, als den Intensitäten und dem Winkel der Richtungen von p und q abhängig seyn. Bringt man daher an irgend einem anderen Punkte A' zwei den p und q resp. gleiche Kräfte p' und q' nach Richtungen $A'P'$ und $A'Q'$ an, die mit AP und AQ parallel sind, so wird die Resultante r' von p' und q' der r gleich seyn und eine mit AR parallele Richtung $A'R'$ haben. Ist dabei A' ein Punkt der AR selbst, wie in der Figur, so fallen die Richtungen AR und $A'R'$ zusammen, und die beiden Resultanten r und r' werden gleichwirkend (§. 14. *a.*), also auch p' und q' gleichwirkend mit p und q. Lassen wir folglich die Kräfte p' und q' nach den entgegengesetzten Richtungen $P'A'$ und $Q'A'$ wirken, so sind sie mit p und q zusammen im Gleichgewichte. Zwei Kräfte, deren Richtungen sich schneiden (vergl. §.14. *b.*), kommen demnach ins Gleichgewicht, wenn durch einen Punkt ihrer Resultante zwei ihnen resp. gleiche, parallele und entgegengesetzte Kräfte gelegt werden; woraus wir weiter schliessen:

1) Zwei sich schneidende Kräfte (p, q) und eine dritte (p'), der einen (p) von ihnen gleiche, parallele und entgegengesetzte Kraft können nicht im Gleichgewichte seyn, indem dieses erst dann entsteht, wenn durch den Punkt, in welchem die dritte (p') die Resultante (r) der beiden erstern schneidet, eine vierte, der andern (q) jener beiden gleiche, parallele und entgegengesetzte Kraft (q') gelegt wird.

Die Richtungen von p, q, p', q' bilden hierbei ein Parallelogramm, in dessen eine Diagonale die Richtungen der Resultanten r und r' fallen. Ist nun noch $p=q$, also auch $=p'=q'$, so halbirt jene diagonale Richtung die Winkel von q mit p und von q' mit p' (§. 9. *c.*),

und das Parallelogramm wird ein Rhombus, welches folgenden Satz giebt:

2) Sind A, B, C, D (Fig. 3.) die vier auf einander folgenden Ecken eines Rhombus, so halten sich vier einander gleiche nach AD, AB, CB, CD gerichtete Kräfte das Gleichgewicht.

§. 16.

Um die Ergebnisse des vorigen §. einfacher ausdrücken und damit bequemer benutzen zu können, nenne man zwei einander gleiche nach parallelen, aber entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräfte ein Kräftepaar oder schlechthin ein Paar. Der gegenseitige Abstand der beiden Richtungen, oder das von irgend einem Punkte der einen Richtung auf die andere gefällte Perpendikel, heisse die Breite des Paares. Zwei Paare nenne man einander gleich, wenn die zwei Kräfte und die Breite des einen Paares den zwei Kräften und der Breite des andern gleich sind.

Denkt man sich auf der Ebene des Paares zwischen den beiden Kräften stehend, und erscheint dann die eine Kraft, nach welcher man das Auge gewendet hat, von der Rechten nach der Linken, (oder von der Linken nach der Rechten) gerichtet, so wird nach einer halben Drehung des Auges um eine auf der Ebene normale Axe auch die andere Kraft in dieser Richtung erscheinen. Man sage alsdann: das Kräftepaar habe einen Sinn von der Rechten nach der Linken (oder von der Linken nach der Rechten). Auch kann man den einen Sinn, etwa den von rechts nach links, den positiven und den andern den negativen Sinn nennen. Hiernach verstehe man auch den Ausdruck: zwei Paare in einer Ebene, — oder auch in zwei par-

allelen Ebenen, — haben einerlei, oder sie haben entgegengesetzten Sinn. — Der so erklärte Sinn eines Paares ist übrigens zugleich mit demjenigen einerlei, nach welchem jede der beiden Kräfte den Körper, worauf sie wirken, zu drehen strebt, wenn dieser an einer auf der Ebene der Kräfte normalen und zwischen ihnen hindurch gehenden Axe befestigt ist.

§. 17.

Von den vier einander gleichen Kräften in dem 2. Satze des §. 15. bilden demnach die nach AD und CB (Fig. 3.) gerichteten ein Paar, und die nach AB und CD gerichteten ein zweites von entgegengesetztem Sinne. Beide Paare aber sind einander gleich, da die vier Kräfte es sind, und zwei einander gegenüberliegende Seiten eines Rhombus eben so weit von einander entfernt sind, als die beiden andern Seiten. Da nun auch umgekehrt die Richtungen der vier Kräfte zweier einander gleichen Paare in einer Ebene, den einzigen Fall ausgenommen, wenn sämmtliche vier Richtungen einander parallel sind, einen Rhombus bilden, so können wir mit einstweiliger Beseitigung dieses Falles, den obigen Satz also ausdrücken:

Zwei Paare in einer Ebene, die einander gleich und von entgegengesetztem Sinne sind, halten einander das Gleichgewicht; — folglich auch nach §. 6., wenn man die Richtungen der Kräfte des einen Paares in die entgegengesetzten verwandelt:

Zwei Paare in einer Ebene, die einander gleich und von einerlei Sinne sind, haben gleiche Wirkung; — oder was dasselbe aussagt:

Ein Paar kann in seiner Ebene, ohne Aenderung seiner Wirkung, wohin man will, verlegt werden.

Was noch den hierbei beseitigten Fall anlangt, wenn die Kräfte der zwei einander gleichen Paare einander parallele Richtungen haben, so denke man sich noch ein drittes Paar hinzu, das mit jenen zweien in einer Ebene liegt, jedem derselben gleich ist, mit ihnen einerlei Sinn hat, und dessen Kräfte die Kräfte der erstern unter einem beliebigen Winkel schneiden. Vermöge des vorhin Erwiesenen ist nun dieses dritte Paar mit jedem der beiden erstern gleichwirkend; mithin sind auch die beiden erstern selbst von gleicher Wirkung, und der aufgestellte Satz gilt daher ohne Beschränkung.

§. 18.

Aus dem 1. Satze in §. 15. folgern wir:

Zwischen drei Kräften (p, p', q) in einer Ebene, von denen zwei (p, p') ein Paar bilden, kann kein Gleichgewicht bestehen. Wohl aber kann dieses durch Hinzufügung einer vierten Kraft (q') hergestellt werden, welche mit derjenigen (q) der drei Kräfte, die nicht zum Paare gehört, ein zweites in derselben Ebene gelegenes Paar, mit einem dem erstern entgegengesetzten Sinne, ausmacht; oder mit Berücksichtigung von §. 6.:

Sind in einer Ebene ein Paar und eine einzelne Kraft gegeben, so lässt sich letztere durch eine noch andere Kraft in der Ebene zu einem Paare ergänzen, welches mit dem gegebenen Paare einerlei Wirkung hat. Dieses zweite Paar aber muss mit dem gegebenen, wenn es ihm gleichwirkend seyn soll, einerlei Sinn haben.

Dass, wie hier hinzugesetzt wurde, zwei sich das Gleichgewicht haltende Paare von entgegengesetztem, und folglich zwei gleichwirkende von einerlei, Sinne seyn müssen, erhellet leicht mittelst des VII. Grund-

satzes in §. 10. Ist nämlich $ABCD$ (Fig. 4.) das von den zwei Paaren p, p' und q, q' gebildete Parallelogramm, und AB die Richtung von p, so ist CD die Richtung von p'; und die zwei Paare sind von einerlei oder entgegengesetztem Sinne, nachdem DA oder AD die Richtung von einer der beiden Kräfte des andern Paares, etwa von q, ist. Sollen nun die Paare im Gleichgewichte seyn, und wäre q nach DA oder AE gerichtet, wo E einen Punkt in der Verlängerung von DA über A bezeichnet, so würde nach jenem Grundsatze die durch A gehende Resultante von p und q innerhalb des Winkels BAE liegen, könnte also nicht dem innerhalb des Winkels BAD fallenden Durchschnitte C von p' und q' begegnen, wie doch zum Gleichgewicht erforderlich ist (§. 15.). Diese Begegnung wird aber möglich, sobald AD die Richtung von q ist, und mithin die Resultante von p und q innerhalb des Winkels BAD fällt.

Noch ist zu bemerken, dass zufolge des 1. Satzes in §. 15., von welchem der obige nur ein anderer Ausdruck ist, die gegebene einzelne Kraft q die Kräfte p, p' des gegebenen Paares jedenfalls schneiden sollte. Statt dessen ist hier bloss gesetzt worden, dass q mit p und p' in einer Ebene liege, indem der Fall, wenn q mit p und p' parallel ist, durch Verlegung des Paares p, p' in seiner Ebene, so dass es eine gegen q geneigte Lage erhält, auf den in §. 15. vorausgesetzten Fall zurückgeführt wird.

Zusatz. Dass mit zwei Kräften p, p', welche ein Paar ausmachen, eine dritte in der Ebene des Paares enthaltene Kraft q nicht im Gleichgewichte seyn und folglich auch nicht gleiche Wirkung haben kann, dies erhellet schon daraus, dass jede in der Ebene von p, p'

enthaltene mit der Richtung von q parallele Gerade gegen p und p' vollkommen dieselbe Lage, wie q, hat, und dass daher eine der q gleiche, nach irgend einer dieser Richtungen wirkende Kraft mit p und p' ebenfalls im Gleichgewichte seyn müsste, wenn q es wäre. Eine solche Kraft müsste daher mit q selbst gleiche Wirkung haben, welches nicht möglich ist (§. 14.).

Auf eben die Weise zeigt sich, dass auch keine nicht in der Ebene eines Paares p, p' wirkende und mit dessen Kräften nicht parallele Kraft q mit ihm im Gleichgewichte seyn kann. Denn jede mit q parallele und in der durch q mit p und p' parallel gelegten Ebene enthaltene Richtung hat gegen p und p' vollkommen dieselbe Lage, welche q hat.

Ist endlich q mit p und p' parallel, so kann man immer noch eine Richtung angeben, die gegen p' und p ganz dieselbe Lage hat, welche q gegen p und p' hat; und *es ist* daher *in jedem Falle das Gleichgewicht oder die gleiche Wirkung einer einzigen Kraft mit den Kräften eines Paares unmöglich.*

§. 19.

Aus dem Satze von der Verlegung eines Paares (§. 17.) lassen sich mehrere für das Folgende sehr wichtige Schlüsse ziehen.

a. Indem wir Kräfte ihrer Intensität und Richtung nach durch gerade Linien darstellen (§. 12.), seyen AB, CD und EF, GH (Fig. 5.) zwei Paare in einer Ebene, die einerlei Sinn haben, und deren Kräfte sämmtlich einander gleich sind. Auf der Seite von CD, welche derjenigen, auf welcher AB liegt, entgegengesetzt ist, ziehe man KL gleich und parallel mit CD und in demselben Abstande von CD, welchen

GH von *FE* hat. Alsdann ist das Paar *EF*, *GH* gleichwirkend mit dem Paare *DC*, *KL*, und folglich die Paare *AB*, *CD* und *EF*, *GH* zusammen gleichwirkend mit *AB*, *CD*, *DC*, *KL*, d. i. mit dem Paare *AB*, *KL*. Statt zweier Paare in einer Ebene, die einerlei Sinn und gleiche Kräfte haben, kann man daher ein einziges Paar mit demselben Sinne und denselben Kräften setzen, dessen Breite der Summe der Breiten der erstern Paare gleich ist.

Es erhellet ohne weitere Erörterung, dass sich auf gleiche Weise drei und mehrere in einer Ebene gelegene Paare von einerlei Sinne und von insgesammt einander gleichen Kräften zu einem Paare verbinden lassen, dessen Kräfte und Sinn dieselben, wie bei den zu verbindenden Paaren sind, und dessen Breite der Summe der Breiten dieser Paare gleich ist.

Sind von den zu verbindenden Paaren auch die Breiten einander gleich, so haben wir folgenden Satz:

Ein Paar, dessen Kräfte denen eines andern Paares gleich sind, und dessen Breite irgend ein Vielfaches der Breite des andern ist, hat gleiche Wirkung mit eben so viel in seiner Ebene und mit ihm nach einerlei Sinn wirkenden Paaren, deren jedes dem andern gleich ist.

b. Auf ähnliche Art, wie Paare mit gleichen Kräften, lassen sich auch Paare, die einander gleiche Breiten haben, zusammensetzen. Seyen *AB*, *CD* und *EF*, *GH* (Fig. 6.) zwei dergleichen, die in einer Ebene liegen und einerlei Sinn haben. Man mache in den Richtungen von *AB* und *CD* resp. *BK* und *DL* den Kräften des andern Paares *EF* und *GH* gleich, so sind wegen der noch hinzukommenden gleichen Breiten die Paare *BK*, *DL* und *EF*, *GH* gleichwirkend, also die Paare *AB*, *CD* und *EF*, *GH* zusammen gleich-

wirkend mit AB, BK, CD, DL, d. i. mit AK, CL (§. 14. *d.*), also mit einem Paare, welches denselben Sinn und dieselbe Breite, wie die beiden erstern Paare, hat, und dessen Kräfte der Summe der Kräfte der erstern Paare gleich sind.

Eben so sind drei und mehrere Paare, die in einer Ebene liegen und einerlei Sinn und gleiche Breiten haben, gleichwirkend mit einem einzigen Paare von demselben Sinne und derselben Breite, dessen Kräfte die Summen der Kräfte der erstern Paare sind.

Wenn daher von zwei Paaren, die gleiche Breiten haben, die Kräfte des einen beliebige Vielfache der Kräfte des andern sind, so ist das erstere gleichwirkend mit eben so viel dem andern gleichen Paaren, die in der Ebene des erstern liegen und mit ihm einerlei Sinn haben.

§. 20.

Lehrsatz. Sind A, B, C, D (Fig. 7.) die vier auf einander folgenden Ecken eines Parallelogramms, so haben die durch AB, CD und BC, DA dargestellten Paare gleiche Wirkung.

Beweis. In dem besondern Falle, wenn das Parallelogramm ein Rhombus ist, folgt der Beweis schon aus §. 15. 2.

Seyen ferner die anliegenden Seiten AB, AD überhaupt in einem rationalen Verhältnisse zu einander, und m, n die ganzen Zahlen, durch welche dieses Verhältniss ausgedrückt werden kann. Man nehme in AB von A nach B zu einen Abschnitt $AM =$ dem $m$ten Theile von AB, und in AD von A nach D zu einen Abschnitt $AN =$ dem $n$ten Theile von AD, so ist $AM = AN$, und wenn man durch M, N Paralle-

len mit *AD*, *AB* zieht, welche *DC*, *BC* in *K*, *L*, sich selbst aber in *O* schneiden, so ist *AMON* ein Rhombus. Hiernach ist die Breite des Paares *AB*, *CD* das *n*fache der Breite des Paares *AB*, *LN*, und die Kräfte des letztern sind die *m*fachen von *AM*, *ON*. Nach §. 19. *a*. ist folglich das Paar *AB*, *CD* gleichwirkend mit dem *n*fachen des Paares *AB*, *LN*, d. i. mit *n* Paaren, deren jedes dem *AB*, *LN* gleich ist und mit ihm einerlei Sinn hat. Das Paar *AB*, *LN* aber ist gleichwirkend mit dem *m*fachen des Paares *AM*, *ON* (§. 19. *b*.); folglich *AB*, *CD* gleichwirkend mit dem *n*.*m*fachen von *AM*, *ON*. Auf gleiche Art zeigt sich durch Vermittelung des Paares *MK*, *DA*, dass das Paar *BC*, *DA* mit dem *m*.*n*fachen des Paares *MO*, *NA* gleiche Wirkung hat. Da aber *AMON* ein Rhombus ist, so sind die Paare *AM*, *ON* und *MO*, *NA* selbst von gleicher Wirkung, folglich auch die *m*.*n*fachen derselben, d. i. die Paare *AB*, *CD* und *BC*, *DA*.

Ist endlich das Verhältniss *AB*:*AD* (Fig. 8.) irrational, und wäre nicht *AB*, *CD* gleichwirkend mit *BC*, *DA*, so müsste sich *AB* durch eine andere Kraft zu einem Paare ergänzen lassen, das mit *BC*, *DA* gleiche Wirkung hätte (§. 18.). Diese andere Kraft würde daher durch eine zwischen den Parallelen *BC*, *AD* enthaltene und mit *CD* parallele Linie *EF* dargestellt werden können, die, weil das Paar *AB*, *EF*, eben so wie *AB*, *CD*, mit *BC*, *DA* einerlei Sinn haben muss (ebend.), mit *CD* auf einerlei Seite von *AB* liegen müsste. Sey nun *G* ein zwischen *C* und *E* so gelegener Punkt, dass *BG* zu *AB* in einem rationalen Verhältnisse steht. Man ziehe durch *G* eine Parallele mit *CD*, welche *AD* in *H* schneide, so sind

nach dem Vorigen die Paare *AB*, *GH* und *BG*, *HA* mit einander gleichwirkend, oder, was dasselbe ist, die Paare *AB*, *EF* und *FE*, *GH* zusammen von gleicher Wirkung mit den Paaren *BC*, *DA* und *CG*, *HD* in Vereinigung. Nach der Voraussetzung aber soll *AB*, *EF* mit *BC*, *DA* gleichwirkend seyn, mithin müsste es auch *FE*, *GH* mit *CG*, *HD* seyn, welches nicht möglich ist, da letztere zwei Paare von entgegengesetztem Sinne sind.

§. 21.

Lehrsatz. Zwei Paare in einer Ebene, die einerlei Sinn haben, und deren Kräfte sich umgekehrt wie ihre Breiten verhalten, sind von gleicher Wirkung.

Weil ein Paar in seiner Ebene beliebig verlegt werden kann, so lässt sich immer annehmen, dass die Kräfte des einen der beiden Paare die des andern schneiden, und dass folglich die Richtungen der vier Kräfte ein Parallelogramm *ABCD* (Fig. 8.) bilden. Seyen demnach *AB*, *CD* die Richtungen der Kräfte des einen Paares, und, weil beide Paare einerlei Sinn haben sollen, *BC*, *DA* die Richtungen der Kräfte des andern. Aus der Geometrie ist aber bekannt, dass sich zwei an einander stossende Seiten *AB*, *BC* eines Parallelogramms umgekehrt wie ihre Abstände von den gegenüberliegenden Seiten, also umgekehrt wie die Breiten der Paare *AB*, *CD* und *BC*, *DA*, verhalten. Da nun in demselben Verhältnisse die Kräfte der beiden Paare stehen sollen, und da wegen der willkührlichen Annahme der Länge, durch welche die Krafteinheit ausgedrückt wird, die Linien *AB*, *CD* die Kräfte des einen Paares selbst vorstellen können,

so sind alsdann die Kräfte des andern durch BC, DA auszudrücken. Dass aber die Kräfte AB, CD mit den Kräften BC, DA gleiche Wirkung haben, ist in §. 20. dargethan worden.

Zusatz. Wenn in den zwei in einer Ebene liegenden Parallelogrammen AC und GI (Fig. 9.) eine Seite AB des einen und eine Seite GH des andern sich umgekehrt wie ihre Abstände von den gegenüberliegenden Seiten verhalten, so sind nach dem jetzt Erwiesenen die Paare AB, CD und GH, IK von gleicher Wirkung. Unter der gemachten Voraussetzung sind aber die Parallelogramme AC und GI bekanntlich von gleichem Inhalte, und umgekehrt, und wir können daher den jetzigen Satz sehr einfach auch folgendergestalt in Worte fassen:

Sind zwei Paare in einer Ebene von einerlei Sinne, und haben die durch sie bestimmten Parallelogramme gleichen Inhalt, so sind die Paare gleichwirkend.

§. 22.

Folgerungen. Sind AB, CD und EF, GH (Fig. 10.) zwei Paare in einer Ebene, die einerlei Sinn haben, und construirt man in ihrer Ebene ein Parallelogramm $IKLM$, dessen Fläche der Summe der Flächen der Parallelogramme AC und EG gleich ist, so wird das Paar IK, LM, von dem ich annehme, dass es mit erstern Paaren einerlei Sinn hat, mit ihnen auch gleiche Wirkung haben. Denn theilt man das Parallelogramm IL durch eine mit IK gezogene Parallele ON in zwei Parallelogramme IN und OL, so dass $IN = AC$ und folglich $OL = EG$ ist, so sind (§. 21.) die Paare AB, CD und EF, GH resp. gleichwirkend mit den

Paaren *IK*, *NO* und *ON*, *LM*, d. i. mit dem Paare *IK*, *LM*.

Man sieht nun leicht, dass auf gleiche Weise auch drei und mehrere Paare in einer Ebene, die von einerlei Sinne sind, sich zu einem Paare vereinigen lassen. Man verzeichne nämlich in ihrer Ebene ein Parallelogramm, welches der Summe der Parallelogramme, die von den zusammenzusetzenden Paaren gebildet werden, gleich ist, und es wird das durch dieses Parallelogramm bestimmte Paar, so genommen, dass es mit den gegebenen Paaren einerlei Sinn hat, das resultirende seyn.

Sollen zwei Paare *IK*, *LM* und *BA*, *DC* von entgegengesetztem Sinne verbunden werden, so construire man ein Parallelogramm *EFGH*, welches dem Unterschiede der Parallelogramme *IL* und *AC* gleich ist, und das durch *EG* so bestimmte Paar *EF*, *GH*, dass sein Sinn mit dem Sinne desjenigen *IK*, *LM* der zwei gegebenen Paare übereinkommt, dessen Parallelogramm das grössere ist, wird gleiche Wirkung mit den zwei gegebenen haben. Denn schneidet man von dem grössern Parallelogramme *IL* durch eine Parallele *ON* mit *IK* ein Parallelogramm *IN* ab, welches dem kleineren *AC* gleich ist, so ist der Rest $OL = EG$ und *BA*, *DC* gleichwirkend mit *KI*, *ON*; folglich *IK*, *LM* und *BA*, *DC* zusammen gleichwirkend mit *ON*, *LM*, d. i. mit *EF*, *GH*.

Haben zwei Paare, die von entgegengesetztem Sinne sind, einander gleiche Parallelogramme, ist also der Unterschied der letztern null, so sind die Paare im Gleichgewichte, wie sogleich aus §. 21. in Verbindung mit §. 6. folgt. Aber auch umgekehrt können wir behaupten: Halten sich zwei Paare in einer Ebene

das Gleichgewicht, so sind sie von entgegengesetztem Sinne (§. 18.) und haben einander gleiche Parallelogramme. Denn fände zwischen letztern ein Unterschied statt, so wären die Paare gleichwirkend mit einem einzigen Paare, dessen Parallelogramm diesem Unterschiede gleich wäre, und würden mithin nicht im Gleichgewichte seyn. Sind folglich, — so können wir nach §. 6. noch schliessen, — zwei Paare in einer Ebene gleichwirkend mit einander, so sind sie von einerlei Sinne und haben einander gleiche Parallelogramme.

Wenn endlich, um noch den allgemeinsten Fall zu berücksichtigen, drei oder mehrere Paare in einer Ebene, die nicht von einerlei Sinne sind, zusammengesetzt werden sollen, so sondere man sie in zwei Gruppen, deren jede aus Paaren von einerlei Sinne besteht, und bestimme von jeder dieser Gruppen das resultirende Paar. Die Zusammensetzung dieser zwei Paare, welche von entgegengesetztem Sinne sind, giebt alsdann das resultirende Paar des ganzen Systems. Falls aber die zwei Paare sich das Gleichgewicht halten, so ist auch das ganze System im Gleichgewichte.

Eben so wenig, als ein einziges Paar, kann daher auch *kein* System von Paaren in einer Ebene mit einer einzigen Kraft gleiche Wirkung haben.

§. 23.

Das Product aus der einen der beiden Kräfte eines Paares in die Breite desselben, — dieses Product positiv oder negativ genommen, nachdem das Paar einen positiven oder negativen Sinn hat (§. 16.), — wird das Moment des Paares genannt. Das Moment ist daher nichts anderes, als der arithmetisch ausgedrückte Flächeninhalt des Parallelogramms, welches

von den geometrisch dargestellten Kräften des Paares gebildet wird, und wir können nach dem, was in den zwei vorigen §§. von diesen Parallelogrammen wiesen worden, sogleich folgende Sätze aufstellen:

Zwei Paare in einer Ebene, welche einander (auch hinsichtlich der Zeichen) gleiche Momente haben, sind gleichwirkend; und umgekehrt: *Sind zwei Paare in einer Ebene von gleicher Wirkung, so haben sie gleiche Momente.*

Zwei oder mehrere Paare in einer Ebene haben gleiche Wirkung mit einem einzigen Paare in derselben Ebene, dessen Moment der (algebraischen) Summe der Momente ersterer Paare gleich ist. Ist aber diese Summe null, so halten sich die Paare das Gleichgewicht; woraus wir noch, in Verbindung mit dem vorigen Satze, umgekehrt schliessen:

Sind zwei oder mehrere Paare in einer Ebene gleichwirkend mit einem Paare in derselben Ebene, so ist die Summe der Momente der erstern gleich dem Momente des letztern. Sind aber die Paare im Gleichgewichte, so ist die Summe ihrer Momente null.

Die Resultate, zu denen die Theorie in einer Ebene wirkender Kräftepaare führt, sind hiernach ganz denen analog, welche hinsichtlich einfacher in einer Geraden wirkender Kräfte gelten. Eben so, wie eine einfache Kraft in der Geraden, worin sie wirkt, nach Belieben verlegt werden kann, so bleibt auch die Wirkung eines Paares unverändert, wenn nur seine Ebene und sein Moment sich nicht ändern; und eben so, wie die Summe der Intensitäten von Kräften, die in einer Geraden wirken, der Intensität der Resultante gleich ist, und letztere in derselben Geraden wirkt, so ist auch die Summe der Momente von Paaren in einer Ebene dem

Momente des resultirenden Paares gleich, und die Ebene desselben einerlei mit der Ebene der erstern. Der Geraden, in welcher eine einfache Kraft wirkt, ihrer Richtung in dieser Geraden und ihrer Intensität entspricht demnach bei einem Paare die Ebene, worin es enthalten ist, sein Sinn in dieser Ebene und sein Moment. Das Paar ist folglich ganz dasselbe für die Ebene, was die einfache Kraft für die gerade Linie ist. — Etwas Analoges für den Raum von drei Dimensionen existirt nicht.

Gleichgewicht zwischen drei Kräften in einer Ebene.

§. 24.

So speciell auch der Gegenstand scheint, dessen Theorie wir so eben entwickelt haben, indem nur solche Systeme von Kräften betrachtet wurden, bei denen zu jeder Kraft eine zweite ihr gleiche, parallele und entgegengesetzte gehörte, so ist doch die Theorie dieser Kräftepaare der Schlüssel zu allen fernern Untersuchungen über das Gleichgewicht.

Alle statischen Untersuchungen können in ihren Elementen auf Zusammensetzung von Kräften, die sich entweder parallel sind, oder sich in einem Punkte begegnen, und auf die umgekehrte Operation der Zerlegung der Kräfte zurückgebracht werden. Es wird daher schon im Voraus der Nutzen der Theorie der Paare erhellen, wenn wir zeigen, wie mit Hülfe derselben sich ganz einfach die Regeln ergeben, nach denen von zwei Kräften, die entweder mit einander parallel sind, oder sich schneiden, die Resultante gefunden werden kann.

Seyen AB, CD und KL, MN zwei Paare in einer Ebene, die einander das Gleichgewicht halten

und daher von entgegengesetztem Sinne sind. Man verlege sie, was unbeschadet des Gleichgewichts immer geschehen kann (§. 17.), in der Ebene so, dass die Richtung einer Kraft *CD* des einen Paares mit der Richtung einer Kraft *KL* des andern Paares in eine und dieselbe Linie fällt, und dass diese zwei Richtungen einerlei, nicht einander entgegengesetzt, sind (Fig. 11.), — obwohl auch die letztere Annahme zu demselben Resultate, wie die erstere, führen würde. — Somit sind die anfänglichen vier Kräfte auf drei reducirt: *AB*, *MN* und $KL + CD$, von welchen die dritte der Summe der zwei ersten gleich ist, die zwei ersten aber, wie man leicht sieht, auf verschiedenen Seiten der dritten liegen und eine der dritten entgegengesetzte Richtung haben. Nächstdem aber verhalten sich *AB* und *MN* umgekehrt wie die Breiten der beiden Paare (§. 21.), d. i. die beiden ersten Kräfte umgekehrt wie ihre Abstände von der dritten.

Wenn daher von drei parallelen Kräften in einer Ebene 1) die mittlere eine den beiden äussern entgegengesetzte Richtung hat und 2) der Summe der äussern gleich ist, und wenn sich 3) die äussern umgekehrt wie ihre Abstände von der mittlern verhalten, so herrscht Gleichgewicht. Denn man wird immer nach Anleitung des Vorigen ein solches System in zwei einander das Gleichgewicht haltende Paare zerlegen können.

§. 25.

Die eben gefundenen drei Bedingungen für das Gleichgewicht dreier paralleler Kräfte in einer Ebene lassen sich noch etwas kürzer und damit für die Anwendung brauchbarer darstellen.

Zu dem Ende werde hier, so wie auch immer in

dem Folgenden, bei Bezeichnung eines Abschnitts einer Geraden durch Nebeneinanderstellung der zwei an die Enden des Abschnitts gesetzten Buchstaben die durch diese Stellung zugleich angedeutete Richtung berücksichtigt, so dass je zwei Abschnitte einer und derselben Geraden mit einerlei oder entgegengesetzten Zeichen genommen werden, nachdem die durch die Bezeichnungen der Abschnitte ausgedrückten Richtungen einerlei oder einander entgegengesetzt sind; dass daher immer $AB + BA = 0$, und dass, wenn A, B, C drei in einer Geraden befindliche Punkte sind, mag C zwischen A und B, oder ausserhalb auf der Seite von A, oder der Seite von B liegen, man immer $AB + BC + CA = 0$, $AB + BC = AB - CB = BC - BA = AC$, u. s. w. hat.

Dieses voraus bemerkt, nenne man die beiden äussern Kräfte P und Q, die mittlere R, welche man, weil sie nach der ersten Bedingung die entgegengesetzte Richtung von P und Q hat, als negativ betrachte, wenn man P, Q positiv nimmt. Alsdann ist zufolge der zweiten Bedingung: $P + Q = -R$, oder $P + Q + R = 0$. Man ziehe ferner in der Ebene der Kräfte eine ihnen nicht parallele Gerade, welche von den Richtungen von P, Q, R resp. in F, G, H geschnitten werde, so haben die Abschnitte HF und GH einerlei Zeichen und sind den Abständen der P und Q von R proportional. Es verhält sich daher zufolge der dritten Bedingung:

$$P : Q = GH : HF, \text{ also auch}$$

$$P : (P + Q = -R) = GH : (GH + HF = GF), \text{ also}$$

$$P : R = GH : FG,$$

und in Verbindung mit der ersten Proportion:

$$P : Q : R = GH : HF : FG,$$

so dass jede der drei Kräfte dem gegenseitigen Abstande der beiden andern proportional ist.

Da hierin jede Kraft und ihr Durchschnitt mit der geraden Linie auf gleiche Art vorkommen, nämlich P und F eben so wie Q und G, eben so wie R und H, so ist es gleichviel, welche der drei Kräfte wir als die mittlere ansehen, und wir können unsern Satz ganz einfach so ausdrücken:

Zwischen drei parallelen Kräften P, Q, R in einer Ebene herrscht Gleichgewicht, wenn sie eine gerade Linie in F, G, H so schneiden, dass $P:Q:R = GH:HF:FG$.

In der That folgt daraus $P+Q+R=0$, weil immer $GH+HF+FG=0$, in welcher Ordnung auch F, G, H in der Geraden auf einander folgen mögen. Es muss daher eine der drei Kräfte nach der entgegengesetzten Richtung der beiden andern wirken, und, absolut genommen, der Summe der andern gleich seyn. Sey, wie vorhin, R diese eine Kraft, so haben, vermöge der Proportion, GH und HF einerlei Richtung, FG die entgegengesetzte. Es muss folglich H zwischen F und G, also R zwischen P und Q liegen. — Eben so würde man P zwischen Q und R liegend und der Summe von Q und R, absolut genommen, gleich gefunden haben, wenn man P nach der entgegengesetzten Richtung von Q und R hätte wirken lassen.

§. 26.

Zusätze. *a.* Eine der Kraft R gleiche und gerade entgegengesetzte Kraft $R' = -R = P+Q$ ist die Resultante von P und Q. Sollen daher zwei gegebene parallele Kräfte P und Q in eine zusammenge-

setzt werden, so ziehe man in ihrer Ebene eine gegen ihre Richtungen beliebig geneigte Gerade und nenne F, G die Durchschnitte derselben mit P, Q. Man theile nun die Gerade FG in H so, dass $GH:HF=P:Q$. Nach der Regel der Zeichen fällt dieser Punkt H entweder zwischen F und G, oder ausserhalb und zwar auf die Seite von F, (wo absolut $GH>HF$,) oder auf die Seite von G, (wo absolut $GH<HF$,) je nachdem P und Q einerlei Zeichen, d. i. einerlei Richtungen, oder entgegengesetzte haben und nachdem alsdann P absolut grösser oder kleiner als Q ist. Eine durch H mit P und Q parallel gelegte Kraft $R'=P+Q$, die daher im ersten jener drei Fälle die gemeinschaftliche Richtung von P und Q hat und der Summe von P und Q gleich ist, in den beiden andern nach der Richtung der jedesmal grössern, P oder Q, wirkt und der Differenz von P und Q gleich ist, wird die verlangte Resultante seyn.

b. Nur in dem Falle kann der Punkt H nicht angegeben, also auch die Resultante von P und Q nicht construirt werden, wenn $P=-Q$ ist, d. i. wenn die zwei zusammenzusetzenden Kräfte ein Paar ausmachen (vergl. §. 18. Zus.). Denn alsdann wird $R'=0$, und $GH:HF=1:-1$, also $GH:FH=1:1$, welcher Proportion, da F und G nicht zusammenfallen sollen, streng genommen, nicht Genüge geschehen kann, der man aber um so näher kommt, je weiter man H in der Linie FG nach der einen oder andern Seite hinausrückt. Denn hierdurch nähern sich die Verhältnisse $GH:FH=P:-Q$ immer mehr der Einheit, und R' wird gegen P und Q immer kleiner. In der Sprache der Analysis ist daher die Resultante eines Paares eine Kraft $=0$ in unendlicher Entfernung.

c. Soll umgekehrt eine gegebene Kraft $R' = -R$ in zwei andere mit ihr parallele und in derselben Ebene enthaltene Kräfte P und Q zerlegt werden, so schneide eine gerade Linie die Richtung von R' und die ebenfalls als gegeben vorauszusetzenden Richtungslinien von P und Q in den Punkten H, F, G, und man hat nach dem Vorigen die Gleichungen:

$$P = \frac{GH}{FG} \cdot R = \frac{HG}{FG} \cdot R', \quad Q = \frac{HF}{FG} \cdot R = \frac{FH}{FG} \cdot R',$$

wodurch mit gehöriger Rücksicht auf die Vorzeichen der Abschnitte FG u. s. w. die Intensitäten von P und Q und ihre Richtungen in Bezug auf R' vollkommen bestimmt werden.

§. 27.

Mittelst der Theorie der Kräftepaare wollen wir jetzt noch die Resultante zweier sich schneidenden Kräfte zu bestimmen suchen. Seyen diese Kräfte durch FA, FB (Fig. 12.) dargestellt. Die ihnen das Gleichgewicht haltende Kraft, deren Richtung ebenfalls durch F geht und in den Scheitelwinkel von AFB fällt (Grunds. V. u. VII.), sey FC.

Man ergänze den Winkel AFB zu einem Parallelogramm $AFBD$, so ist das Paar FA, DB gleichwirkend mit dem Paare AD, BF. (§. 20.). Folglich sind auch die Kräfte FA, FB gleichwirkend mit den Kräften AD, BD, folglich die durch F gehende Resultante der beiden erstern Kräfte gleichwirkend mit der durch D gehenden Resultante der beiden letztern; mithin ist FD die gemeinschaftliche Richtung der beiden Resultanten. Da nun wegen des Gleichgewichts zwischen FA, FB, FC, durch CF die Resultante von FA, FB dargestellt wird, so müssen FD und FC

in dieselbe Gerade fallen. Eben so wird bewiesen, dass, wenn man den Winkel AFC zu einem Parallelogramm $AFCE$ vollendet, die FB in die Verlängerung von EF fallen muss.

Hiernach ist AD mit FB sowohl, als auch mit EF, und AE mit FC sowohl, als mit DF, parallel. Folglich ist auch $ADFE$ ein Parallelogramm, mithin $FD = EA = CF =$ der Resultante von FA und FB, und es wird daher diese Resultante durch FD nicht allein der Richtung, sondern auch der Grösse nach ausgedrückt. — Dies giebt den berühmten Satz vom Parallelogramme der Kräfte:

Schneiden sich die Richtungen zweier Kräfte, so ist, wenn man vom Schneidepunkte aus auf die Richtungen den Kräften proportionale Linien trägt und diese zwei Linien zu einem Parallelogramm ergänzt, die durch den Schneidepunkt der Kräfte gehende Diagonale des Parallelogramms ihrer Richtung und Grösse nach die Resultante der beiden Kräfte.

§. 28.

Zusätze. *a.* Soll eine gegebene Kraft FD in zwei andere durch F gehende und nach gegebenen Richtungen FG, FH wirkende Kräfte zerlegt werden, so ziehe man durch D mit FH, FG, Parallelen, welche FG, FH resp. in A, B schneiden, und FA, FB werden die gesuchten Kräfte seyn.

b. Die Kräfte FA, FB, FC sind resp. den Seiten FA, AD, DF des Dreiecks DFA gleich, und kommen auch ihren Richtungen nach mit denselben überein. Sind daher drei Kräfte bloss ihrer Intensität nach gegeben, und will man sie dergestalt auf einen Punkt F wirken lassen, dass sie einander das Gleichgewicht

halten, so construire man aus ihnen ein Dreieck DFA, und es werden die durch F' mit den Seiten des Dreiecks gleich und parallel gelegten Kräfte $F'A'$, $F'B'$, $F'C'$ mit einander im Gleichgewichte seyn. — Kann aus den drei Kräften kein Dreieck construirt werden, ist also eine Kraft grösser, als die Summe der beiden andern, so ist auch zwischen ihnen, wenn sie auf einen Punkt wirken, auf keine Weise Gleichgewicht möglich.

c. In dem aus den drei Kräften gebildeten Dreiecke DFA sind die Winkel ADF, DFA, FAD resp. den Nebenwinkeln gleich von denen, welche die auf F oder F' wirkenden Kräfte mit einander machen, d. i. den Nebenwinkeln von BFC, CFA, AFB. Alle zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks aus der Trigonometrie bekannten Relationen finden daher auch beim Gleichgewichte dreier auf einen Punkt wirkender Kräfte zwischen ihnen selbst und den Supplementen der von ihnen mit einander gebildeten Winkel statt. Es verhält sich daher beim Gleichgewichte:

$$FA : FB : FC = \sin BFC : \sin CFA : \sin AFB,$$

d. h. jede Kraft ist dem Sinus des von den zwei andern Kräften gebildeten Winkels proportional, — auf analoge Art, wie bei drei parallelen Kräften im Gleichgewichte jede Kraft mit der gegenseitigen Entfernung der beiden andern im Verhältnisse war. Diese Aehnlichkeit der Gesetze für beiderlei Arten von Gleichgewicht rührt, wie man leicht wahrnimmt, daher, dass parallele Kräfte auch als solche angesehen werden können, die sich in unendlicher Entfernung unter unendlich kleinen Winkeln schneiden, und dass die Sinus dieser Winkel den gegenseitigen Abständen der Parallelen proportional zu achten sind. Man hätte daher das Gleichgewicht zwischen parallelen Kräften auch unmit-

telbar aus dem Gleichgewichte zwischen Kräften, die sich in einem Punkte treffen, als den Grenzfall dieses letztern, ableiten können.

Gleichgewicht zwischen vier Kräften in einer Ebene.

§. 29.

Die eben erhaltenen Sätze vom Gleichgewichte zwischen drei Kräften in einer Ebene, sind, wie sich zeigen lässt, hinreichend, um die Bedingungen des Gleichgewichts für irgend ein System auf einen freien Körper wirkender Kräfte zu entwickeln. Indessen werde ich, um zu diesen allgemeinen Bedingungen zu gelangen, von jenen Sätzen keinen unmittelbaren Gebrauch machen, sondern, von der Theorie der Paare ausgehend, einen mehr analytischen Weg einschlagen, auf dem sich zuletzt jene Sätze, als die speciellsten Fälle der allgemeinen Resultate, wieder finden werden. — Mag hier nur noch eine einfache Anwendung des Parallelogramms der Kräfte auf ein System von vier Kräften in einer Ebene eine Stelle finden.

Von vier in einer Ebene wirkenden Kräften sind die Richtungen gegeben; man soll hieraus unter der Voraussetzung, dass sich die Kräfte das Gleichgewicht halten, die Verhältnisse ihrer Intensitäten finden.

Vier in einer Ebene enthaltene Gerade bestimmen im Allgemeinen drei Vierecke, bei deren einem von keiner Seite oder der Verlängerung derselben die gegenüberliegende Seite innerhalb ihrer Endpunkte geschnitten wird. Sey $ABCD$ (Fig. 13.) dieses eine der drei Vierecke, welche von den Richtungen der vier Kräfte gebildet werden.

Die Kräfte in den Linien AB, BC, CD, DA heissen resp. p, q, r, s; die Resultante von p und q, welche durch B geht, heisse t, und die durch D gehende Resultante von r und s nenne man u. Weil p, q, r, s, folglich auch t und u, einander das Gleichgewicht halten sollen, so sind t und u einander gleich und wirken in der Diagonale BD nach entgegengesetzten Richtungen. Nimmt man daher AB, nicht BA, als die Richtung von p, so muss, damit die Resultante t innerhalb des Winkels von p mit q fällt, CB die Richtung von q seyn. DB ist dann die Richtung von t, folglich BD die von u, und CD, AD die Richtungen von r, s.

Man construire nun ein Dreieck, dessen Seiten ab, bc, ac mit AB, CB, DB, als den Richtungen von p, q, t parallel sind, so verhalten sich (§. 28. b.)

$$p:q:t = ab:bc:ac;$$

und eben so ist, wenn man über ab ein zweites Dreieck beschreibt, dessen Seiten da und db mit AD und AC, als den Richtungen, welche s und die Resultante von p und s haben, parallel sind:

$$p:s = ab:da,$$

$$\text{folglich} \quad s:t = da:ac.$$

Da ferner s, t, r sich das Gleichgewicht halten, und da, ac mit den Richtungen der Kräfte s, t parallel, ihnen selbst aber erwiesenermassen proportional sind, so ist cd der Kraft r parallel und es verhält sich:

$$s:r = da:cd,$$

und somit sind die Verhältnisse zwischen den Intensitäten der Kräfte gefunden.

Bemerkt man hierbei noch, dass das Viereck $abcd$ zu dem Viereck $ABCD$ in derselben Beziehung steht,

wie letzteres zu ersterem, und dass, wenn die Richtung von p gleichlaufend mit ab, nicht mit ba ist, die Richtung von q gleichlaufend mit bc, nicht mit cb, genommen werden muss u. s. w., so kann man das erhaltene Resultat folgendergestalt ausdrücken:

Wenn von zwei ebenen Vierecken $ABCD$ und $abcd$ die Diagonalen des einen mit den ungleichnamigen Diagonalen des andern, d. i. AC mit bd und BD mit ac, und drei Seiten DA, AB, BC des einen mit den gleichnamigen Seiten da, ab, bc des andern parallel sind, so sind auch die zwei übrigen Seiten CD und cd einander parallel; und vier Kräfte, deren Intensitäten den Seiten des einen Vierecks proportional sind, und deren Richtungen in die entsprechenden Seiten des andern Vierecks fallen und dabei mit den im ersten Vierecke durch die Aufeinanderfolge der Ecken bestimmten Richtungen der Seiten übereinstimmen, halten einander das Gleichgewicht.

Drittes Kapitel.

Vom Gleichgewichte zwischen Kräften in einer Ebene überhaupt.

§. 30.

Bei Untersuchungen über das Gleichgewicht eines Systems von Kräften in einer Ebene verstehe man unter dem **Momente einer Kraft in Bezug auf einen Punkt** der Ebene das Moment des Paares, welches von der Kraft und einer ihr gleichen, parallelen und

entgegengesetzten durch den Punkt gelegten Kraft gebildet wird. Der geometrische Ausdruck des Momentes der Kraft *AB* in Bezug auf den Punkt *M* ist daher das Parallelogramm, zu welchem sich das Dreieck *MAB* ergänzen lässt, oder das Doppelte dieses Dreiecks. Der numerische Werth des Moments aber ist das Product aus der Kraft in ihren Abstand von dem Punkte, und dieses Product ist nach §. 23. und §. 16. positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Richtung der Kraft, von dem Punkte aus beobachtet, von der Rechten nach der Linken z. B. oder von der Linken nach der Rechten geht, oder, was dasselbe ist: je nachdem, wenn der Punkt unbeweglich wäre, die Ebene um ihn nach der einen oder andern Seite zu von der Kraft gedreht werden würde.

Das Moment einer und derselben Kraft ist demnach ihrem Abstande von dem Punkte, worauf sie bezogen wird, proportional, und kann nur für solche Punkte von gleicher Grösse seyn, die in einer mit der Kraft gezogenen Parallele liegen. Für zwei Punkte, die auf entgegengesetzten Seiten der Kraft sich befinden, haben die Momente entgegengesetzte Zeichen, und für einen in der Richtung der Kraft selbst gelegenen Punkt ist das Moment $=0$. Für drei Punkte endlich, die nicht in einer Geraden liegen, kann es keine Kraft geben, die in Bezug auf dieselben der Grösse und dem Zeichen nach gleiche Momente hätte.

§. 31.

Was wir in dem vorigen Kapitel das Moment eines Paares genannt haben, ist nichts anderes, als die Summe der Momente der zwei das Paar bildenden Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene

des Paares. Denn sind AB, CD (Fig. 14.) die zwei Kräfte eines Paares, und M der Punkt ihrer Ebene, auf welchen sie bezogen werden sollen, so ist, wenn man durch M eine der Kraft AB gleiche, parallele und entgegengesetzte Kraft FG legt, das Moment von AB in Bezug auf M, gleich dem Momente des Paares AB, FG, und das Moment von CD in Bezug auf M, gleich dem Momente des Paares CD, GF; folglich die Summe der Momente von AB und CD in Bezug auf M, gleich der Summe der Momente der Paare AB, FG und CD, GF, gleich dem Momente des Paares AB, CD, da die Paare AB, FG und CD, GF zusammen, gleichwirkend mit dem Paare AB, CD sind.

Ein Kräftepaar besitzt demnach die merkwürdige Eigenschaft, dass die Summe der Momente seiner Kräfte ganz unabhängig von dem Punkte ist, worauf die Momente bezogen werden. Es ist diese Summe dem Momente der einen Kraft selbst gleich, wenn man dasselbe auf einen in der Richtung der andern Kraft liegenden Punkt bezieht.

So wie übrigens diese constante Summe der Momente von den Kräften eines Paares in dem Vorigen das Moment des Paares selbst genannt wurde, so soll auch in der Folge die Summe der Momente von den Kräften eines beliebigen Systems in Bezug auf einen gewissen Punkt der Ebene, worin das System enthalten ist, das Moment des Systems in Beziehung auf diesen Punkt heissen.

§. 32.

Dieses vorausgeschickt, seien AB, CD, EF, ... (Fig. 15.) mehrere in einer Ebene nach beliebigen Rich-

tungen wirkende Kräfte. Durch einen willkührlich in der Ebene genommenen Punkt M lege man $A'B'$, $C'D'$, $E'F'$,... resp. den Kräften AB, CD, EF,... gleich, parallel und nach entgegengesetzten Richtungen. Alsdann ist das System der Kräfte AB, CD, EF,... welches der Kürze willen S genannt werde, gleichwirkend mit dem Systeme der Paare AB, $A'B'$; CD, $C'D'$; EF, $E'F'$; ..., welches W heisse, in Verbindung mit dem Systeme der durch den Punkt M gehenden Kräfte $B'A'$, $D'C'$, $F'E'$, ..., welches man V nenne, indem sich in den beiden letztern Systemen die Kräfte $A'B'$, $C'D'$,... mit $B'A'$, $D'C'$,... aufheben, und bloss die Kräfte AB, CD, ... des ersten Systems übrig bleiben. — Hinsichtlich des Gleichgewichts können nun dabei folgende vier Fälle eintreten:

1) Jedes der beiden Systeme V und W ist für sich im Gleichgewichte, mithin auch S.

2) V ist für sich im Gleichgewichte, nicht aber W. S ist dann gleichwirkend mit W, und hat daher ein Paar zur Resultante (§. 23.).

3) W ist allein im Gleichgewichte. Alsdann ist S gleichwirkend mit V, hat also zur Resultante eine einfache Kraft (§. 9. V.).

4) Weder V noch W ist im Gleichgewichte. Die einfache Kraft, welche dann V, und das Paar, welches W zur Resultante hat, lassen sich aber wieder zu einer einfachen Kraft (§. 18.) zusammensetzen, welche die Resultante des mit V und W gleichwirkenden S ist.

Wir ersehen hieraus, dass ein System S von Kräften in einer Ebene entweder im Gleichgewichte ist, oder ein Paar, oder eine einfache Kraft zur Resultante hat. Zugleich aber sind wir damit in den Stand gesetzt,

die Bedingungen anzugeben, unter denen diese drei Fälle einzeln statt finden.

§. 33.

Soll zuerst in dem Systeme S Gleichgewicht herrschen, so ist dieses nicht anders möglich, als wenn von den Systemen V und W jedes für sich im Gleichgewichte ist. Sind aber die Paare AB, $A'B'$; CD, $C'D'$; ..., aus denen W besteht, im Gleichgewichte, so ist die Summe der Momente dieser Paare null (§. 28.). Da nun das Moment des Paares AB, $A'B'$ einerlei mit dem Momente der einfachen Kraft AB in Bezug auf den in $A'B'$ liegenden Punkt M ist (§. 31.), und dasselbe auch rücksichtlich der übrigen Paare gilt, so ist die Summe der Momente von AB, CD, EF, oder kürzer, das Moment des Systems S (§. 31.), in Bezug auf M, null; also:

A. *Ist ein System von Kräften, die in einer Ebene nach beliebigen Richtungen wirken, im Gleichgewichte, so ist das Moment des Systems für jeden Punkt der Ebene null.*

Aus zwei mit einander gleichwirkenden Systemen von Kräften lässt sich immer ein im Zustande des Gleichgewichts befindliches System bilden, wenn man die Kräfte des einen der beiden Systeme mit entgegengesetzten Richtungen den Kräften des andern hinzufügt. Da nun zwei einander gleiche und gerade entgegengesetzte Kräfte in Bezug auf denselben Punkt offenbar auch gleiche und entgegengesetzte Momente haben, so können wir den vorigen Satz auch folgender Weise ausdrücken:

Zwei gleichwirkende Systeme von Kräften in einer Ebene haben in Bezug auf einen und denselben

beliebigen Punkt der Ebene gleiche Momente. — Das Moment eines Systems, welches ein Kräftepaar, oder eine einfache Kraft zur Resultante hat, ist daher dem Momente des Paares, oder der einfachen Kraft gleich; also mit Berücksichtigung der Eigenschaften dieser letztern Momente (§§. 30. 31.):

B. *Hat ein in einer Ebene enthaltenes System ein Kräftepaar zur Resultante, so ist das Moment des Systems für keinen Punkt der Ebene null, für alle aber von einer und derselben Grösse.*

C. *Reducirt sich das System auf eine einzige Kraft, so sind seine Momente nur für diejenigen Punkte der Ebene null, welche in der Resultante selbst liegen, und überhaupt sind die Momente, welche das System für irgend drei, nicht in einer Geraden liegende Punkte hat, nicht alle drei einander gleich.*

Da es ausser diesen drei Fällen A., B. und C. keinen andern noch giebt, so ist es gestattet, auch umgekehrt zu schliessen:

A*. *Hat man ein System von Kräften in einer Ebene, und sind für drei Punkte der Ebene, welche nicht in einer Geraden liegen, die Momente des Systems einzeln null, so ist das System im Gleichgewichte, und sein Moment auch für jeden vierten Punkt der Ebene null.*

B*. *Sind für gedachte drei Punkte die Momente nicht null, jedoch von gleicher Grösse, so reducirt sich das System auf ein Kräftepaar, und sein Moment ist für jeden vierten Punkt der Ebene von derselben Grösse.*

C*. *Wird keine dieser beiden Bedingungen erfüllt, so hat das System eine einfache Kraft zur Resultante.*

§. 34.

Um von dem Vorigen eine einfache und zugleich für das Folgende nutzbare Anwendung zu machen, wollen wir bei dem Parallelogramm $OACB$ (Fig. 16.) das Moment der drei durch OA, OB, CO dargestellten Kräfte in Bezug auf die drei Puncte O, A, B betrachten.

Weil O ein Punkt in der Richtung jeder der drei Kräfte ist, so ist in Bezug auf ihn das Moment jeder derselben $=0$, also auch die Summe dieser Momente oder das Moment der drei Kräfte $=0$.

In Bezug auf A sind die Momente von OB und CO einander entgegengesetzt und, ihrem absoluten Werthe nach, einander gleich, weil es die Dreiecke AOB und ACO sind, deren Doppelte diese Momente ausdrücken. Es ist mithin die Summe derselben $=0$, und da in Bezug auf A das Moment von OA, $=0$ ist, so ist für A das Moment aller drei Kräfte gleichfalls $=0$.

Eben so wird bewiesen, dass auch in Bezug auf den Punkt B das Moment dieser Kräfte $=0$ ist.

Da also für jeden der drei Punkte O, A, B das Moment der drei Kräfte null ist, und diese Punkte nicht in einer Geraden liegen, so sind die Kräfte im Gleichgewichte, und ihr Moment auch für jeden vierten Punkt ihrer Ebene null, oder, was dasselbe ausdrückt: OC ist die Resultante von OA und OB (§. 27.) und für jeden Punkt H in der Ebene dieser Kräfte ist die Summe der Dreiecke HOA und HOB dem Dreiecke HOC gleich; d. h.

Von drei Dreiecken in einer Ebene, welche eine gemeinschaftliche Ecke H und zu gegenüberstehen-

den Seiten zwei anstossende Seiten *OA* und *OB*, und die durch derselben gemeinschaftliche Ecke gehende Diagonale *OC* eines Parallelogramms haben, ist die Summe der beiden ersten Dreiecke *HOA* und *HOB* dem dritten *HOC* gleich.

Nur hat man in dieser Formel, wenn sie allgemeine Gültigkeit haben soll, stets die Vorzeichen der Dreiecke gehörig mit zu berücksichtigen, und, nach der in §. 30. für die Momente gegebenen Regel, jedes Dreieck positiv oder negativ zu nehmen, nachdem, von der in seinem Ausdrucke zuerst gesetzten Ecke *H* aus, die Richtung von der zweiten nach der dritten nach rechts z. B. oder nach links gehend erscheint. So haben in Fig. 16. die drei Dreiecke *HOA*, *HOB*, *HOC* einerlei Zeichen; dagegen liegt in Fig 16* der Punkt *H* so, dass dem Dreiecke *HOB* das entgegengesetzte Zeichen der beiden übrigen zukommt.

Auch in dem Folgenden hat man, wenn Dreiecksflächen durch Nebeneinanderstellung der die Ecken bezeichnenden Buchstaben ausgedrückt werden, auf die Ordnung der Buchstaben immer mit Rücksicht zu nehmen und hiernach das Vorzeichen der Fläche zu beurtheilen. Man lasse nämlich, was mit der vorigen Bestimmung auf dasselbe hinauskommt, um den im Ausdrucke zuerst gesetzten Punkt eine von ihm ausgehende Gerade sich dergestalt drehen, dass ihr Endpunkt von dem zweiten nach dem dritten Punkte des Ausdrucks fortgeht, sie selbst also die Fläche des Dreiecks beschreibt; und je nachdem der Sinn dieser Drehung mit dem voraus festgesetzten positiven Sinne der Drehung in der Ebene übereinstimmt oder nicht, lege man der Fläche einen positiven oder negativen Werth bei.

Wie man leicht sieht, haben hiernach von den sechs möglichen Ausdrücken

$$ABC,\ BCA,\ CAB,\ ACB,\ BAC,\ CBA$$

für eine Dreiecksfläche, deren Ecken A, B, C sind, die drei ersteren einerlei Zeichen, die drei letzteren aber das entgegengesetzte der ersteren.

§. 35.

Zusätze. *a*. Der geometrische Satz des vorigen §. kann noch folgendergestalt ausgedrückt werden: Legt man durch eine Ecke O eines Dreiecks OCH in seiner Ebene zwei sich unter einem beliebigen Winkel schneidende Axen m und n, und projicirt auf sie durch Parallelen mit ihnen eine der beiden andern Ecken, C, so ist, wenn A und B diese Projectionen von C auf m und n sind, das Dreieck OCH gleich der Summe der beiden Dreiecke OAH und OBH, die man erhält, wenn man in dem Ausdrucke des erstern für die Ecke C successive ihre Projectionen setzt.

b. Auf gleiche Weise hat man, wenn F und G die Projectionen von H auf dieselben Axen m und n sind:

$$OAH = OAF + OAG,$$
$$OBH = OBF + OBG.$$

Weil aber O, A, F sowohl, als O, B, G, in gerader Linie liegen, so ist jedes der Dreiecke OAF und OBG null, und daher

$$OAH = OAG,\quad OBH = OBF,$$

folglich $OCH = OAH + OBH = OAG + OBF$
$= OAG - OFB.$

c. Werden m, n zu zwei Coordinatenaxen genommen, so sind OA, OB die Coordinaten von C, und

OF, OG die Coordinaten von H. Mittelst der letzterhaltenen Formel lässt sich dann leicht der Inhalt eines Dreiecks OCH, dessen eine Ecke der Anfangspunkt der Coordinaten ist, durch die Coordinaten der beiden anderen Ecken ausdrücken. Bezeichnet nämlich in dem Ausdrucke OAG eines Dreiecks der zuerst gesetzte Buchstabe O den Anfangspunkt der Coordinaten, der zweite A einen Punkt in der Axe m, der dritte G einen Punkt in der Axe n, und ist α der Winkel, um welchen nach dem vorher festgesetzten positiven Sinne der Drehung der positive Theil von m gedreht werden muss, bis er mit dem positiven Theile von n zusammenfällt, so ist immer nicht allein rücksichtlich des absoluten Werthes, sondern auch mit Hinsicht auf das Zeichen, der Inhalt von

$$OAG = \tfrac{1}{2} OA \,.\, OG \,.\, \sin\alpha.$$

Denn liegen A und G von O nach den positiven Seiten der Axen m und n zu, und ist $\alpha < 180°$, so sind sämmtliche Factoren des den Werth von OAG ausdrückenden Products positiv, und man überzeugt sich durch unmittelbare Anschauung, dass dann nach der zu Ende des vorigen §. gegebenen Regel auch die Dreiecksfläche OAG einen positiven Werth hat. Eben so leicht gewahrt man, dass, wenn entweder A von der positiven auf die negative Seite von m rückt und damit OA negativ wird, oder wenn OG negativ wird, oder wenn $\sin\alpha$ es wird, jedesmal auch die Fläche OAG ihr Zeichen ändert, und dass somit letztere Formel allgemeine Gültigkeit hat.

Setzt man daher die Coordinaten von C, $= a$, b und die von H, $= f$, g, so ist in jedem Falle

$OAG = \frac{1}{2} ag \sin\alpha$, eben so $OFB = \frac{1}{2} fb \sin\alpha$

und folglich nach der Formel in b.:

$$OCH = \tfrac{1}{2}(ag - fb)\sin\alpha.$$

§. 36.

Um jetzt, den in §. 33. erhaltenen Resultaten gemäss, irgend ein vorgelegtes System von Kräften in einer Ebene leicht beurtheilen und, falls es eine Resultante hat, dieselbe berechnen zu können, wollen wir alle Punkte der Ebene auf zwei Axen von Coordinaten x und y beziehen. Der Winkel der Axe der y mit der der x sey $= \alpha$, (von dessen Bestimmung dasselbe gelte, was im vorigen §. von der Bestimmung des Winkels der Axe n mit m gesagt worden).

Indem wir nun, wie in dem Vorhergehenden, eine in der Ebene wirkende Kraft P ihrer Intensität und Richtung nach durch eine gerade Linie AB ausdrücken, seyen die Coordinaten des Punktes A, $= x$, y; die des Punktes B, $= x + X$, $y + Y$. Hiernach sind X und Y die Projectionen der Linie AB auf die Axen der x und der y, und stellen damit zugleich Kräfte vor, zu denen sich die Kraft P eben so, wie die Linie AB zu ihren Projectionen verhält.

Durch x, y, X, Y ist daher die Kraft vollkommen bestimmt: durch x, y ein Punkt ihrer Richtung, und durch X, Y ihre Intensität und die Winkel ihrer Richtung mit den Coordinatenaxen, — die Winkel schon durch das Verhältniss $X : Y$. Ist nämlich φ der Winkel, den die Kraft $AB = P$ mit der Axe der x macht, d. h. der Winkel, um welchen diese Axe nach dem vorher als positiv bestimmten Sinne gedreht werden muss, bis sie mit P parallel wird, und ihre positive Richtung mit der Richtung von P selbst, nicht mit der entgegengesetzten, übereinkommt, so folgt aus der Betrachtung des Dreiecks, welches von AB und von

den durch A und B mit den Axen der x und y gelegten Parallelen gebildet wird:

$$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{X}{\sin(\alpha-\varphi)} = \frac{Y}{\sin\varphi},$$

wodurch sich X und Y aus P und φ, und umgekehrt P und φ aus X und Y, finden lassen.

In der analytischen Geometrie ist es gewöhnlich, einen Punkt, dessen Coordinaten x und y sind, durch (x, y) auszudrücken. Auch hier werde ich von dieser Abkürzung Gebrauch machen, und zugleich auf analoge Weise eine Kraft, deren Projectionen auf die Axen der x und y resp. X und Y sind, mit (X, Y) bezeichnen.

Eine andere Kraft (X', Y') ist hiernach mit (X, Y) parallel, wenn $X' : X = Y' : Y$, und je nachdem der Exponent dieser Verhältnisse positiv oder negativ ist, haben die beiden Kräfte einerlei oder entgegengesetzte Richtungen. Die Kräfte (X, Y) und $(-X, -Y)$ bilden daher im Allgemeinen ein Paar, halten aber einander das Gleichgewicht, wenn die parallelen Richtungen beider zusammenfallen. $(X, 0)$ ist der Ausdruck einer mit der Axe der x parallel wirkenden Kraft X, so wie $(0, Y)$ die Kraft Y in einer mit der Axe der y parallelen Lage vorstellt; u. s. w.

§. 37.

Bezeichnet O den Anfangspunct der Coordinaten, so ist, wie man aus der analytischen Geometrie weiss, und wie auch in §. 35. durch statische Betrachtungen erwiesen worden, der doppelte Inhalt der Dreiecksfläche OAB, von deren Ecken A und B die Coordinaten resp. x, y und $x+X$, $y+Y$ sind,

$$= (x(y+Y) - y(x+X))\sin\alpha = (xY - yX)\sin\alpha.$$

Dies ist also zugleich das Moment der durch den Punkt (x, y) gehenden Kraft (X, Y) in Bezug auf den Anfangspunkt der Coordinaten.

Wird das Moment nicht in Bezug auf den Anfangspunkt, sondern für irgend einen andern Punkt H der Ebene, dessen Coordinaten f, g sind, verlangt, so kommt, weil für diesen als Anfangspunkt die vorigen Coordinaten x, y in $x-f, y-g$ übergehen:

$$[(x-f)\, Y-(y-g)\, X] \sin \alpha.$$

Hat man daher ein System von Kräften (X, Y), (X', Y'), (X'', Y''),... in einer Ebene, welche resp. durch die Punkte (x, y), (x', y'), (x'', y''),... gehen, so erhält man das Moment des ganzen Systems in Bezug auf den Punkt H oder (f, g), wenn man nach letzterer Formel das Moment jeder Kraft einzeln entwickelt und alle diese Momente in eine Summe bringt. Dies giebt, wenn das Moment des Systems in Beziehung auf H, $=(H)$, und die von den Coordinaten dieses Punktes unabhängigen Summen

$$X+X'+X''+\ldots\ldots\ldots=A$$
$$Y+Y'+Y''+\ldots\ldots\ldots=B$$
$$xY-yX+x'Y'-y'X'+\ldots=N.$$

gesetzt werden:

$$(H)=(gA-fB+N) \sin \alpha.$$

Mit Hülfe dieses Ausdrucks für das Moment eines Systems von Kräften in einer Ebene lassen sich nun alle hierher gehörigen Aufgaben ohne Schwierigkeit lösen.

§. 38.

Soll erstlich das System im Gleichgewichte seyn, so muss für jede Lage des Punktes H in der Ebene, also für alle Werthe, die f und g annehmen können,

das Moment $(H) = 0$ seyn (§. 33. *A*.). Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn:

$$A = 0,\ B = 0,\ N = 0;$$

und da umgekehrt, wenn diese Gleichungen erfüllt werden, für jeden Ort von H, $(H) = 0$ wird, und somit Gleichgewicht statt findet, (§. 33. *A*°.), so sind diese drei Gleichungen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen fürs Gleichgewicht. Die zwei ersten drücken aus, dass die Summe der Projectionen der Kräfte auf die Axe der x, und die Summe der Projectionen auf die Axe der y, jede für sich, $= 0$ ist. Die dritte Gleichung giebt zu erkennen, dass das Moment des Systems in Bezug auf den Anfangspunkt der Coordinaten $= 0$ ist. Denn versetzt man H in den Anfangspunkt, so werden f und $g = 0$ und damit $(H) = N \sin \alpha$.

Uebrigens würde man zu diesen drei Bedingungsgleichungen schon gekommen seyn, wenn man nur für drei Punkte (f, g), (f', g'), (f'', g''), wobei nicht die Relation $f(g' - g'') + f'(g'' - g) + f''(g - g') = 0$ obwaltet, das Moment $= 0$ gesetzt hätte; — übereinstimmend damit, dass, wenn das Moment für drei Punkte der Ebene, die nicht in einer Geraden liegen, $= 0$ ist, es damit auch für alle übrigen Punkte der Ebene verschwindet.

§. 39.

Soll zweitens das System sich auf ein Paar reduciren, so muss (H) für jede Lage des Punktes H von constanter Grösse, also unabhängig von f und g seyn (§. 33. *B*.). Dies führt zu den zwei Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, wodurch (H) den constanten Werth $N \sin \alpha$ erhält, welcher nicht null seyn darf. Sind umgekehrt A und $B = 0$, so ist (H) für alle Werthe von

f und g von derselben Grösse, und das System, wenn es nicht im Gleichgewichte ist, hat ein Paar zur Resultante, (§. 33. B^*), dessen Moment seinem Sinne und seiner Grösse nach durch $N \sin \alpha$ gegeben ist.

Die Bedingungen, dass die Summen der Projectionen der Kräfte auf die Axen der x und y einzeln $= 0$ sind, sind demnach hinreichend und nothwendig, um uns zu vergewissern, dass das System, wofern es nicht im Gleichgewichte ist, sich auf ein Kräftepaar reducirt. Man bemerke hierbei noch, dass, wenn die Kräfte durch Parallelen mit der Axe der y (der x) auf die Axe der x (der y) projicirt werden, und die Summe der Projectionen null ist, sie dieses bleibt, wenn man statt der Axe der x (der y) irgend eine andere Gerade der Ebene zur Projectionslinie wählt. Da also die Lage der Geraden, auf welche projicirt wird, hierbei nicht in Rücksicht kommt, so können wir, diese Gerade ganz unerwähnt lassend, das oben erhaltene Resultat folgendergestalt ausdrücken:

Werden die Kräfte zu zweien Malen, jedes Mal durch Parallelen mit einer andern Richtung in der Ebene, projicirt, und ist beide Male die Summe der Projectionen null, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht, oder sie reduciren sich auf ein Paar, und die Summe der Projectionen ist auch für jede dritte Richtung der projicirenden Parallelen null.

Denken wir uns die Projectionen als in der Axe selbst, worauf projicirt wird, wirkende Kräfte, so können wir statt des Ausdrucks: die Summe der Projectionen sei null, nach §. 14. *d.* auch sagen: die Projectionen der Kräfte seyen im Gleichgewichte mit einander.

§. 40.

Werden die Bedingungen $A=0$, $B=0$ nicht erfüllt, so hat das System eine einfache Resultante. Sie sey (X_1, Y_1), und (x_1, y_1) ein beliebiger Punkt ihrer Richtung. Da die Resultante, in gerade entgegengesetzter Richtung genommen, mit dem Systeme das Gleichgewicht hält, so hat man, um sie zu bestimmen, nur die Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen den Kräften des Systems und einer durch den Punkt (x_1, y_1) gehenden Kraft $(-X_1, -Y_1)$ niederzuschreiben. Diese Gleichungen sind (§. 38.):

$$-X_1+A=0,\ -Y_1+B=0,$$
$$-x_1 Y_1+y_1 X_1+N=0.$$

Hieraus folgt:

$$X_1=A,\ Y_1=B,\ x_1 B-y_1 A=N.$$

Nach den zwei ersten dieser drei Gleichungen sind die Projectionen der Resultante auf die Axen der x und y resp. den Summen der Projectionen der gegebenen Kräfte auf dieselben Axen gleich, oder mit andern Worten (vergl. vor. §.): Werden die Kräfte und ihre Resultante auf eine und dieselbe Linie der Ebene projicirt, so ist die Projection der Resultante die Resultante der Projectionen der Kräfte. Hiermit ist die Resultante ihrer Grösse und den Winkeln nach, die sie mit den Axen bildet, bestimmt.

Die dritte Gleichung giebt je zwei zusammengehörige Werthe der Coordinaten eines Punktes in der Richtung der Resultante und ist daher die Gleichung dieser Linie, deren Lage somit vollkommen bestimmt ist. Auch erkennt man aus den Coefficienten von x_1 und y_1, dass diese Linie, wie gehörig, mit den Axen der x und y dieselben Winkel macht, welche sich aus den Werthen

von X_1 und Y_1 für die Richtung der Resultante ergeben. Findet sich $N=0$, so geht die Resultante durch den Anfangspunkt der Coordinaten.

Zusatz. Auf eben die Art, wie wir jetzt von einem Systeme, welches eine einfache Resultante hatte, dieselbe fanden, lässt sich auch der Fall in §. 39., wo A und $B=0$, behandeln, indem man durch Hinzufügung zweier Kräfte das Gleichgewicht herzustellen sucht. Denn man sieht sogleich, dass durch den Zusatz einer einzigen Kraft die Summen der Projectionen nicht mehr $=0$ bleiben können, wie doch zum Gleichgewichte erforderlich ist. Seyen daher $(-X_1, -Y_1)$, $(-X_2, -Y_2)$ die zwei neuen Kräfte und (x_1, y_1), (x_2, y_2) Punkte ihrer Richtungen, so hat man, wenn diese Kräfte mit dem System im Gleichgewichte seyn sollen:

$$-X_1 - X_2 + A = 0, \quad -Y_1 - Y_2 + B = 0,$$
$$-x_1 Y_1 + y_1 X_1 - x_2 Y_2 + y_2 X_2 + N = 0,$$

folglich, weil A und $B=0$ sind:

$$X_2 = -X_1, \quad Y_2 = -Y_1,$$

d. h. die zwei neuen Kräfte bilden ein Paar (§. 36.). Die dritte Gleichung aber drückt bloss aus, dass das Moment dieses Paares dem Momente des gegebenen Systems gleich ist, ohne etwas weiteres über die Grösse der Kräfte und ihre Richtungen kund zu geben, — übereinstimmend mit dem im vorigen §. erhaltenen Resultat und mit der Eigenschaft der Paare, dass sie in ihrer Ebene, wohin man will, verlegt werden können.

§. 41.

Eine besondere Betrachtung verdienen noch die zwei speciellen Fälle, wenn sich alle Kräfte des Systems in

einem Punkte schneiden, und wenn sie alle mit einander parallel sind.

Den erstern Fall anlangend, nehme man der Einfachheit willen den gemeinschaftlichen Schneidepunkt der Richtungen zum Anfangspunkte der Coordinaten. Hierdurch wird das Moment einer jeden Kraft in Bezug auf den Anfangspunkt, als einen Punkt ihrer Richtung, $=0$ (§. 30.). Es ist daher auch N, oder die Summe aller Momente in Bezug auf den Anfangspunkt, $=0$, und es bleiben für das Gleichgewicht eines solchen Systems nur

$$A=0 \text{ und } B=0$$

als Bedingungsgleichungen übrig. Werden sie nicht erfüllt, so hat das System eine durch den Anfangspunkt gehende Resultante (X_1, Y_1), wo

$$X_1=A, \quad Y_1=B;$$

d. h. das System hat eine den gemeinschaftlichen Durchschnitt der Kräfte treffende Resultante (A, B).

§. 42.

Zusätze. *a.* Die zwei Gleichungen $A=0$, $B=0$ ergaben sich in §§. 38. und 39. als die Bedingungen, unter denen das Moment irgend eines Systems von Kräften in einer Ebene für jeden Punkt der Ebene entweder null oder überhaupt constant war. Dem jetzt Gefundenen gemäss können wir diese *Bedingungen für die Unveränderlichkeit des Moments* auch so ausdrücken: *Die Kräfte müssen, wenn sie parallel mit sich fortgeführt werden, so dass ihre Richtungen sich in einem Punkte schneiden, einander das Gleichgewicht halten.* Dasselbe fliesst auch aus §. 32., wo, wenn das System S im Gleichgewichte seyn oder sich

auf ein Paar reduciren soll, das System V, d. h. die parallel mit den Kräften des Systems S durch einen und denselben Punkt gelegten Kräfte, im Gleichgewichte seyn müssen.

b. Besteht das System nur aus zwei sich schneidenden Kräften, so nehme man die Richtung der einen Kraft zur Axe der x, die Richtung der andern zur Axe der y, und bezeichne daher die Kräfte mit $(X, 0)$, $(0, Y)$. Hieraus folgt $A = X$, $B = Y$, und die Resultante ist (X, Y). Von zwei sich schneidenden Kräften wird folglich die Resultante eben so gefunden, wie aus den zwei Projectionen einer Linie sie selbst hergeleitet wird, also dadurch, dass man aus den zwei Kräften ein Parallelogramm, das Parallelogramm der Kräfte (§. 27.), construirt, von welchem dann die durch den Schneidepunkt der Kräfte gehende Diagonale die Resultante ihrer Grösse und Richtung nach vorstellt.

c. Die Projectionen einer Kraft auf die beiden Axen sind daher nichts anderes, als die zwei Kräfte, welche man erhält, indem man erstere Kraft in irgend einem Punkte ihrer Richtung in zwei andere, parallel mit den beiden Axen zerlegt. In dieser Bedeutung die Projectionen genommen, wird umgekehrt die Richtigkeit des obigen Verfahrens, um von mehrern auf einen Punkt wirkenden Kräften die Resultante zu finden, noch einleuchtender. Es sind nämlich $X_1 = X + X' + ..$ und $Y_1 = Y + Y' + ..$ die in den Axen der x und y wirkenden Resultanten der zwei Systeme, die durch Zerlegung jeder Kraft des gegebenen Systems nach diesen zwei Axen hervorgehen. Die Resultante von X_1 und Y_1, oder die Kraft (X_1, Y_1), muss folglich die Resultante des ganzen Systems seyn.

§. 43.

Der zweite specielle Fall, dem wir noch Aufmerksamkeit widmen wollen, ist der, wenn alle Kräfte des Systems einander parallel sind. Werde dann, um möglichst einfache Formeln zu erhalten, die Axe der x mit den Kräften parallel gelegt, so sind, welches auch die Richtung der Axe der y seyn mag, $Y, Y', Y'', .. = 0$. $X, X', X'', ...$ drücken dann die Kräfte des Systems selbst aus, und es werden:

$$B = 0, \; N = -yX - y'X' - y''X'' - ...$$

Die drei Bedingungen des Gleichgewichts (§. 38.) reduciren sich hiermit auf die zwei:

$$A = 0, \; N = 0,$$

d. h. die Summe der Kräfte und die Summe ihrer Momente in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene müssen beiderseits $= 0$ seyn.

Ist bloss $A = 0$, so hat das System ein Paar zur Resultante, dessen Moment $= N \sin \alpha$.

Wenn A nicht $= 0$ ist, so reducirt sich das System auf eine einfache Kraft. Sey diese, wie in §. 40., (X_1, Y_1), und (x_1, y_1) ein Punkt ihrer Richtung, so ist nach den dortigen Formeln:

$$X_1 = A, \; Y_1 = 0, \; -y_1 A = N.$$

Die Resultante ist demnach $(A, 0)$, d. h. mit der Axe der x parallel, also parallel mit den Kräften des Systems, und der Summe derselben gleich. Der Abstand y_1 der Resultante von einem beliebigen Punkte der Ebene ergiebt sich aus den Kräften $X, X', ..$ und ihren Abständen $y, y', ...$ von demselben Punkte mittelst der dritten Gleichung und ist:

$$y_1 = -\frac{N}{A} = \frac{yX + y'X' + y''X'' + ...}{X + X' + X'' + ...}.$$

Wird dieser Punkt in der Resultante selbst genommen, sind also y, y', y'', ... die Abstände der Kräfte von ihrer Resultante, so ist $y_{,}=0$ und

$$yX+y'X'+y''X''+\ldots=0.$$

Bei bloss zwei Kräften hat man $yX+y'X'=0$, folglich $y:y'=X':-X$; d. h. die Abstände zweier parallelen Kräfte von ihrer Resultante, die in diesem speciellen Falle eben so, wie in dem allgemeinen, mit den Kräften parallel geht und ihrer Summe gleich ist, verhalten sich umgekehrt wie die Kräfte, und die Kräfte liegen, wenn sie einerlei Richtung haben, auf entgegengesetzten Seiten der Resultante. (Vergl. §. 26.)

Geometrische Folgerungen.

§. 44.

Das Moment eines Systems von Kräften in einer Ebene ist entweder für alle Punkte der Ebene von constanter Grösse (§. 39.), — Null mit eingeschlossen, wo Gleichgewicht statt findet, — oder es ist von einem Punkte zum andern veränderlich, und alsdann lässt sich aus den Kräften des Systems eine neue Kraft, die Resultante, finden von der Beschaffenheit, dass für jeden Punkt der Ebene das Moment des Systems dem Momente dieser neuen Kraft gleich ist.

Da nun das Moment einer Kraft AB in Bezug auf den Punkt M dem doppelten Inhalte des Dreiecks MAB gleich ist, so lässt sich der voranstehende Satz von den Momenten auf folgende Art rein geometrisch darstellen:

Hat man ein System gerader Linien AB, CD, ... in einer Ebene, so ist die algebraische (§. 34.) Summe der Dreiecke MAB, MCD, ..., welche diese

Linien zu Grundlinien und einen und denselben Punkt *M* der Ebene zur gemeinschaftlichen Spitze haben, entweder für jeden Ort dieses Punktes von einerlei Grösse, oder von einem Orte zum andern veränderlich. Im letztern Falle aber lässt sich in der Ebene noch eine Linie von solcher Lage und Grösse angeben, dass für jeden Punkt der Ebene jene Summe von Dreiecken dem Dreiecke gleich ist, welches denselben Punkt zur Spitze und diese letztere Linie zur Basis hat.

Wir wollen jetzt diesen Satz mit Hülfe der Geometrie selbst zu beweisen suchen, indem dieses zu mehrerer Veranschaulichung einiger der vorigen Sätze dienen, und zur Entwickelung einiger neuen das Gleichgewicht betreffenden Beziehungen Gelegenheit geben wird. Um aber den Beweis in möglichster Allgemeinheit führen zu können, ist es nöthig, folgende Sätze voranszuschicken.

§. 45.

Lehnsätze. 1. Sind A, B, C drei in einer Geraden liegende Punkte, D ein vierter ausserhalb der Geraden, so ist, eben so wie in §. 25. $AC = AB + BC = AB - CB$, u. s. w. war, auch mit Vorsetzung von D, das Dreieck

$$DAC = DAB + DBC = DAB - DCB = \text{u. s. w.}$$

und es verhalten sich:

$$AB : BC : CA = DAB : DBC : DCA.$$

Nur müssen dabei nach der in §. 34. gegebenen Regel stets die Vorzeichen der Dreiecke gehörig berücksichtiget werden.

2. Ist M ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC, so ist immer

$$MAB + MBC + MCA = ABC.$$

Beweis. Von den drei Geraden, welche M mit den Ecken des Dreiecks verbinden, wird wenigstens eine, es sey AM, die der Ecke A gegenüberliegende Seite BC schneiden. Geschehe dieses in Z, so ist nach 1.

$$\left.\begin{aligned} ABC &= ABZ + AZC \\ MBZ &= MBC + MCZ \end{aligned}\right\} \text{weil } B,\ C,\ Z$$

$$\left.\begin{aligned} BZA &= BZM + BMA \\ CAZ &= CAM + CMZ \end{aligned}\right\} \text{weil } A,\ M,\ Z$$

in einer Geraden liegen. Addirt man diese vier Gleichungen und bemerkt, dass nach §. 34. $ABZ = BZA$, u. s. w., so erhält man die zu beweisende Gleichung, die daher richtig ist, mag M innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks ABC liegen, wenn nur die Vorzeichen der Dreiecke gehörig beachtet werden.

3. Eben so, wie nach dem jetzt Erwiesenen, die algebraische Summe der drei Dreiecke, welche die Seiten eines Dreiecks zu Grundlinien und einen Punkt M in der Ebene des letztern zur gemeinschaftlichen Spitze haben, dem letztern Dreiecke selbst gleich, und daher von der Lage von M unabhängig ist, so ist auch bei jedem ebenen Vielecke von mehrern Seiten die algebraische Summe der über den Seiten sich erhebenden und in einer gemeinschaftlichen Spitze M zusammenstossenden Dreiecke für jeden Ort von M in der Vielecksebene von gleicher Grösse.

Denn sind A, B, C, D die vier auf einander folgenden Ecken eines Vierecks, so ist diese Summe

$$MAB + MBC + MCD + MDA$$
$$= MAB + MBC + MCA + MAC + MCD + MDA,$$

weil $MCA + MAC = 0$. Letzterer Ausdruck der Summe zieht sich aber nach 2. zusammen in

$$ABC + ACD$$

und ist daher von M unabhängig.

Sind ferner A, B, C, D, E die fünf auf einander folgenden Ecken eines ebenen Fünfecks, so ist die Summe der fünf Dreiecke

$$\begin{aligned} & MAB + MBC + MCD + MDE + MEA \\ = & MAB + MBC + MCD + MDA \\ & \quad + MAD + MDE + MEA \\ = & ABC + ACD + ADE, \end{aligned}$$

also gleichfalls von M unabhängig; und auf dieselbe Art lässt sich die Unabhängigkeit der Summe $MAB + \ldots$ von M auch bei jedem mehrseitigen Vielecke darthun.

Ist nun das Vieleck ein gewöhnliches, d. h. von der Beschaffenheit, dass keine zwei seiner Seiten sich innerhalb ihrer Grenzpunkte schneiden, so erhellet ohne Weiteres, dass die Summe $ABC + ACD + \ldots$ den Flächeninhalt des Vielecks ausdrückt. Der Analogie nach wird daher auch in dem Falle, wenn der Perimeter des Vielecks, bevor er in sich zurückkehrt, sich selbst ein oder mehrere Male schneidet, dieselbe von M unabhängige, von jeder Seite aber auf gleiche Weise abhängige Summe $MAB + MBC + \ldots$ der Inhalt des Vielecks genannt werden müssen.

Liegen z. B. die vier Ecken A, B, C, D eines Vierecks so, dass von den vier Seiten AB, BC, CD, DA die erste und dritte sich innerhalb ihrer Endpunkte in G (Fig. 17.) schneiden, so haben die zwei Dreiecke der Summe $ABC + ACD$ entgegengesetzte Zeichen und die Summe ist dem Unterschiede der Dreiecke $GBC - GAD$ gleich. Als der Inhalt eines solchen

Vierecks ist daher dieser Unterschied anzusehen, so dass, wenn DB mit AC parallel läuft, und mithin GBC und GAD einander gleich sind, der Inhalt $= 0$ ist.

Von der Summe der Dreiecke $MAB + MBC + \ldots$ kann man sich eine sehr anschauliche Vorstellung machen, wenn man sich, wie in §. 34., jedes dieser Dreiecke durch die Bewegung einer geraden Linie um M, als um den einen ihrer Endpunkte, entstanden denkt, während der andere Endpunkt die gegenüberstehende Seite AB, oder BC, ..., durchläuft. Die Summe aller Dreiecke, oder die Fläche des Vielecks, lässt sich daher als die Fläche betrachten, welche erzeugt wird, indem eine Gerade, welche von einem willkührlich in der Vielecksebene zu bestimmenden Punkte M ausgeht, mit ihrem andern Endpunkte den Perimeter des Vielecks beschreibt; nur dass dabei Theile der Fläche, bei welchen die Bewegung um M nach entgegengesetztem Sinne geht, als sich gegenseitig aufhebend genommen werden müssen.

Uebrigens werden wir, wie gewöhnlich, die Fläche eines Vielecks durch Nebeneinanderstellung der Ecken in der Ordnung, nach welcher sie im Perimeter auf einander folgen, ausdrücken, so dass hiernach von dem Vierecke $ABCD$ z. B. das Viereck $BCDA$ weder der Grösse noch dem Zeichen nach verschieden ist, dagegen $ADCB$ ein Viereck ausdrückt, das mit dem erstern zwar einerlei absolute Grösse, aber das entgegengesetzte Zeichen hat, $ACBD$ aber ein von $ABCD$ ganz verschiedenes Viereck darstellt.

4. Wird in dem Ausdrucke ABC eines Dreiecks statt eines der drei Punkte, z. B. statt B, ein anderer E gesetzt, der mit dem erstern in einer der gegenüberstehenden Seite CA parallelen Geraden liegt, so

ist das neue Dreieck AEC dem erstern ABC sowohl der absoluten Grösse, als auch dem Zeichen nach, gleich.

5. Ist $ABCD$ (Fig. 18.) ein Parallelogramm, und M ein beliebiger Punkt in dessen Ebene, so ist

$$MAB + MCD = MBC + MDA = \frac{1}{2} ABCD.$$

Beweis. Man ziehe durch M mit AB eine Parallele, welche DA in L treffe, so ist, nach 4., $MAB = LAB$, und $MCD = LCD = LBD$, folglich:

$$MAB + MCD = LAB + LBD = BDL + BLA$$
$$= BDA \text{ (nr. 1.) } = \frac{1}{2} ABCD;$$

und eben so wird gezeigt, dass auch

$$MBC + MDA = \frac{1}{2} ABCD.$$

Dieser Satz ist, statisch betrachtet, offenbar kein anderer, als der schon in §. 31. bewiesene, dass die Summe der Momente der zwei Kräfte eines Paares für jeden Punkt in der Ebene des Paares von gleicher Grösse ist.

§. 46.

Wir lassen jetzt den Beweis des Satzes in §. 44. folgen. — Sey A_1B_2, B_1C_2, C_1D_2 (Fig. 19.) ein System gerader Linien in der Ebene, und die Summe der Dreiecke zu untersuchen, welche diese Linien zu Grundlinien und irgend einen Punkt M der Ebene zur gemeinschaftlichen Spitze haben. — Durch einen beliebigen Punkt A der Ebene ziehe man die AB gleich und parallel mit A_1B_2; durch B die BC gleich und parallel mit B_1C_2; durch C die CD gleich und parallel mit C_1D_2. Alsdann ist (§. 45. 5.), wo auch der Punkt M genommen wird: $MA_1B_2 + MBA = AA_1B_2$, oder

$$MA_1B_2 = MAB + AA_1B_2, \text{ und eben so}$$
$$MB_1C_2 = MBC + BB_1C_2,$$
$$MC_1D_2 = MCD + CC_1D_2.$$

Addirt man diese drei Gleichungen, setzt die zu untersuchende Summe der Dreiecke

$$MA_1B_2 + MB_1C_2 + MC_1D_2 = S,$$

die Summe

$$AA_1B_2 + BB_1C_2 + CC_1D_2 = \Delta,$$

und bemerkt, dass nach §. 45. 3.

$$MAB + MBC + MCD + MDA = ABCD,$$

so kommt:

$$(a) \ldots\ldots\ S = ABCD + \Delta - MDA.$$

Tritt demnach bei der eben gemachten Construction der specielle Fall ein, dass der letzte Punkt D der gebrochenen Linie $ABCD$ mit dem ersten A zusammenfällt, so wird $MDA = 0$, das Vieleck $ABCD$ geht in eines mit einer um Eins geringern Seitenzahl ABC über, und man erhält:

$$S = ABC + \Delta,$$

d. h. die Summe S ist für jeden Ort von M von constanter Grösse.

Fällt aber D mit A nicht zusammen, so sey D_1A_2 eine der DA gleiche und parallele Linie, und man hat $MD_1A_2 = MDA + DD_1A_2$, und, wenn man den hieraus fliessenden Werth von MDA in (a) substituirt:

$$S = ABCD + \Delta + DD_1A_2 - MD_1A_2.$$

Bestimmt man nun den noch willkührlichen Abstand der D_1A_2 von DA so, dass das Dreieck

$$DA_2D_1 = ABCD + \Delta,$$

$$\text{so wird} \ldots\ S = MA_2D_1,$$

und man hat somit eine Linie A_2D_1 gefunden, welche die Eigenschaft besitzt, dass für jeden Ort der gemeinschaftlichen Spitze M die Summe der Dreiecke über

den gegebenen Linien A_1B_2, B_1C_2, C_1D_2 dem Dreiecke über A_2D_1 gleich ist.

§. 47.

Zusätze. *a.* Aus der Gleichung $S = MA_2D_1$ folgt, dass, wenn M in A_2D_1 selbst liegt, $S = 0$ ist, dass für alle Punkte M, welche mit A_2D_1 in einer Parallele liegen, S gleiche Werthe hat, und dass überhaupt der Werth von S dem Abstande des M von A_2D_1 proportional ist.

b. Werden durch A_1B_2, B_1C_2, C_1D_2 Kräfte vorgestellt, so ist A_2D_1 die Resultante derselben. Die Resultante eines Systems von Kräften kann daher ihrer Grösse und den Winkeln nach, welche sie mit den Kräften bildet, auch gefunden werden, wenn man die den Kräften proportionalen Linien, in beliebiger Folge genommen, parallel mit sich so fortbewegt, dass der Anfangspunkt jeder folgenden mit dem Endpunkte der nächstvorhergehenden zusammenfällt, und somit eine zusammenhängende gebrochene Linie entsteht. Die vom Anfangspunkte dieser gebrochenen Linie bis zu ihrem Endpunkte geführte Gerade ist dann der Resultante gleich und parallel. Fallen aber der Anfangs- und Endpunkt der gebrochenen Linie zusammen, so dass die Kräfte nach ihrer parallelen Fortbewegung ein geschlossenes Vieleck bilden, so hat das System keine einfache Resultante, sondern reducirt sich entweder auf ein Paar, oder ist im Gleichgewichte.

c. *Kräfte in einer Ebene, die durch die Seiten eines geschlossenen Vielecks $ABC\ldots$ dargestellt werden, sind* daher *immer gleichwirkend mit einem Paare oder im Gleichgewichte. Das Moment des Paares ist* ($= 2MAB + 2MBC + \ldots$, also) *dem doppelten In-*

halte des Vielecks gleich, und wenn dieser Inhalt sich $= 0$ *findet, so herrscht Gleichgewicht.* Sind daher z. B. $ABC\ldots$ und $FGH\ldots$ zwei in einer Ebene beliebig gelegene Vielecke von gleichem Inhalte, so sind die zwei Systeme von Kräften AB, $BC, \ldots$ und FG, $GH, \ldots$ von gleicher Wirkung.

d. Ist $ABCD$ ein ebenes Vieleck und sind A', B', C', D' die Projectionen seiner Ecken auf eine in seiner Ebene enthaltene Gerade, — gleichviel, unter welchem Winkel die mit einander parallelen projicirenden Linien die Gerade schneiden, — so ist die Summe der Projectionen der Seiten $= A'B' + B'C' + C'D' + D'A'$, also immer $= 0$; und eben so ist die Summe der Projectionen der Theile einer gebrochenen Linie $ABCD$, $A'B' + B'C' + C'D' = A'D' =$ der Projection der vom Anfange bis zum Ende der gebrochenen Linie gezogenen Geraden. Da nun bei paralleler Fortbewegung einer Linie die Projection derselben ihrer Grösse nach sich nicht ändert, so ist, wenn die Summe der Dreiecke im vorigen §. für alle Punkte der Ebene unverändert bleibt, die Summe der Projectionen der Linien des Systems auf jede Gerade in der Ebene $= 0$. Hat aber das System eine Resultante, so ist die Summe der Projectionen der Projection der Resultante gleich.

Ist, umgekehrt, für eine gewisse Richtung der projicirenden Linien die Summe der Projectionen $= 0$, so schliessen wir, dass, wenn die Linien des Systems durch parallele Fortbewegung zu einer gebrochenen Linie vereiniget werden, der Anfangs- und Endpunkt dieser gebrochenen in einer mit den projicirenden Linien parallelen Linie liegen. Ist daher die Summe der Projectionen für zwei verschiedene Richtungen der projicirenden Linien jedesmal $= 0$, so fallen Anfang und Ende der

gebrochenen Linie zusammen, und es entsteht ein geschlossenes Vieleck, weil sonst die Linie durch den Anfangs- und Endpunkt mit den zwei verschiedenen Richtungen der projicirenden Linien zugleich parallel seyn müsste. Die Bedingung, unter welcher die Summe der Dreiecke von einem Punkte der Ebene zum andern constant ist, kann daher auch dadurch ausgedrückt werden, dass die Summe der Projectionen der Linien des Systems für zwei verschiedene Richtungen der projicirenden Linien, und damit auch für alle andern Richtungen, $= 0$ ist. Vergl. §§. 39. und 40.

e. Wenn alle Linien des Systems sich in einem Punkte O schneiden, so ist die Summe der Dreiecke für diesen Punkt, $= 0$, also auch für jeden andern Punkt, $= 0$, wenn die Summe nicht veränderlich ist. Ist sie aber veränderlich, so hat das System eine durch O gehende Resultante, weil eine veränderliche Summe nur für Punkte der Resultante, $= 0$ ist. Nimmt man daher bei der Construction der gebrochenen Linie den Punkt O zum Anfangspunkte, so ist die von O bis zum Endpunkte der gebrochenen gezogene Linie die Resultante selbst, nicht bloss mit ihr parallel. Die Anwendung hiervon auf ein System von nur zwei sich schneidenden Linien führt unmittelbar zu dem geometrischen Satze in §. 34., wie ohne weiteres klar ist.

f. Sind sämmtliche Linien des Systems mit einander parallel, so geht die vorhin gebrochene Linie in eine einzige, mit den Linien des Systems parallele Gerade über. Die Resultante, wenn eine solche statt findet, ist daher ebenfalls den Linien des Systems parallel und der algebraischen Summe derselben gleich.

§. 48.

Aufgabe. Von einem System in einer Ebene enthaltener Kräfte (Linien), sind für drei Punkte A, B, C (Fig. 20.) der Ebene, welche nicht in einer Geraden liegen, die Momente des Systems (die Summen der Dreiecke) $=(A)$, (B), (C) gegeben. Die Resultante, so wie das Moment (M) für irgend einen vierten Punkt M der Ebene, zu finden.

Auflösung. 1) Die Momente (A), (B), (C) sind den Abständen der Punkte A, B, C von der Resultante proportional (§. 47. *a.*). Es verhalten sich aber, wenn die Gerade BC von der Resultante in D geschnitten wird, die Abstände der Punkte B und C von der Resultante wie BD und CD. Man theile daher BC in D so, dass auch hinsichtlich der Vorzeichen $BD:CD=(B):(C)$, und auf gleiche Weise CA in E so, dass $CE:AE=(C):(A)$, so sind D und E zwei Punkte der Resultante, und die Resultante ist somit ihrer Lage nach gefunden. Auch muss, wenn man noch AB in F nach dem Verhältnisse $AF:BF=(A):(B)$ theilt, F in der Resultante, also in DE, liegen. Nimmt man hierauf in DE einen Abschnitt GH von der Länge, dass das Dreieck $AGH=\frac{1}{2}(A)$, [oder $BGH=\frac{1}{2}(B)$, oder $CGH=\frac{1}{2}(C)$,] so ist GH die Grösse der Resultante.

2) Für den Punkt M ist das Moment $(M)=2\,MGH$. Ohne aber zuvor die Resultante GH bestimmt zu haben, kann man aus der gegenseitigen Lage der vier Punkte A, B, C, M und aus den Momenten für die drei ersten das Moment für den vierten auch unmittelbar finden. — Werde BC von AM in N geschnitten,

und sey (N) das Moment für den Punkt N, so verhält sich, wie vorhin:

$$BD:CD:ND = (B):(C):(N).$$

Man hat aber die identische Gleichung:

$$\begin{aligned}0 &= BD(CD-ND)+CD(ND-BD)\\ &\quad+ND(BD-CD)\\ &= BD.CN+CD.NB+ND.BC.\end{aligned}$$

Substituirt man darin für BD, CD, ND die ihnen proportionalen (B), (C), (N), so kommt:

$$CN.(B)+NB.(C)+BC.(N)=0,$$

die Relation zwischen den Momenten für drei in einer Geraden liegende Punkte. Sie geht hervor, wenn man in der Gleichung zwischen den gegenseitigen Abständen dieser Punkte jeden Abstand mit dem Momente für den jedesmal übrigen Punkt multiplicirt.

Auf gleiche Weise hat man in der Geraden AMN:

$$MN.(A)+NA.(M)+AM.(N)=0.$$

Es verhält sich aber

$$\begin{aligned}CN:NB &= MCN:MNB = ACN:ANB \text{ (§.45. 1.), folgl.}\\ &= CNM-CNA:BMN-BAN\\ &= CAM:BMA = MCA:MAB,\end{aligned}$$

und eben so

$$MN:NA = MBC:ACB.$$

Hiermit werden die vorigen zwei Gleichungen:

$$MCA.(B)+MAB.(C)-(MCA+MAB)(N)=0,$$
$$MBC.(A)+ACB.(M)-(MBC+ACB)(N)=0.$$

Addirt man dieselben, so kommt, weil dabei der Coefficient von (N) sich auf Null reducirt (§. 45. 2.):

$$MBC.(A)+MCA.(B)+MAB.(C)=ABC.(M),$$

welches daher die gesuchte Relation zwischen den Mo-

menten für irgend vier Punkte der Ebene ist. Sie entsteht, wie man sieht, unmittelbar aus der Gleichung (§. 45. 2.) zwischen den vier Dreiecken, die sich aus den vier Punkten bilden lassen, indem man zu jedem dieser Dreiecke das Moment des jedesmal fehlenden Punktes als Factor hinzufügt.

§. 49.

Zusätze. *a.* Aus dem ersten Theile dieser Auflösung fliesst der bekannte Satz, dass das Product aus den drei Verhältnissen, nach denen die drei Seiten eines Dreiecks ABC von einer vierten Geraden DEF geschnitten werden:

$$(BD:CD)\,(CE:AE)\,(AF:BF)$$

der Einheit gleich ist.

b. Setzt man in der zuletzt erhaltenen Gleichung statt (A), (B), .. die Werthe dieser Momente: $2AGH$, $2BGH$, ..., so kommt:

$$MBC\,.\,AGH + MCA\,.\,BGH + MAB\,.\,CGH = ABC\,.\,MGH,$$

eine Gleichung, die immer statt finden muss, wie auch die sechs Punkte A, B, C, G, H, M in der Ebene liegen mögen.

Lässt man M mit H zusammenfallen, so ergiebt sich:

$$HBC\,.\,AGH + HCA\,.\,BGH + HAB\,.\,CGH = 0,$$

eine Gleichung zwischen sechs Dreiecken, welche eine gemeinschaftliche Spitze H, und die vier Seiten und zwei Diagonalen eines Vierecks $ABCG$ zu Grundlinien haben.

Viertes Kapitel.

Vom Gleichgewichte zwischen Kräftepaaren im Raume.

§. 50.

Lehrsatz. Zwei einander gleiche Paare, die in zwei parallelen Ebenen liegen und einerlei Sinn haben, sind gleichwirkend.

Beweis. Sei AB, CD (Fig. 21.) das eine Paar und EG die mit seiner Ebene parallele Ebene des andern Paares EF, GH, welches darin so gelegt worden, dass seine Kräfte mit denen des erstern parallel sind. Man nehme überdies an, dass die vier Punkte A, D, E, H in einer Ebene liegen, und dass daher und wegen der Gleichheit beider Paare die vier Kräfte derselben vier einander parallele Kanten eines Parallelepipedums vorstellen. Sey alsdann M der Durchschnitt von AH mit DE und N der Durchschnitt von BG mit CF, so sind M und N zugleich die Mittelpunkte dieser Linien, und MN ist den vier Kräften gleich und parallel.

Nun ist das Paar AB, CD gleichwirkend mit den Paaren AB, NM und CD, MN. Von diesen ist aber ersteres gleichwirkend mit MN, GH, und letzteres mit NM, EF (§. 17.). Folglich ist das Paar AB, CD gleichwirkend mit MN, GH, NM, EF, d. i. mit dem Paare EF, GH.

Folgerung. Ein Kräftepaar kann daher nicht nur in seiner Ebene, sondern auch in jeder damit parallelen Ebene, wohin man will, verlegt werden, und die Bedingungen fürs Gleichgewicht zwischen Paaren,

die in parallelen Ebenen liegen, sind mit den oben für den Fall gefundenen Bedingungen, wenn die Paare in einer und derselben Ebene enthalten sind, ganz einerlei.

§. 51.

Lehrsatz. Zwei Paare, die in zwei einander nicht parallelen Ebenen liegen, können sich nicht das Gleichgewicht halten, sondern sind gleichwirkend mit einem Paare, dessen Ebene durch die Durchschnittslinie jener Ebene geht, oder (§. 50.) *mit dieser Linie parallel ist.*

Beweis. Ueber einem willkührlich in der Durchschnittslinie genommenen Abschnitte AN (Fig. 22.) beschreibe man in den Ebenen der beiden Paare zwei Parallelogramme $ANCB$ und $ANED$, welche ihrem Sinne und Inhalte nach den Momenten der Paare gleich sind. Alsdann können NC, BA und NE, DA als die beiden Paare selbst angesehen werden. Ist nun von NC und NE die Resultante NG, und von BA und DA die Resultante FA, so sind, wie schon aus §. 15. fliesst, NG, FA einander gleich, parallel und entgegengesetzt und bilden daher ein Paar, dessen Ebene durch NA geht, und welches mit den gegebenen zwei Paaren gleiche Wirkung hat.

Folgerungen. *a.* Drei Paare können nur dann einander das Gleichgewicht halten, wenn ihre Ebenen entweder zusammenfallen, oder einander parallel, oder mit einer und derselben Geraden parallel sind, also überhaupt, wenn ihre Ebenen keine körperliche Ecke bilden. Zwei Paare sind aber nur dann, und dann immer, im Gleichgewichte, wenn sie in einerlei, oder in parallelen Ebenen liegen, von entgegengesetztem Sinne sind und einander gleiche Momente haben.

b. Da zwei Paare, auch wenn sie nicht in einer Ebene liegen, entweder ein resultirendes Paar haben, oder im Gleichgewichte sind, *so wird jedes System von Paaren überhaupt*, indem man die Zahl derselben durch successive Verbindung je zweier immer um eins vermindert, *sich entweder auf ein Paar zurückführen lassen, oder im Gleichgewichte seyn*, wenn es die letzten zwei zu verbindenden Paare sind.

§. 52.

Ohne dasjenige zu benutzen, was vom §. 24. an über die Zusammensetzung einfacher Kräfte gelehrt worden, lassen sich mit Hülfe der im vorigen §. gemachten Construction noch folgende Schlüsse bilden.

In der Ebene $CNEG$ nehme man willkührlich einen Punkt M und lege durch ihn MH, MI, MK gleich und parallel mit NC, NE, NG, so ist KM die Resultante von HM und IM, und es sind daher die Paare NC, HM und NE, IM zusammen gleichwirkend mit dem Paare NG, KM; folglich (§. 22.) sind die Parallelogramme

$$(a)\ldots\ldots NCHM + NEIM = NGKM,$$

folglich ihre Hälften oder die Dreiecke

$$MNC + MNE = MNG,$$

folglich die Pyramiden, welche diese in einer Ebene liegenden Dreiecke zu Grundflächen und den Punkt A zur gemeinschaftlichen Spitze haben,

$$MNCA + MNEA = MNGA,$$

drei Pyramiden, welche man auch als solche betrachten kann, deren gemeinschaftliche Spitze M ist, und deren Grundflächen NCA, NEA, NGA in den Ebe-

nen der Paare NC, BA; NE, DA; NG, FA liegen und den halben Momenten dieser Paare gleich sind. Es ist aber M ein willkührlicher Punkt in der Ebene CNE, und diese Ebene ist selbst willkührlich, weil es der Punkt N in dem Durchschnitte der Ebenen AC, AE und die Winkel ANC, ANE sind; folglich ist M ein willkührlicher Punkt im Raume überhaupt, und wir sind somit zu folgendem Satze gelangt:

Wenn die Ebenen zweier Paare und ihres resultirenden Paares sich in einem Punkte N (folglich in einer und derselben durch diesen Punkt gehenden Geraden) schneiden, so ist von den drei Pyramiden, welche einen beliebigen andern Punkt M zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und deren Grundflächen in den Ebenen der Paare liegen und den Momenten der letztern proportional sind, die Summe der zwei Pyramiden, welche den zwei zusammenzusetzenden Paaren angehören, der Pyramide des resultirenden Paares gleich.

Uebrigens müssen hierbei noch die Zeichen der Pyramiden gehörig beachtet werden. Denn in der Gleichung (a) bekommen je zwei Parallelogramme nur dann einerlei Zeichen, wenn die Paare, zu denen sie gehören, von einerlei Sinne sind, und nachdem je zwei dieser Paare, wie NC, HM und NE, IM, einerlei oder entgegengesetzten Sinn haben, erscheinen offenbar die Paare NC, BA und NE, DA, wenn von M auf die Ebene des jedesmaligen Paares herabgesehen wird, mit einerlei oder entgegengesetztem Sinne. Mithin müssen sich auch die Vorzeichen der Pyramiden nach dem Sinne richten, mit welchem die Paare, über deren Flächen sie construirt sind, von M aus betrachtet, sich zeigen.

Der eben erwiesene Satz gilt aber nicht nur für

zwei, sondern auch für jede grössere Anzahl zusammenzusetzender Paare. Denn werden zwei Paare kurz durch p und p', und ihr resultirendes Paar durch r bezeichnet, und drückt Mp die Pyramide aus, deren Spitze M, und deren Grundfläche ihrer Lage und Grösse nach das Parallelogramm des Paares p ist, u. s. w., so ist, wenn die Ebenen der drei Paare durch einen und denselben Punkt N gehen:

$$Mp + Mp' = Mr.$$

Kommt nun zu den Paaren p, p' ein drittes p'', dessen Ebene gleichfalls durch N gehe, — gleichviel, ob sie auch durch die gemeinschaftliche Durchschnittslinie von p, p', r geht, oder nicht, — und giebt dieses Paar p'' in Verbindung mit p und p', oder mit r, das Paar r' als resultirendes, so hat man, wenn auch die Ebene von r' durch N gelegt wird, $Mr + Mp'' = Mr'$, folglich

$$Mp + Mp' + Mp'' = Mr',$$

und so fort bei noch mehrern durch denselben Punkt N gelegten Paaren, wenn auch hier je zwei Pyramiden mit einerlei oder entgegengesetzten Zeichen genommen werden, je nachdem die Paare, zu denen sie gehören, von M aus gesehen, mit einerlei oder entgegengesetztem Sinne erscheinen.

Hat man daher ein System von Paaren im Raume, deren Ebenen sich in einem und demselben Punkte N schneiden, so ist die algebraische Summe der Pyramiden, welche irgend einen andern Punkt M zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und deren Grundflächen in den Ebenen der Paare liegen und den Momenten der letztern proportional sind, gleich einer Pyramide mit derselben Spitze M und mit einer

Grundfläche, die in der durch AN gelegten Ebene des resultirenden Paares enthalten und dem Momente desselben proportional ist.

Haben aber die Paare kein resultirendes, sondern sind sie im Gleichgewichte, so ist für jeden Ort von M die Summe der Pyramiden null. Denn weil dann jedes der Paare, z. B. p, im entgegengesetzten Sinne genommen, das resultirende der jedesmal übrigen ist, und mit dem Sinne eines Paares zugleich das Zeichen seiner Pyramide in das entgegengesetzte verwandelt wird, so hat man $-Mp = Mp' + Mp'' + \ldots$, folglich $Mp + Mp' + Mp'' + \ldots = 0$.

§. 53.

Kehren wir noch einmal zu der in §. 51. gemachten Construction zurück und nehmen an, dass die in den Ebenen der zwei zusammenzusetzenden Paare über dem Durchschnitte AN dieser Ebenen beschriebenen, den Momenten der Paare gleichen Parallelogramme AC, AE (Fig. 22.) rechtwinklich gemacht worden sind. Alsdann wird in Folge der Construction auch AG ein Rechteck, die zwei Paare CN, AB; EN, AD und ihr resultirendes GN, AF erhalten gleiche Breiten $= AN$, die einfachen Kräfte CN, EN und GN werden folglich den Momenten der Paare proportional, und die Winkel dieser Kräfte werden den Winkeln gleich, unter denen sich die Ebenen der Paare schneiden. Sollen daher zwei in zwei nicht parallelen Ebenen liegende Paare zusammengesetzt werden, so kann man auch so verfahren, dass man zwei den Momenten der Paare proportionale gerade Linien unter demselben Winkel an einander setzt, den die Ebenen der Paare mit einander machen, und von diesen Linien, als Kräfte

betrachtet, die Resultante bestimmt. Das Moment des resultirenden Paares ist alsdann dieser Resultante proportional, und seine Ebene macht mit den Ebenen der gegebenen Paare dieselben Winkel, welche die Resultante mit jenen zwei Linien bildet.

Da der Winkel zweier Ebenen immer dem Winkel gleich ist, welchen zwei auf den Ebenen errichtete Normalen mit einander machen, so lässt sich die Regel für die Zusammensetzung zweier Paare auch folgendergestalt abfassen:

Durch einen beliebigen Punkt O lege man zwei die Ebenen der beiden Paare normal treffende und den Momenten derselben proportionale Linien OP, OQ, und suche die Resultante dieser Linien, welche OR (die Diagonale des Parallelogramms $POQR$) sey. Ein Paar, dessen Ebene normal auf OR, und dessen Moment der OR proportional ist, wird das verlangte resultirende seyn. Dabei ist hinsichtlich des Sinnes der Paare noch zu bemerken, dass, wenn die Richtungen von P nach O, von Q nach O, von R nach O, successive als die Richtung vom Kopfe nach den Füssen des Beschauenden genommen werden, jedes der zugehörigen Paare mit einerlei Sinn erscheinen muss.

Um diese Vorschrift für die Zusammensetzung zweier Paare noch einfacher ausdrücken zu können, wollen wir gerade Linien, die auf den Ebenen der Paare normal stehen, deren Längen sich wie die Momente der Paare verhalten, und deren Richtungen so genommen sind, dass in Bezug auf sie die resp. Paare einerlei Sinn haben, die Axen der Paare nennen. Alsdann ist, wenn die Axen sämmtlich durch einen und denselben Punkt gelegt werden, die Resultante der Axen der zwei zusammenzusetzenden Paare die Axe des resultirenden

Paares; und man übersieht leicht, dass dieselbe einfache Regel auch bei jeder grösseren Zahl zusammenzusetzender Paare ihre Richtigkeit hat, und somit die Zusammensetzung von Paaren in jedem Falle auf die Zusammensetzung einfacher Kräfte, die in einem Punkte sich treffen, zurückgeführt ist. Sind diese durch die Axen der Paare vorgestellten Kräfte im Gleichgewichte, so herrscht auch Gleichgewicht zwischen den Paaren selbst.

§. 54.

Noch eine Methode, Paare, die in verschiedenen Ebenen liegen, zusammenzusetzen, gründet sich auf folgende Betrachtungen.

1) Bei dem Parallelogramm $ABCD$ ist die Kraft CA gleichwirkend mit den Kräften CB, CD; folglich sind BC, CA, AB gleichwirkend mit CD, AB; d. h. drei Kräfte, welche ihrer Richtung und Grösse nach durch die drei Seiten eines Dreiecks dargestellt werden, sind gleichwirkend mit einem Paare, welches in der Ebene des Dreiecks (oder in einer damit parallelen Ebene) liegt, und dessen Moment durch den doppelten Inhalt des Dreiecks ausgedrückt wird. (Vergl. §. 47. *c*.).

2) Seyen A, B, C, D die vier Ecken einer dreiseitigen Pyramide. Man lasse in jeder der sechs Kanten derselben zwei der Kante proportionale und einander entgegengesetzte Kräfte wirken: AB, BA, AC, CA, u. s. w. Diese zwölf, einander zu zweien, und daher auch alle zusammen, das Gleichgewicht haltenden Kräfte kann man aber auch zu dreien so zusammenfassen, dass man vier in den vier Seitenflächen der Pyramide wirkende Paare erhält: nämlich erstens das Paar, worauf sich die drei Kräfte AB, BC, CA in der Ebene ABC reduciren, und dessen Moment der doppelte In-

halt des Dreiecks ABC ist, und eben so noch d
andere Paare, deren Ebenen und Momente durch
Dreiecke CBD, CDA, ADB bestimmt sind.

Vier in den vier Seitenflächen einer Pyramide w
kende Paare, deren Momente den Flächen selbst p
portional sind, und welche für den Beschauenden, w
dessen Richtung vom Kopfe nach den Füssen jedesı
von der äussern nach der innern Seite der Fläche ge
einerlei Sinn haben, halten demnach einander das Glei
gewicht.

3) Werden die Kräfte dreier dieser vier Paa
z. B. der in CBD, CDA, ADB wirkenden, in
entgegengesetzten verwandelt, so dass nunmehr 2. DB
2. DCA, 2. DAB die Momente der Paare ausdrück
so werden diese Paare zusammen gleichwirkend
dem vierten, dessen Moment 2. ABC ist. Es las
sich aber die Dreiecke DBC, DCA, DAB a
ansehen als die Projectionen des Dreiecks ABC
die Ebenen dieser drei Dreiecke durch Linien, wel
resp. mit DA, DB, DC parallel sind. Zugle
verhält sich dabei jede in der Ebene ABC enthalt
Fläche, z. B. das Parallelogramm eines Paares,
ihrer Projection auf eine der drei Ebenen DBC u. s.
wie das Dreieck ABC zu dem Dreiecke DBC u. s

*Projicirt man demnach ein Paar auf drei s
unter beliebigen Winkeln in einem Punkte sch
dende Ebenen, und zwar so, dass jedesmal die p
jicirenden Linien mit dem Durchschnitte der bei
Ebenen, auf welche nicht projicirt wird, para
sind, so erhält man drei Paare, welche zusam
gleiche Wirkung mit dem erstern Paare haben.*

4) Soll daher von mehrern gegebenen Paaren
resultirende Paar gefunden werden, so projicire n

auf besagte Weise jedes der erstern auf drei Ebenen, die sich in einem Punkte schneiden. Die hierdurch in jeder dieser Ebenen entstehenden Paare sind aber (§. 23.) gleichwirkend mit einem einzigen, dessen Moment der Summe der Momente der ersteren gleich ist; und somit reduciren sich alle gegebenen Paare auf drei in den drei Ebenen wirkende, die nun wiederum, durch Verbindung je zweier, zu einem Paare zusammenzusetzen sind.

5) Findet sich in jeder der drei Ebenen das Moment der Projectionen null, so herrscht in jeder der Ebenen, und mithin auch zwischen den gegebenen Paaren selbst, Gleichgewicht; und umgekehrt: sollen die gegebenen Paare im Gleichgewichte seyn, so muss dieses zwischen den Projectionen in jeder Ebene besonders statt finden, und daher das Moment der Projectionen in jeder Ebene null seyn. Denn wäre nur in zwei Ebenen das Moment der Projectionen null, so reducirte sich das System auf ein Paar in der dritten Ebene. Wäre aber bloss in einer oder in gar keiner der drei Ebenen das Moment null, so hätte man zuletzt zwei Paare in zwei nicht parallelen Ebenen, oder drei Paare, deren Ebenen sich nur in einem Punkte schneiden, und es könnte dann nach §. 52. *a.* eben so wenig Gleichgewicht vorhanden seyn.

6) Hat man alle Paare des Systems auf drei in drei coordinirten Ebenen liegende Paare, deren Momente $= L$, M, N seyen, zurückgebracht, und hat man diese drei Paare zu einem einzigen, dessen Moment $= W$, zusammengesetzt, so muss man durch Projection von W auf die drei Ebenen die drei Momente L, M, N selbst wieder erhalten. Denn ergäben sich als Projectionen von W drei Paare, deren Momente L', M',

N' von den vorigen verschieden wären, so müssten weil L, M, N sowohl, als L', M', N' mit W gleich wirkend sind, die drei Paare, deren Momente $= L' - L$, $M' - M$, $N' - N$, im Gleichgewichte seyn. Diess ist aber, wie eben gezeigt worden, nicht anders möglich, als wenn $L' - L = 0$, $M' - M = 0$, $N' - N = 0$ folglich u. s. w.

§. 55.

Zusätze. *a.* Ist $ABCD$ ein Viereck, mag es in einer Ebene liegen, oder nicht, so sind die vier Kräfte AB, BC, CD, DA gleichwirkend mit den Kräften AB, BC, CA und AC, CD, DA, also (§. 54. 1.) gleichwirkend mit zwei Paaren, deren Ebenen und Momente die Dreiecke ABC und ACD angeben, folglich immer gleichwirkend mit einem einzigen Paare, das, wenn das Viereck ein ebenes ist, in der Ebene desselben liegt, und zum Momente die doppelte Summe der zwei Dreiecke, d. i. den doppelten Inhalt des Vierecks hat. Auf dieselbe Art kann man bei jedem Vieleck von mehrern Seiten verfahren, indem man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, und kann daher den allgemeinen Satz aufstellen:

Ein System von Kräften, welche ihren Richtungen und Intensitäten nach durch die Seiten irgend eines Vielecks vorgestellt werden, lässt sich immer auf ein Paar reduciren, das, wenn das Vieleck ein ebenes ist, in der Ebene desselben liegt und ein dem doppelten Inhalte des Vielecks gleiches Moment hat.

b. Auf ähnliche Weise lässt sich auch der Satz in Nr. 2. des vorigen §. von der dreiseitigen Pyramide verallgemeinern und auf jedes Polyeder ausdehnen. — Jede Kante eines Polyeders ist die gemeinschaftliche

Seite zweier dasselbe begrenzenden Flächen, und wenn der Sinn jeder dieser Flächen so genommen wird, dass er einem auf ihre Aussenseite herabschauenden Auge bei allen derselbe ist, so hat in den Perimetern je zweier an einander stossenden Flächen die ihnen gemeinschaftliche Seite entgegengesetzte Richtungen; z. B. die Kante BC der obigen Pyramide $ABCD$, als die Seite BC der Fläche ABC, und als die Seite CB der Fläche CBD. Lässt man daher in jeder, ihrem Sinne nach auf die beschriebene Weise genommenen, Fläche jede Seite eine Kraft vorstellen, so halten sich diese Kräfte paarweise das Gleichgewicht. Zugleich aber sind alle zum Perimeter einer und derselben Fläche gehörigen Kräfte mit einem Paare gleichwirkend, dessen Moment dem Inhalte der Fläche proportional ist; und wir schliessen daher:

Ein System von Paaren, deren Ebenen und Momente durch die Flächen eines Polyeders dargestellt werden, und welche, wenn alle Flächen von einerlei Seite (von der äussern oder der innern) betrachtet werden, insgesammt einerlei Sinn haben, ist im Gleichgewichte.

c. Nach §. 54. 6. ist das Moment L der Projection eines Systems von Paaren auf eine beliebige Ebene dem Momente der Projection des resultirenden Paares W auf dieselbe Ebene gleich. Da nun das Moment der Projection eines Paares W auf eine mit seiner Ebene parallele Ebene dem Momente des projicirten Paares selbst gleich ist, was auch die projicirenden Linien mit den zwei parallelen Ebenen für einen Winkel machen; und da, wenn man ein Paar W durch Linien, die in seiner Ebene selbst liegen, auf irgend eine andere Ebene projicirt, das Moment der Projection immer null

ist: so besitzt die Ebene des Paares, worauf sich ein System von Paaren reduciren lässt, und welche Ebene man die **Hauptebene** des Systems nennt, die zwei Eigenschaften, *dass erstens das Moment der Projection des Systems auf die Hauptebene immer von derselben Grösse ist, unter welchem Winkel auch die projicirenden Linien die Hauptebene schneiden; und dass zweitens, wenn das System durch Linien, welche mit der Hauptebene parallel sind, auf irgend eine andere, mit ihr nicht parallele, Ebene projicirt wird, das Moment der Projection null ist.*

Uebrigens ist schon wegen §. 50. die Lage der Hauptebene nicht vollkommen, sondern nur den Winkeln nach bestimmt, welche sie mit den Ebenen der Paare des Systems bildet; d. h. es giebt ein System paralleler Ebenen, deren jede als die Hauptebene angesehen werden kann.

Eine dritte merkwürdige Eigenschaft der Hauptebene besteht darin, *dass, wenn man die projicirenden Linien die Projectionsebene immer rechtwinklig schneiden lässt, das Moment der Projection auf die Hauptebene grösser ist als das Moment der Projection auf irgend eine andere Ebene.* Denn da das Moment der Projection des Systems immer dem Momente der Projection des resultirenden Paares gleich ist, und dieses Paar in der Hauptebene liegt, so ist unter der Voraussetzung rechtwinkliger Projectionen das Moment der Projection des Systems auf irgend eine Ebene gleich dem Momente des resultirenden Paares, multiplicirt in den Cosinus des Winkels, den diese Ebene mit der Hauptebene macht; folglich am grössten, wenn der gedachte Winkel null ist, also die Projectionsebene mit der Hauptebene parallel geht. — Ist dieser

Winkel ein rechter, steht also die Projectionsebene auf der Hauptebene normal, so ist der Cosinus des Winkels, und daher auch das Moment der Projection des Systems null, wie auch schon daraus folgt, dass dann die projicirenden Linien mit der Hauptebene parallel laufen. Eben so leicht sieht man endlich, *dass für alle Ebenen, welche mit der Hauptebene gleiche Winkel machen, das Moment der Projection von gleicher Grösse ist.*

§. 56.

Alle die vorigen Sätze kann man auch rein geometrisch ausdrücken, indem man dem Systeme der Paare ein System begrenzter Flächen, die in verschiedenen Ebenen liegen, und dem Momente der Projection auf eine beliebige Ebene die Summe der Projectionen der Flächen auf dieselbe Ebene substituirt. Wenn demnach von einem solchen Systeme von Flächen die drei algebraischen Summen ihrer Projectionen auf drei Ebenen, die sich nur in einem Punkte schneiden, einzeln null sind, so ist es auch die Summe ihrer Projectionen auf die vierte Ebene. Ist aber diese Summe für keine, oder doch nicht für jede der drei Ebenen null, so lässt sich immer eine Ebene angeben, die mit den Ebenen des Systems bestimmte Winkel macht, die Hauptebene des Systems, und in dieser Ebene eine Fläche von bestimmtem Inhalte, die resultirende Fläche, so dass die Summe der Projectionen der gegebenen Flächen auf irgend eine Ebene der Projection der resultirenden Fläche gleich ist; dass daher, wenn nur rechtwinklige Projectionen zugelassen werden, die Summe der Projectionen auf die Hauptebene die grösste unter allen und der resultirenden Fläche selbst gleich ist; u. s. w.

Da endlich ein System von Kräften, welche durch

die Seiten eines Vielecks vorgestellt werden, sich auch dann, wenn das Vieleck kein ebenes ist, auf ein Paar reducirt (§. 55. *a.*), so kann man die eben aufgestellten geometrischen Sätze noch mehr verallgemeinern, indem man, statt in Ebenen enthaltener Flächen, nicht ebene Vielecke, oder selbst in sich zurücklaufende Curven von doppelter Krümmung setzt. So muss es z. B. für jede Curve dieser Art eine Hauptebene geben von der Beschaffenheit, dass wenn man die Curve durch Parallelen mit dieser Ebene auf irgend eine andere damit nicht parallele Ebene projicirt, der Inhalt der Projection $= 0$ ist. Diese Projection muss folglich eine in sich zurücklaufende und dabei sich selbst ein oder mehrere Male schneidende Curve seyn. Vergl. §. 45. 3.

Zusatz. Besteht das System aus begrenzten Ebenen, so kann man zufolge des §. 52. unter die Eigenschaften der Hauptebene noch die setzen, dass, wenn man alle Ebenen des Systems und die Hauptebene durch einen und denselben Punkt gehen lässt, die Summe der Pyramiden, welche irgend einen Punkt zur gemeinschaftlichen Spitze und die begrenzten Ebenen zu Grundflächen haben, der Pyramide gleich ist, welche dieselbe Spitze und die resultirende Fläche in der Hauptebene zur Grundfläche hat.

Diese Gleichung zwischen Pyramiden findet selbst dann noch statt, wenn die Ebenen des Systems sich nicht in einem Punkte schneiden, sondern irgend andere bestimmte Lagen haben. Die Hauptebene, — wenn anders eine solche existirt, und wenn nicht, wie es auch geschehen kann, die Summe der Pyramiden über den Flächen des Systems für jeden Ort der gemeinschaftlichen Spitze von gleicher Grösse ist, — hat dann ebenfalls eine vollkommen bestimmte Lage.

Dieser letztere Satz kann aus dem vorhergehenden leicht vermittelst des Lehnsatzes erwiesen werden, dass die algebraische Summe zweier Pyramiden über zwei einander gleichen, parallelen und ihrem Sinne nach entgegengesetzten Flächen für alle Oerter ihrer gemeinschaftlichen Spitze constant ist. Doch hat dieser Lehnsatz eben so wenig, als der damit erweisbare Satz selbst, einen ihm in der Statik vollkommen entsprechenden.

Fünftes Kapitel.

Vom Gleichgewichte zwischen Kräften im Raume überhaupt.

§. 57.

Seyen AB, CD, EF, ... mehrere auf einen festen Körper nach beliebigen Richtungen im Raume wirkende Kräfte. Durch einen beliebigen Punkt N des Körpers lege man $A'B'$, $C'D'$, $E'F'$, ... resp. mit AB, CD, ... gleich, parallel und nach entgegengesetzten Richtungen, so ist, wie in §. 32., das System der Kräfte AB, CD, ... welches S heisse, gleichwirkend mit dem Systeme V der einfachen durch N gehenden Kräfte $B'A'$, $D'C'$, ... und dem Systeme W der Paare AB, $A'B'$; CD, $C'D'$; ... und es können nun, wie a. a. O., nicht mehr als folgende vier Fälle eintreten: dass entweder jedes der beiden Systeme V und W für sich, oder nur das System V, oder nur W, oder keines von beiden im Gleichgewichte ist; und dass daher das System S selbst entweder im Gleichgewichte ist, oder sich auf ein Paar w (§. 51. b.), oder auf eine einfache

Kraft v, oder auf ein Paar w und eine einfache Kraft v zugleich reducirt.

Letzterer Fall, welches der allgemeinste ist, macht noch eine Erörterung nothwendig. Liegt nämlich v in der Ebene von w, so lassen sich beide auf eine einfache Kraft, wie im zweiten Falle, zurückbringen. Dasselbe gilt auch dann, wenn v mit der Ebene von w parallel läuft; denn man hat nur das Paar w parallel mit sich fortzuführen (§. 50.), bis es mit v in dieselbe Ebene kömmt, und kann es hierauf mit v, wie vorhin, vereinigen.

Schneidet aber v die Ebene von w, so lassen sich die eine Kraft v und die zwei Kräfte von w zwar nicht auf eine, aber doch immer auf zwei reduciren. Denn man verlege das Paar w in seiner Ebene so, dass die eine seiner Kräfte durch den Durchschnitt der Ebene mit v geht, also v selbst schneidet, und verbinde hierauf diese eine Kraft mit v. Die Resultante dieser Verbindung und die andere Kraft des Paares w sind dann die zwei mit v und w gleichwirkenden Kräfte, die, wie überdiess einleuchtet, nicht in einer Ebene liegen.

Eben so können auch umgekehrt zwei Kräfte v und v', welche nicht in einer Ebene enthalten sind, immer in ein Paar und eine einfache Kraft verwandelt werden. Denn legt man durch einen beliebigen Punkt in der Richtung von v' zwei der v gleiche, parallele und einander entgegengesetzte, sich selbst also das Gleichgewicht haltende, Kräfte, so bildet die eine derselben mit v ein Paar, und die andere lässt sich mit v' zu einer die Ebene des Paares schneidenden Kraft zusammensetzen.

Dass aber zwei Kräfte, welche nicht in einer Ebene liegen, also auch ein Paar w und eine die

Ebene desselben schneidende Kraft v, *nicht auf eine einzige Kraft reducirbar sind*, dass folglich dieses w und v nicht mit einer einzigen Kraft v' ins Gleichgewicht gebracht werden können, dies lässt sich also beweisen. — Gesetzt, es wäre Gleichgewicht zwischen w, v und v' möglich, so kann erstlich die Kraft v' mit v nicht in einer Ebene liegen. Denn sie würde dann mit v entweder im Gleichgewichte seyn, oder mit v ein Paar bilden, oder sich mit v zu einer einfachen Kraft zusammensetzen lassen. Alsdann bliebe im ersten Falle w zurück, im zweiten Falle hätte man nächst w ein zweites nicht in der Ebene von w liegendes Paar, und im dritten nächst w noch eine einfache Kraft, also in keinem der drei Fälle Gleichgewicht. Setzen wir aber zweitens, dass v und v' nicht in einer Ebene liegen, so lassen sie sich nach dem Vorigen in ein Paar w' und eine einfache Kraft umwandeln, und es müsste daher die letztere mit dem aus w und w' zusammenzusetzenden Paare das Gleichgewicht halten, welches ebenfalls unmöglich ist (§. 18. Zus.); folglich u. s. w.

Nach diesem Allen sind daher bei einem Systeme S von Kräften im Raume vier Fälle zu unterscheiden, indem dasselbe entweder im Gleichgewichte ist, oder sich auf ein Paar, oder auf eine einfache Kraft, oder auf zwei nicht in einer Ebene enthaltene Kräfte zurückbringen lässt. Der erste dieser Fälle tritt ein, wenn von den Systemen V und W jedes für sich im Gleichgewichte ist; der zweite, wenn es nur V ist; der dritte, wenn es nur W ist, oder wenn W sich auf ein Paar reducirt, dessen Ebene mit der Resultante von V parallel geht; der vierte, wenn weder V noch W im Gleichgewichte ist, und die Resultante von V und die Ebene des resultirenden Paares von W sich schneiden.

Da mit diesen Beziehungen zwischen V und W alle möglichen Fälle erschöpft sind, so sind sie nicht bloss die nothwendigen, sondern auch die hinreichenden Bedingungen, unter welchen das System S im Gleichgewichte ist, oder sich auf ein Paar reduciren lässt u. s. w. und wir können daher umgekehrt schliessen: Soll in dem Systeme S Gleichgewicht herrschen, so muss von den Systemen S und W jedes für sich im Gleichgewichte seyn; u. s. w.

§. 58.

Das mit W bezeichnete System von Paaren wurde gebildet, indem durch einen beliebigen Punkt N mit den Kräften AB, CD, ... des Systems S gleiche und parallele, aber nach entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräfte $A'B'$, $C'D'$, ... gelegt wurden. Die Momente der Paare AB, $A'B'$; CD, $C'D'$; ..., aus denen W besteht, sind daher den Doppelten der Dreiecke NAB, NCD, ... gleich. Zudem ist das System W so beschaffen, dass die Ebenen seiner Paare sich in einem und demselben Punkte N schneiden, und man kann folglich auf dasselbe den in §. 52. erhaltenen Satz anwenden. Soll demnach das System S, mithin auch das System W (vor. §.), im Gleichgewichte seyn, so muss jenem Satze zufolge die Summe der Pyramiden, welche die Dreiecke NAB, NCD, .. zu Grundflächen und einen beliebigen Punkt M zur gemeinschaftlichen Spitze haben, d. i. die Summe der Pyramiden $MNAB$, $MNCD$, ... also der Pyramiden, welche MN zur gemeinschaftlichen Kante und AB, CD, .. zu gegenüberstehenden Kanten haben, null seyn; und wir haben somit folgendes Theorem gefunden:

Beim Gleichgewichte eines Systems von Kräften,

welche auf einen frei beweglichen Körper nach beliebigen Richtungen im Raume wirken, ist die Summe der Pyramiden, welche eine gemeinschaftliche Kante von beliebiger Lage und Länge, und die Kräfte selbst, ihrer Richtung und Intensität nach, durch gerade Linien vorgestellt, zu gegenüberstehenden Kanten haben, immer gleich null.

Was die Vorzeichen dieser Pyramiden anlangt, so richtet sich jedes, z. B. das Zeichen von $MNAB$, nach dem Sinne, mit welchem das zugehörige Paar AB, $A'B'$ einem von M auf dasselbe herabsehenden Auge erscheint (§. 52.), oder auch, — weil N ein Punkt in $A'B'$ ist, — nach dem durch die Folge der Buchstaben NAB ausgedrückten Sinne aus demselben Gesichtspunkte. Man nehme daher die Richtung MN der gemeinschaftlichen Kante, als die Richtung vom Kopfe nach den Füssen, und bestimme das Zeichen jeder Pyramide, nachdem die Richtung AB der gegenüberliegenden Kante dem ihr zugewendeten Auge nach rechts oder nach links gehend erscheint; oder, was auf dasselbe hinauskommt: man denke sich den Körper, auf welchen die Kräfte wirken, an MN, als einer Axe, befestigt, und gebe dann je zwei Pyramiden einerlei oder entgegengesetzte Zeichen, jenachdem die Kräfte, welche durch die gegenüberliegenden Kanten vorgestellt werden, den Körper um MN nach einerlei oder entgegengesetzten Seiten zu drehen streben.

§. 59.

Beim Gleichgewichte eines in einer Ebene enthaltenen Systems von Kräften war die Summe der Dreiecke, welche irgend einen Punkt M der Ebene zur gemeinschaftlichen Spitze und die Kräfte zu gegenüberliegenden

Seiten hatten, $=0$. Was also dort ein einfacher Punkt *M* war, geht hier, wo die Kräfte nicht mehr in derselben Ebene liegen, in eine gerade Linie *MN* über, und die dortigen Dreiecke *MAB*,... verwandeln sich damit in dreiseitige Pyramiden *MNAB*,... So wie nun in jenem einfachern Falle die Doppelten der Dreiecke *MAB*,..., oder die Parallelogramme, zu denen sie sich ergänzen lassen, die Momente der Kräfte *AB*,.. in Bezug auf den Punkt *M* hiessen, so wollen wir auf analoge Weise die Sechsfachen der Pyramiden *MNAB*,..., oder die Parallelepipeda, welche *MN* und *AB*, u. s. w. zu gegenüberliegenden Kanten haben, jedes derselben mit dem ihm nach der Regel des vorigen §. zukommenden Zeichen genommen, die Momente der Kräfte *AB*,.. in Bezug auf die Gerade oder Axe *MN* nennen. Die Summe der Momente aller Kräfte des Systems in Bezug auf dieselbe Axe soll, eben so wie bei Systemen in Ebenen, das Moment des Systems selbst rücksichtlich dieser Axe heissen. — Der Satz des vorigen §. lautet damit also:

Ist ein System von Kräften im Raume im Gleichgewichte, so ist für jede beliebige Axe das Moment des Systems null; woraus nach der schon in §. 33. angewendeten Schlussart weiter folgt:

Gleichwirkende Systeme haben in Bezug auf eine und dieselbe beliebige Axe einander gleiche Momente.

Zusatz. Eine der Flächen des Parallelepipedums, von welchem *MN* und *AB* zwei gegenüberliegende Kanten sind, ist das Parallelogramm, welches *MN* und eine von *M* ausgehende, der *AB* gleiche und parallele Gerade zu anstossenden Seiten hat. Der Inhalt dieses Parallelogramms ist $= MN.AB.\sin(MN^{\wedge}AB)$. Betrachten wir dasselbe als Grundfläche des Parallelepi-

pedums, so ist die Höhe des letztern gleich dem von einem Punkte der AB auf die Grundfläche gefällten Perpendikel, d. i. dem kürzesten Abstande der AB von MN. Der Inhalt des Parallelepipedums $MNAB$, oder der numerische Werth des Moments der Kraft AB in Bezug auf die Axe MN, ist daher, wenn wir noch die Länge der Axe $=1$ setzen, gleich dem Product aus der Kraft in den kürzesten Abstand ihrer Richtung von der Axe und in den Sinus des Winkels dieser Richtung mit der Axe.

Hiermit stimmt auch, wie man leicht wahrnimmt, die gewöhnliche Definition des Moments einer Kraft in Bezug auf eine Axe vollkommen überein. Denn nach dieser Definition wird das Moment erhalten, wenn man die Kraft auf eine die Axe rechtwinklig schneidende Ebene rechtwinklig projicirt und diese Projection ($=$ der Kraft, multiplicirt mit dem Sinus des Winkels ihrer Richtung mit der Axe,) in den Abstand der Projection von der Axe ($=$ dem kürzesten Abstande der Kraft von der Axe) multiplicirt.

Uebrigens soll in dem Folgenden, so lange es nur auf das gegenseitige Verhältniss der Momente, nicht auf ihre absoluten Werthe, ankommt, grösserer Kürze willen die Pyramide $MNAB$ selbst, nicht ihr Sechsfaches oder das Parallelepipedum, welches mit ihr zwei gegenüberliegende Seiten gemein hat, als das Moment von AB in Bezug auf MN genommen werden.

§. 60.

Von einer einzigen Kraft AB ist das Moment in Bezug auf die Axe MN, oder die Pyramide $MNAB$, nur dann null, wenn MN mit AB in einerlei Ebene liegt. Eben so ist von zwei Kräften AB, CD, deren

Richtungen nicht zusammenfallen, die Summe der Momente nicht für jede Axe null. Legt man z. B. die Axe so, dass sie mit AB, nicht aber zugleich mit CD, in einer Ebene liegt, so ist nur von AB, aber nicht von CD das Moment null, also auch nicht die Summe der Momente null *).

Ist demnach ein System von Kräften nicht im Gleichgewichte, sondern gleichwirkend mit einer einfachen Kraft, oder mit einem Paare, oder mit zwei nicht in einer Ebene enthaltenen Kräften (§. 57.), so ist nach vorigem §. das Moment des Systems dem Momente dieser einen oder zwei resultirenden Kräfte gleich, und daher nicht für jede Axe null. Da also, je nachdem zwischen den Kräften eines Systems Gleichgewicht herrscht, oder nicht, das Moment des Systems für jede, oder nicht für jede Axe null ist, so gelten die Sätze des vorigen §. auch umgekehrt, nämlich:

Ist das Moment eines Systems von Kräften im Raume für jede beliebige Axe null, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht; und wenn die Momente zweier Systeme für jede beliebige Axe, auf welche sie gemeinschaftlich bezogen werden, einander gleich sind, so sind die Systeme gleichwirkend.

---

*) Liegen drei Kräfte nicht in einer Ebene, so schneidet nicht jede Axe, welche zweien derselben begegnet, auch die dritte. Für eine Axe, welche blos zwei derselben trifft, ist aber das Moment aller drei Kräfte gleich dem Momente der nicht getroffenen dritten, also nicht null. Drei Kräfte, die nicht in einer Ebene liegen, können sich folglich nicht das Gleichgewicht halten, und zwei Kräfte, die nicht in einer Ebene enthalten sind, können nicht auf eine einzige Kraft reducirt werden. Dasselbe ist schon im §. 57., jedoch auf eine weniger einfache Art, bewiesen worden.

§. 61.

Die Bedingung, dass das Moment des Systems für jede Axe null ist, d. h. dass die Summe der Pyramiden, welche eine gemeinschaftliche Kante und die Kräfte selbst zu gegenüberliegenden Kanten haben, für jede Lage der gemeinschaftlichen Kante sich auf Null reducirt, ist demnach bei Kräften, die auf einen frei beweglichen Körper wirken, die für alle möglichen Richtungen der Kräfte geltende Bedingung des Gleichgewichts, das oberste Princip dieses Gleichgewichts. Aus ihm müssen sich daher die im Früheren erhaltenen Bedingungen für die speciellen Fälle, wenn die Kräfte in einer und derselben Ebene liegen, oder ihre Richtungen in eine und dieselbe Gerade fallen, rückwärts ableiten lassen.

In der That, sind die Kräfte AB, CD,... in einer Ebene enthalten, so werden die Pyramiden $MNAB$, $MNCD$,..., wenn man den willkührlichen Punkt N und damit die Dreiecke NAB, NCD,... in der Ebene selbst nimmt, diesen Dreiecken proportional, und es muss folglich beim Gleichgewichte die Summe dieser Dreiecke null seyn. Fallen aber die Kräfte in eine einzige Gerade, so sind die Dreiecke NAB, NCD,.. gleichfalls in einer Ebene enthalten, und ihnen nicht nur die Pyramiden $MNAB$,..., sondern auch die Kräfte AB,..., also auch die Kräfte den Pyramiden proportional, daher in diesem Falle zum Gleichgewichte nur erfordert wird, dass die Summe der Kräfte selbst null ist.

§. 62.

Wir wollen nunmehr die auf einen Körper wirkenden Kräfte, indem wir sie auf ein beliebiges Coordi-

natensystem beziehen, ihrer Grösse und Richtung nach durch Zahlen ausgedrückt annehmen und die Relationen zu bestimmen suchen, die zwischen diesen Zahlen beim Gleichgewichte statt finden müssen.

Seyen daher, in Bezug auf ein System dreier sich unter beliebigen Winkeln schneidenden Coordinatenaxen, von einer, durch ihre Richtung und Länge die Richtung und Intensität einer Kraft ausdrückenden, Geraden AB die Coordinaten ihrer Endpunkte A und B respectiv

$$x,\ y,\ z \text{ und } x+X,\ y+Y,\ z+Z.$$

Hierbei sind also x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Richtung der Kraft, welcher Punkt nach der gewöhnlichen Art durch (x, y, z) ausgedrückt werde. X, Y, Z aber sind die Projectionen der auf analoge Weise mit (X, Y, Z) zu bezeichnenden Kraft AB auf die drei Coordinatenaxen. Durch diese Projectionen, die sich ihrer Grösse nach nicht ändern, wenn AB parallel mit sich fortgeführt wird, werden die Grösse und die Winkel von AB mit den Coordinatenaxen bestimmt, so dass (mX, mY, mZ) eine Kraft vorstellt, die mit der Kraft (X, Y, Z) zusammenfällt oder parallel ist und sich zu ihr, wie m zu 1, verhält; also mit ihr im Gleichgewichte ist, oder ein Paar bildet, wenn $m = -1$ ist. — Das Symbol einer in der Ebene der x, y, oder mit ihr parallel wirkenden Kraft ist $(X, Y, 0)$, so wie $(0, 0, Z)$ das Symbol einer Kraft, deren Richtung in die Axe der z fällt, oder mit ihr parallel ist; u. s. w.

Setzen wir noch von der Axe MN, worauf die Kraft AB bezogen werden soll, die Coordinaten der Endpunkte M und N resp.

$$f,\ g,\ h \text{ und } f+F,\ g+G,\ h+H,$$

so ist jetzt der Inhalt der durch die Coordinaten ihrer Ecken gegebenen Pyramide $MNAB$, als das Moment von AB für MN, zu entwickeln. Nun könnte zwar der Ausdruck dieses Inhaltes, als bekannt genug aus den Elementen der analytischen Geometrie, vorausgesetzt werden. Indessen will ich eine Entwickelung dieses Ausdrucks hier noch mittheilen, die, analog der in §. 34. und §. 35. gegebenen Entwickelung für eine Dreiecksfläche, auf die Statik selbst gegründet ist, und die wegen des einfachen Aufschlusses, den sie über die Bedeutung und den Zusammenhang der einzelnen Glieder des Ausdrucks giebt, einiger Aufmerksamkeit nicht unwerth seyn dürfte.

§. 63.

Lehnsätze über die Pyramide. 1. Um über das dem Ausdrucke $ABCD$ einer Pyramide zukommende Zeichen zu urtheilen, hat man, der in §. 58. gegebenen Vorschrift gemäss, den Kopf nach der im Ausdrucke zuerst gesetzten Ecke A und die Füsse nach der zweiten B zu bringen, und wenn nun, die Augen nach CD gewendet, die Richtung von C nach D von der rechten nach der linken Hand geht, und die Richtung nach links jedesmal für die positive genommen wird, so hat $ABCD$ das positive Zeichen.

Der Ausdruck $ABDC$ derselben Pyramide wird daher negativ seyn.

Eben so wird auch der Ausdruck $ACBD$ einen negativen Werth haben. Denn lässt man den Kopf in A, bringt aber die Füsse nach C, so leuchtet ein, dass dann die Richtung von B nach D rechts gehend erscheinen wird.

Endlich wird auch der Ausdruck $BACD$ negativ

seyn. Denn bringt man seinen Körper in eine, der im ersten Falle statt habenden entgegengesetzte, Lage, so dass der Kopf nach B und die Füsse nach A kommen, so wird auch die Richtung CD der dortigen entgegengesetzt, also nach rechts gehend, erscheinen.

Man sieht hieraus, dass die drei Versetzungen $ABDC$, $ACBD$, $BACD$, welche sich ergeben, wenn man in $ABCD$ je zwei neben einander stehende Buchstaben gegenseitig vertauscht, von $ABCD$ das entgegengesetzte Zeichen haben. Da nun durch fortgesetztes Vertauschen je zweier neben einander stehender Elemente nach und nach alle die 24 Permutationen, welche sich aus 4 Elementen bilden lassen, erhalten werden können, so wird man hiermit von allen durch diese Permutationen ausgedrückten Pyramiden die Vorzeichen anzugeben im Stande seyn. Ist nämlich $ABCD$, wie vorhin, positiv, so ist $ACBD$ negativ, $CABD$ positiv, $CADB$ negativ, $CDAB$ positiv, u. s. w.

2. Habe die Pyramide $ABCD$ gegen ein System dreier coordinirter Axen der x, y, z eine solche Lage, dass A in den Anfangspunkt oder den gemeinschaftlichen Durchschnitt der Axen, und B, C, D resp. in die Axen der x, y, z fallen. Den Winkel der Axe der y mit der Axe der x setze man $=\alpha$, und den Winkel der Axe der z mit der Ebene der x, y, $=\beta$. Alsdann ist, ohne Rücksicht auf die Zeichen, der Inhalt des Dreiecks $ABC = \frac{1}{2} AB.AC.\sin\alpha$, der Abstand des D von der Ebene dieses Dreiecks $= AD.\sin\beta$, und daher der Inhalt der Pyramide $ABCD$

$$= \tfrac{1}{6} r.AB.AC.AD = \Pi, \text{ wo } r = \sin\alpha \sin\beta.$$

Wir wollen nun für jeden der beiden Winkel α und β den Sinn der Drehung, wodurch er bestimmt wird,

so annehmen, dass jeder von ihnen kleiner als 180°, und folglich r positiv wird. Indem wir ferner den Kopf nach A und die Füsse nach B bringen, wollen wir diejenige Richtung (nach rechts, oder links) als die positive setzen, welche CD hat, wenn B, C, D von A nach den positiven Seiten der Axen der x, y, z zu liegen. Da nun alsdann jeder der drei Abschnitte AB, AC, AD positiv ist, so stimmen in diesem Falle der Ausdruck $ABCD$ und sein numerischer Werth Π dem Zeichen nach überein. Es erhellet aber durch unmittelbare Anschauung, dass jedesmal, wenn eine der Ecken B, C, D von der positiven Seite der Axe, worin sie liegt, durch A in die negative übertritt, der Ausdruck $ABCD$ einen Zeichenwechsel erleidet; zugleich aber ändert damit auch der zugehörige Factor von Π sein Zeichen. Mithin wird, unter den gemachten Voraussetzungen, in jedem Falle nicht allein dem absoluten Werthe, sondern auch dem Zeichen nach, durch das Product Π der Inhalt der Pyramide $ABCD$ ausgedrückt.

3. Von zwei auf einen Punkt O (Fig. 23.) wirkenden Kräften OP, OQ ist die Resultante die Diagonale OS des aus den Kräften construirten Parallelogramms. Die Resultante von OS und einer dritten auf O gerichteten Kraft OR, oder die Resultante von OP, OQ, OR, ist die Diagonale OT des aus OS und OR construirten Parallelogramms, d. i. die Diagonale des aus OP, OQ, OR construirten Parallelepipedums, vorausgesetzt, dass die drei Kräfte nicht in einer Ebene liegen. So wie also zwei sich schneidende Kräfte mit Hülfe eines Parallelogramms, so lassen sich drei auf einen Punkt wirkende Kräfte durch Construction eines Parallelepipedums zusammensetzen.

Verbinden wir damit den Satz (§. 59.) von der

Gleichheit der Momente bei gleichwirkenden Systemen von Kräften, so kommt in Bezug auf die Axe MN:

$$MNOP + MNOQ + MNOR = MNOT.$$

Dies giebt uns folgendes, dem in §. 34. aufgestellten Satze analoge, Theorem:

Die algebraische Summe dreier Pyramiden, welche eine gemeinschaftliche Kante MN haben, und deren gegenüberliegende Kanten von einer gemeinschaftlichen Ecke O ausgehen, ist gleich einer Pyramide, welche dieselbe Kante MN hat, und deren gegenüberliegende Kante die von der Ecke O ausgehende Diagonale des aus erstern drei gegenüberliegenden Kanten construirten Parallelepipedums ist.

Auch lässt sich dieser Satz noch folgendergestalt ausdrücken: Legt man durch eine Ecke O einer Pyramide $MNOT$ drei nicht in einer Ebene enthaltene Axen und projicirt auf jede derselben eine der andern Ecken, T, durch eine Gerade, welche mit der Ebene der beiden Axen, auf welche nicht projicirt wird, jedesmal parallel ist, so ist die Pyramide $MNOT$ der Summe der drei Pyramiden gleich, die hervorgehen, wenn man in dem Ausdrucke der erstern für die Ecke T nach und nach ihre drei Projectionen (P, Q, R) setzt. — Uebrigens sieht man von selbst, dass hierbei OP, OQ, OR die Coordinaten von T in Bezug auf das durch O gelegte Axensystem sind.

§. 64.

Aufgabe. Den Inhalt einer Pyramide $MNAB$ durch die Coordinaten ihrer Ecken auszudrücken.

Auflösung. Man lege durch M, als den Anfangspunkt des Coordinatensystems, die Axen der x, y, z

und nenne N_1, N_2, N_3 die Projectionen von N auf diese Axen durch Linien, welche resp. mit den Ebenen der yz, zx, xy parallel sind; auf gleiche Art seyen A_1, A_2, A_3 die Projectionen von A, und B_1, B_2, B_3 die Projectionen von B auf die Axen. Alsdann ist dem eben erwiesenen Satze zufolge:

$$(a) \ldots MNAB = MN_1AB + MN_2AB + MN_3AB;$$

und eben so

$$(b) \ldots MN_1AB = MN_1A_1B + MN_1A_2B + MN_1A_3B.$$

In (b) ist aber das erste Glied rechter Hand $= 0$, weil N_1 und A_1 mit M in einer Geraden, in der Axe der x, liegen. Das zweite Glied ist

$$MN_1A_2B = MN_1A_2B_1 + MN_1A_2B_2 + MN_1A_2B_3$$
$$= MN_1A_2B_3,$$

weil N_1, B_1 in der Axe der x und A_2, B_2 in der Axe der y liegen, und daher $MN_1A_2B_1$ sowohl, als $MN_1A_2B_2$, $= 0$ ist. Gleicherweise findet sich das dritte Glied in (b)

$$MN_1A_3B = MN_1A_3B_2,$$

folglich

$$MN_1AB = MN_1A_2B_3 + MN_1A_3B_2,$$

und eben so

$$MN_2AB = MN_2A_3B_1 + MN_2A_1B_3,$$
$$MN_3AB = MN_3A_1B_2 + MN_3A_2B_1.$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so kommt linker Hand: $MNAB$, zufolge der Gleichung (a), und man erhält, wenn man in den Ausdrücken zur Rechten die Buchstaben so versetzt, dass die Indices stets in der Ordnung 1, 2, 3 auf einander folgen, dass also die drei letzten Ecken jeder Pyramide der Reihe nach in den Axen der x, y, z liegen, und wenn man dabei

die durch die Versetzungen nöthig werdenden Zeichenwechsel nach §. 63. 1. gehörig beobachtet:

$$MNAB = MN_1A_2B_3 + MB_1N_2A_3 + MA_1B_2N_3 - MN_1B_2A_3 - MA_1N_2B_3 - MB_1A_2N_3.$$

Nun wird nach §. 63. 2., wenn man die Coordinaten

von N: $MN_1 = n_1$, $MN_2 = n_2$, $MN_3 = n_3$,
von A: $MA_1 = a_1$, $MA_2 = a_2$, $MA_3 = a_3$,
von B: $MB_1 = b_1$, $MB_2 = b_2$, $MB_3 = b_3$ setzt:

$MN_1A_2B_3 = \frac{1}{6} r n_1 a_2 b_3$, u. s. w., folglich

$$MNAB = \tfrac{1}{6} r [n_1(a_2b_3 - a_3b_2) + n_2(a_3b_1 - a_1b_3) + n_3(a_1b_2 - a_2b_1)];$$

und hiermit ist unter der Annahme, dass M der Anfangspunkt der Coordinaten ist, der Werth der Pyramide $MNAB$, durch die Coordinaten der übrigen Ecken ausgedrückt, gefunden.

Ist M nicht der Anfangspunkt, so hat man nur, um diesen Fall auf den hier vorausgesetzten zurückzuführen, die Coordinaten jeder der übrigen Ecken um die auf die entsprechenden Axen sich beziehenden Coordinaten von M zu vermindern.

§. 65.

Nach den Bezeichnungen, welche in §. 62. für die Coordinaten von M, N, A, B gewählt wurden, sind, nach Abzug derer von M, die Coordinaten

von N....F, G, H,
von A....$x-f$, $y-g$, $z-h$,
von B....$x-f+X$, $y-g+Y$, $z-h+Z$.

Substituirt man dieselben für n_1, n_2, n_3, a_1,... in der zuletzt erhaltenen Formel, so ergiebt sich der sechsfache Werth der Pyramide $MNAB$, d. i. das Moment

der auf den Punkt (x, y, z) wirkenden Kraft (X, Y, Z) in Bezug auf eine Axe, deren Endpunkte (f, g, h) und $(f+F, g+G, h+H)$ sind,

$$=rF[(y-g)Z-(z-h)Y]+rG[(z-h)X-(x-f)Z]$$
$$+rH[(x-f)Y-(y-g)X],$$

wo das Zeichen r die in §. 63. 2. angegebene, von der gegenseitigen Lage der Axen abhängige Bedeutung hat, und dieser zufolge bei einem rechtwinkligen Axensystem $=1$ ist.

Hieraus kann nun leicht weiter das Moment eines Systems von Kräften in beliebiger Anzahl gefunden werden. Denn man hat nur für jede Kraft einzeln ihr Moment nach letzterer Formel zu entwickeln und alle diese Momente zu addiren. Sind daher (X, Y, Z), (X', Y', Z'), (X'', Y'', Z''), ... die Kräfte des Systems und resp. (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z''), ... beliebige Punkte ihrer Richtungen, so ist, wenn man zur Abkürzung die Summen

$$X+X'+X''+\ldots=A,$$
$$Y+Y'+Y''+\ldots=B,$$
$$Z+Z'+Z''+\ldots=C,$$
$$yZ-zY+y'Z'-z'Y'+\ldots=L,$$
$$zX-xZ+z'X'-x'Z'+\ldots=M,$$
$$xY-yX+x'Y'-y'X'+\ldots=N$$

setzt, das Moment des Systems in Bezug auf die durch $f, \ldots H$ bestimmte Axe

$$=rF[L-gC+hB]+rG[M-hA+fC]$$
$$+rH[N-fB+gA].$$

§. 66.

Soll nun das jetzt betrachtete System von Kräften im Gleichgewichte seyn, so muss das Moment des

Systems für jede Lage der Axe MN, also unabhängig von f, g, h, F, G, H, null seyn. Dies giebt folgende sechs nothwendige Bedingungen des Gleichgewichts:

$$A=0,\ B=0,\ C=0,$$
$$L=0,\ M=0,\ N=0.$$

In der That wird, wenn man z. B. g, h, G, $H=0$ setzt, also die Axe MN in der Axe der x liegend und von einer Länge $=F$ annimmt, das Moment des Systems $=rFL$, und daher beim Gleichgewichte $L=0$. Eben so ist rGM oder rHN das Moment des Systems, wenn die Axe des Moments in die Axe der y oder der z fällt und von der Länge G oder H ist; also beim Gleichgewwichte $M=0$ und $N=0$. Setzt man aber bloss h, G, $H=0$, und lässt daher die Axe der Momente in der Ebene der x, y parallel mit der Axe der x liegen, so wird das Moment $=rF(L-gC)$, folglich beim Gleichgewichte $C=0$, weil dann, wie schon erwiesen, $L=0$ ist.

Die sechs Bedingungsgleichungen A, B, ... $N=0$ sind aber nicht allein nothwendig, sondern auch hinreichend, indem wenn sie erfüllt werden, das Moment für jede Lage der Axe null ist und damit Gleichgewicht statt findet.

Die drei ersten dieser sechs Gleichungen drücken aus, dass die Summen der Projectionen der Kräfte auf die Axen der x, der y und der z einzeln null sind, und die drei letzten bedeuten, dass das Moment des Systems in Bezug auf jede dieser drei Axen einzeln null ist.

Zusatz. Werden die Richtungen der Kräfte eines Systems in die direct entgegengesetzten verwandelt, so gehen die sechs von den Intensitäten und Richtungen

der Kräfte abhängigen Grössen: A, B, ... N über in $-A$, $-B$, ... $-N$.

Bezeichnen ferner bei einem zweiten auf dieselben Coordinatenaxen bezogenen Systeme von Kräften, A', B' ... N' dieselben Functionen der Intensitäten und Richtungen der Kräfte, welche A, B, ... N rücksichtlich des vorigen Systems waren, so sind dieselben Functionen für das aus beiden Systemen zusammengesetzte System: $A+A'$, ... $N+N'$.

Ist folglich das zweite System mit dem ersten gleichwirkend, so hat man, weil dann das zweite System, nachdem die Richtungen seiner Kräfte in die entgegengesetzten verwandelt worden, mit dem ersten verbunden, im Gleichgewichte seyn muss, die sechs Gleichungen: $A-A'=0$, ... $N-N'=0$; d. h.

$$A=A',\ B=B',\ C=C',$$
$$L=L',\ M=M',\ N=N'$$

sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen, unter denen die zwei durch A, ... N und A', ... N' bestimmten Systeme von Kräften gleiche Wirkung haben.

§. 67.

Der Weg, auf welchem wir jetzt zu den Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen Kräften im Raume gekommen sind, ist ganz dem analog, den wir bei einem Systeme von Kräften in einer Ebene befolgten. So wie dort die Bedingungen sich daraus ergaben, dass das Moment des Systems für jeden Punkt der Ebene, worauf es bezogen wurde, null seyn musste, so fanden sich hier die Bedingungen, indem wir den allgemeinen Ausdruck des Moments, unabhängig von den die Axe des Moments bestimmenden Grössen, null setzten; und

eben so, wie die dortige Entwickelung sich bloss auf die Zusammensetzung in einer Ebene wirkender Paare gründete, so wurde auch hier nur die Theorie von Paaren im Raume zu Hülfe genommen, so dass die eine Entwickelung von der andern ganz unabhängig war.

Indessen kann man auch, ohne zuvor die Nullität des Moments für jede Axe bewiesen und den allgemeinen Ausdruck dieses Moments entwickelt zu haben, die Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems im Raume aus denen, welche für ein System in einer Ebene gelten, leicht auf folgende Weise herleiten.

1) Aus der Natur der Projectionen folgt, dass, wenn man eine Kraft P und ihre Projectionen X, Y, Z auf die Axen der x, y, z parallel mit ihren Richtungen an einen Punkt O trägt, die von O ausgehende Diagonale des Parallelepipedums, welches X, Y, Z zu Kanten hat, P selbst ist. Nach dem in §. 63. 3. Bemerkten ist aber bei dieser Lage von P, X, Y, Z die erstere Kraft die Resultante der drei letztern, d. h.: die Kraft (X, Y, Z) ist gleich und parallel der Resultante von den in den Coordinatenaxen wirkenden Kräften X, Y, Z.

2) Zum Gleichgewichte eines Systems S im Raume wird erfordert, dass von den zwei Systemen V und W (§. 57.) jedes für sich im Gleichgewichte ist. Es besteht aber V aus den parallel mit ihren Richtungen durch einen Punkt O gelegten Kräften von S. Man nehme nun für den Punkt O den Anfangspunkt der Coordinaten, so wird die Kraft (X, Y, Z) des Systems S nach ihrer Verlegung auf O gleichwirkend mit den Kräften X, Y, Z in den Axen der x, y, z; und dasselbe gilt auch von den übrigen Kräften (X', Y', Z'),... des Systems S. Das aus der Verlegung entstehende System V ist

daher gleichwirkend mit den Kräften X, X', ... in der Axe der x, den Kräften Y, Y', ... in der Axe der y und den Kräften Z, Z', ... in der Axe der z. Soll aber dieses System im Gleichgewichte seyn, so muss es jedes der drei Systeme X, X', ...; Y, Y', ...; Z, Z', ... für sich seyn, und daher, wenn, wie in §. 65., $X + X' + \ldots = A$, u. s. w. gesetzt wird, jede der drei Summen A, B, C null seyn. Denn da zwei Kräfte, die nicht in einer Geraden wirken, so wie drei Kräfte, deren Richtungen nicht in eine und dieselbe Ebene fallen, sich nicht das Gleichgewicht halten können, so würde, wenn von den drei Summen A, B, C nur zwei, oder eine, oder keine, null wären, das System eine Resultante haben.

Die erste Bedingung des Gleichgewichts zwischen Kräften im Raume, dass die Kräfte, wenn sie parallel mit sich an einen und denselben Punkt getragen werden, sich das Gleichgewicht halten, wird daher erfüllt, wenn:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

3) Die zweite Bedingung für das Gleichgewicht des Systems S ist das Gleichgewicht des Systems der Paare W. Hierzu wird nach §. 54. 5. erfordert, dass, wenn man die Paare auf die Ebene der yz, zx und xy projicirt, in jeder dieser Ebenen für sich die projicirten Paare im Gleichgewichte sind. Das zu dem Systeme W gehörige Paar, welches aus der auf den Punkt (x, y, z) wirkenden Kraft (X, Y, Z) des Systems S und der durch O gehenden Kraft ($-X$, $-Y$, $-Z$) besteht, hat aber zu seiner Projection auf die Ebene der xy ein Paar, dessen Kräfte (X, Y) und ($-X$, $-Y$) resp. auf die Punkte (x, y) und O gerichtet sind; und von diesem Paare ist das Moment = dem Mo-

mente der Kraft (X, Y) in Bezug auf O (§. 31.), $= (xY - yX)\sin\alpha$ (§. 37.). Auf gleiche Weise verhält es sich mit jedem der übrigen Paare des Systems W. Nach der in §. 65. angenommenen Bezeichnung ist daher das Moment aller auf die Ebene der x, y projicirten Paare des Systems W, $= N\sin\alpha$, und folglich Gleichgewicht zwischen ihnen, wenn $N = 0$ ist. Eben so zeigt sich, dass resp. $L = 0$ und $M = 0$ die Bedingungen sind, unter denen die Projectionen von W auf die Ebenen der yz und zx sich das Gleichgewicht halten. Die Bedingungen für das Gleichgewicht des Systems W sind demnach:

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0,$$

welche in Verbindung mit den drei vorigen Gleichungen $A = 0$, u. s. w. die Bedingungen für das Gleichgewicht des Systems S vollständig darstellen.

Zusatz. Aus nr. 2. dieser Entwickelung schliessen wir noch, dass, wenn die Kräfte des Systems ursprünglich auf einen und denselben Punkt wirken, die drei Gleichungen: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, die einzigen zum Gleichgewichte erforderlichen Bedingungen sind, und dass, wenn sie nicht erfüllt werden, das System eine auf denselben Punkt gerichtete Resultante (A, B, C) hat.

§. 68.

Setzt man in den sechs Gleichungen $A, B, \ldots N = 0$ die Projectionen $Z, Z, \ldots$ und die Coordinaten $z, z, \ldots$ sämmtlich $= 0$, so werden die Gleichungen $C, L, M = 0$ identisch, und man erhält rückwärts

$$A = 0,\ B = 0,\ N = 0, \text{ wie in §. 38.,}$$

als die einzigen Bedingungen des Gleichgewichts für den speciellen Fall, wenn die Kräfte in einer und derselben Ebene, in der Ebene der x, y, wirken.

Da $(X, Y, 0), ..$ und $(x, y, 0), ..$ die Projectionen der Kräfte $(X, Y, Z), ..$ und der Punkte $(x, y, z), ..$ auf die Ebene der x, y sind, so geben die drei Gleichungen A, B, $N = 0$ noch zu erkennen, dass, wenn ein System im Raume im Gleichgewicht ist, auch Gleichgewicht zwischen den auf die Ebene der xy projicirten Kräften desselben statt findet. Eben so wird durch die Gleichungen B, C, $L = 0$ das Gleichgewicht der Projectionen auf die Ebene der yz, und durch die Gleichungen C, A, $M = 0$ das Gleichgewicht der Projectionen auf die Ebene der zx ausgedrückt. Wir folgern hieraus:

Ist ein System von Kräften im Raume im Gleichgewichte, so ist es auch die Projection des Systems auf eine beliebig gelegte Ebene. Ist aber von drei Projectionen eines Systems im Raume auf drei sich nur in einem Punkte schneidende Ebenen jede Projection für sich im Gleichgewichte, so ist es auch das System selbst und mithin auch die Projection desselben auf jede vierte Ebene.

Vermöge der drei Gleichungen, A, B, $C = 0$, gilt der erste Theil dieses Satzes auch von Projectionen eines Systems im Raume auf gerade Linien, *so dass, wenn die Kräfte des Systems im Gleichgewichte sind, zwischen den auf eine beliebige Gerade projicirten Kräften ebenfalls Gleichgewicht herrscht. Wenn aber von drei Projectionen des Systems auf drei nicht in einer Ebene liegende und nicht mit einer Ebene parallele Gerade jede für sich im Gleichgewichte ist, so ist es auch die Projection auf jede vierte Gerade, allein deshalb noch nicht das System selbst.*

§. 69.

Ist ein System von Kräften im Raume nicht im Gleichgewichte, so lässt es sich immer auf zwei Kräfte zurückbringen, die im allgemeinern Falle nicht weiter zu vereinigen sind. Seien (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) diese zwei Kräfte und resp. (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) zwei Punkte ihrer Richtungen. Um die gleiche Wirkung des Systems mit diesen zwei Kräften auszudrücken, hat man nach §. 66. Zusatz die von den Kräften des Systems abhängigen sechs Grössen $A, B, \ldots N$ den eben so durch letztere zwei Kräfte bestimmten Grössen gleich zu setzen. Dies giebt die sechs Gleichungen:

$$A = X_1 + X_2, \quad L = y_1 Z_1 - z_1 Y_1 + y_2 Z_2 - z_2 Y_2,$$
$$B = Y_1 + Y_2, \quad M = z_1 X_1 - x_1 Z_1 + z_2 X_2 - x_2 Z_2,$$
$$C = Z_1 + Z_2, \quad N = x_1 Y_1 - y_1 X_1 + x_2 Y_2 - y_2 X_2.$$

Betrachtet man daher das System, und damit die sechs Grössen $A, B, \ldots N$, als gegeben, und will man die zwei mit ihm gleichwirkenden Kräfte finden, so hat man sechs Gleichungen zwischen zwölf Unbekannten:

$$X_1, \ldots X_2, \ldots x_1, \ldots x_2, \ldots$$

Man kann folglich sechsen der letztern beliebige Werthe geben, hierdurch die sechs übrigen bestimmen und somit auf unendlich viele Arten zwei Kräfte finden, die mit dem gegebenen Systeme gleiche Wirkung haben.

Nur dürfen unter den 6 willkührlich zu nehmenden Grössen nicht solche seyn, zwischen denen allein schon vermöge der sechs Gleichungen Relationen statt finden; z. B. nicht X_1 und X_2 zugleich, weil durch die Gleichung $A = X_1 + X_2$ mit der einen dieser Grössen auch die andere bestimmt ist.

Eben so wenig können die sechs Coordinaten $x_1, \ldots$ $x_2, \ldots$ beliebig genommen werden. Denn aus den drei letzten der sechs Gleichungen fliesst:

$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = X_2(y_1 z_2 - y_2 z_1) + Y_2(z_1 x_2 - z_2 x_1) + Z_2(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$$Lx_2 + My_2 + Nz_2 = X_1(y_2 z_1 - y_1 z_2) + Y_1(z_2 x_1 - z_1 x_2) + Z_1(x_2 y_1 - x_1 y_2)$$

und hieraus mit Anwendung der drei ersten Gleichungen:

$$L(x_2 - x_1) + M(y_2 - y_1) + N(z_2 - z_1) = A(y_2 z_1 - y_1 z_2) + B(z_2 x_1 - z_1 x_2) + C(x_2 y_1 - x_1 y_2) \ldots\ldots (\alpha).$$

Die sechs Coordinaten sind daher nicht von einander unabhängig. Vielmehr sieht man aus letzterer Gleichung, dass, wenn die eine Kraft (X_1, Y_1, Z_1) durch einen gegebenen Punkt (a_1, b_1, c_1) geht, die andere in einer damit gegebenen, den Punkt enthaltenden Ebene liegt. Setzt man nämlich in (α) die Coordinaten a_1, b_1, c_1 an die Stelle von x_1, y_1, z_1, so ist die hervorgehende Gleichung zwischen x_2, y_2, z_2 die Gleichung dieser Ebene; und da diese Gleichung, wenn man auch x_2, y_2, z_2 resp. $= a_1, b_1, c_1$ setzt, identisch wird, so geht die Ebene durch den gegebenen Punkt.

Ist umgekehrt die eine Kraft (X_2, Y_2, Z_2) in einer gegebenen Ebene enthalten, deren Gleichung

$$\frac{x_2}{a_2} + \frac{y_2}{b_2} + \frac{z_2}{c_2} = 1 \ldots\ldots (\beta)$$

sey, so geht die Richtung der andern Kraft (X_1, Y_1, Z_1) durch einen damit gegebenen, in der Ebene begriffenen Punkt. Denn aus der Vergleichung von (β) mit (α) ergiebt sich:

$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = a_2 (L + Bz_1 - Cy_1),$$
$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = b_2 (M + Cx_1 - Az_1),$$
$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = c_2 (N + Ay_1 - Bx_1).$$

Hiermit erhalten x_1, y_1, z_1 bestimmte Werthe, und diese sind die Coordinaten des Punktes, durch welchen die Kraft (X_1, Y_1, Z_1) zu legen ist. Substituirt man endlich die aus den drei letztern Gleichungen fliessenden Werthe von a_2, b_2, c_2 in (β) und setzt x_2, y_2, z_2 resp. $= x_1$, y_1, z_1, so wird (β) identisch; mithin ist der Punkt (x_1, y_1, z_1) gleichfalls in der Ebene (β) enthalten.

In dieser Beziehung entspricht daher jedem Punkte eine durch ihn gehende Ebene und jeder Ebene ein in ihr liegender Punkt. Ist demnach von zwei Kräften, welche mit dem Systeme gleichwirkend sind, die Richtung der einen gegeben, so hat damit auch die Richtung der andern eine bestimmte Lage. Denn sie ist die Durchschnittslinie zweier Ebenen, die irgend zweien Punkten der erstern Richtung entsprechen, oder auch die Linie durch zwei Punkte, welche irgend zweien in der erstern Richtung sich schneidenden Ebenen entsprechen. So wie daher jedem Punkt eine Ebene und jeder Ebene ein Punkt entspricht, so hat auch jede Gerade eine andere ihr entsprechende Gerade. — Weiter unten werden wir auf diesen Gegenstand zurückkommen.

§. 70.

Die zwei Kräfte, worauf sich ein nicht im Gleichgewichte befindliches System mittelst der sechs Gleichungen in §. 69. immer reduciren lässt, sind im Allgemeinen nicht in einer Ebene enthalten. Um daher noch zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die zwei Kräfte in einer und derselben Ebene liegen, er-

wäge man, dass sie dann im Allgemeinen sich auf eine einzige Kraft reduciren, im specielleren Falle aber ein Paar bilden. Da nun jede mit (X_1, Y_1, Z_1) ein Paar bildende Kraft den Ausdruck $(-X_1, -Y_1, -Z_1)$ hat, so wird das System mit einem Paare gleiche Wirkung haben, wenn $X_1+X_2=0$, $Y_1+Y_2=0$, $Z_1+Z_2=0$, also wenn (§. 69.)

$$A=0,\ B=0,\ C=0$$

ist, — was auch schon daraus erhellet, dass alsdann von den zwei Systemen V und W, welche in §. 57. für das System S substituirt wurden, das System V im Gleichgewichte seyn muss. (Vergl. §. 67. 2.).

Die Werthe von L, M, N in §. 69. werden damit, wenn man der Kürze willen

$$x_1-x_2=\xi,\ y_1-y_2=\eta,\ z_1-z_2=\zeta \text{ setzt:}$$
$$L=\eta Z_1-\zeta Y_1,\ M=\zeta X_1-\xi Z_1,\ N=\xi Y_1-\eta X_1;$$

und hieraus lassen sich die Ebene und das Moment des resultirenden Paares bestimmen. Denn zuerst hat man:

$$L\xi+M\eta+N\zeta=0,$$

welches, wenn ξ, η, ζ selbst zu Coordinaten genommen werden, die Gleichung für eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegte, mit der Ebene des Paares parallele Ebene ist. Sodann findet sich

$$L^2+M^2+N^2$$
$$=(X_1^2+Y_1^2+Z_1^2)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-(X_1\xi+Y_1\eta+Z_1\zeta)^2.$$

Lässt man daher das Coordinatensystem ein rechtwinkliges seyn und bestimmt von den zwei Punkten (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) in den Richtungen der Kräfte des Paares den einen so, dass die Gerade,

welche ihn mit dem andern verbindet, die Richtungen rechtwinklig schneidet, so ist

$X_1\xi + Y_1\eta + Z_1\zeta = 0,$

$\surd(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) =$ der Breite, und

$\surd(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2) =$ jeder der zwei Kräfte des Paares;

folglich $\surd(L^2 + M^2 + N^2) =$ dem Momente desselben.

Diess fliesst auch sogleich daraus, dass L, M, N die Momente der auf die drei Coordinatenebenen projicirten Kräfte des Systems in Bezug auf den Anfangspunkt der Coordinaten (§. 67. 3.), also auch die Momente des auf dieselben drei Ebenen projicirten Paares sind, auf welches sich jetzt das System zurückführen lassen soll; und dass, wenn man eine begrenzte Ebene auf drei sich rechtwinklig schneidende Ebenen projicirt, die Summe der Quadrate der Projectionen dem Quadrate der begrenzten Ebene selbst gleich ist.

§. 71.

Wenn die zwei Kräfte, welche mit einem gegebenen Systeme gleichwirkend sind, in einer Ebene liegen und sich darin, wie es im Allgemeinen der Fall ist, auf eine einzige Kraft reduciren lassen, so kann man die Kraft (X_1, Y_1, Z_1) für diese eine nehmen und die andere (X_2, ..) null setzen. Hiermit werden X_2, Y_2, Z_2 einzeln $= 0$, und die sechs Gleichungen in §. 69. gehen über in:

$$A = X_1,\quad B = Y_1,\quad C = Z_1,$$
$$L = y_1 Z_1 - z_1 Y_1,\quad M = z_1 X_1 - x_1 Z_1,$$
$$N = x_1 Y_1 - y_1 X_1.$$

Eliminirt man hieraus X_1, Y_1, Z_1, so kommt:

$$(a) \ldots L = Cy_1 - Bz_1, \quad M = Az_1 - Cx_1,$$
$$N = Bx_1 - Ay_1,$$

und, wenn man noch x_1, y_1, z_1 wegschafft:

$$(A) \ldots\ldots AL + BM + CN = 0,$$

eine Gleichung zwischen A, B, .. N allein, also die Bedingungsgleichung, bei welcher das System auf eine einzige Kraft reducirbar ist. Diese Kraft selbst ist (A, B, C) und die drei Gleichungen (a), von denen, vermöge der Relation (A), eine jede aus den zwei übrigen fliesst, sind die Gleichungen für die Richtung der Kraft. Finden sich daher $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, so hat das System eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Resultante, und umgekehrt.

Da übrigens die Gleichung (A) auch dann erfüllt wird, wenn A, B, $C = 0$ sind, d. i. wenn das System mit einem Paare gleiche Wirkung hat, so erhellet, dass diese Gleichung überhaupt die Bedingung ausdrückt, bei welcher die zwei Kräfte (X_1, Y_1, Z_1) und (X_2, Y_2, Z_2) in einer Ebene liegen, und dass, wenn das System eine einfache Kraft zur Resultante haben soll, zu der positiven durch (A) ausgedrückten Bedingung noch die negative hinzugesetzt werden muss, dass nicht jede der drei Grössen A, B, C null seyn darf.

§. 72.

Zusätze. *a.* Zu der Gleichung (A) kann man noch auf verschiedenen andern Wegen gelangen; am einfachsten wohl folgendergestalt. Man verwandle, wie in §. 57., das System S in zwei andere V und W, von denen V aus den auf den Anfangspunkt der Coordinaten parallel mit sich verlegten Kräften von S besteht, W aber die Kräfte von S selbst und die direct

entgegengesetzten von V enthält. Die Resultante von V ist nun eine durch den Anfangspunkt gehende Kraft v, deren Ausdruck (A, B, C), und es verhält sich daher für jeden Punkt (x, y, z) ihrer Richtung:

$$(v) \ldots\ldots x : y : z = A : B : C.$$

Die Resultante von W ist ein Paar w, dessen Projectionen auf die Coordinatenebenen, $= L, M, N$ sind. Die Ebene dieses Paares hat folglich, wenn sie durch den Anfangspunkt gelegt wird, die Gleichung (§. 70.)

$$(w) \ldots\ldots Lx + My + Nz = 0.$$

Soll nun das System S sich auf eine einfache Kraft reduciren, so muss, wenn W nicht schon für sich im Gleichgewichte, und daher $L, M, N = 0$ sind, die Richtung von v in die Ebene von w fallen. Alsdann aber müssen die den x, y, z proportionalen Werthe aus (v) in (w) substituirt, dieser Gleichung Genüge leisten, und es muss daher seyn: $AL + BM + CN = 0$, wie vorhin.

b. Noch eine andere Herleitung dieser Gleichung ist folgende. Sollen die zwei Kräfte (X_1, Y_1, Z_1) und (X_2, Y_2, Z_2), worauf sich ein System im Raume immer reduciren lässt, in einer Ebene enthalten seyn, so müssen die vier Punkte (x_1, y_1, z_1), $(x_1 + X_1, y_1 + Y_1, z_1 + Z_1)$, $(x_2, \ldots)$, $(x_2 + X_2, \ldots)$ in einer Ebene liegen (§. 62.), oder mit andern Worten: es muss der Inhalt der Pyramide, welche diese vier Punkte zu Ecken hat, $= 0$ seyn. Dieser Inhalt findet sich sogleich, wenn man in der Formel des §. 65. $x_2, y_2, z_2, X_2, Y_2, Z_2$ für f, g, h, F, G, H, und $x_1, \ldots X_1, \ldots$ für $x, \ldots X, \ldots$ schreibt und ist daher:

$$\tfrac{1}{6} X_2 [(y_1 - y_2) Z_1 - (z_1 - z_2) Y_1] + \ldots$$

$$=\tfrac{1}{6}r\{X_1(y_2Z_2-z_2Y_2)+X_2(y_1Z_1-z_1Y_1)$$
$$+Y_1(z_2X_2-x_2Z_2)+Y_2(z_1X_1-x_1Z_1)$$
$$+Z_1(x_2Y_2-y_2X_2)+Z_2(x_1Y_1-y_1X_1)\}.$$

Es fliesst aber aus den drei letzten der sechs Gleichungen in §. 69.:

$$X_1L+Y_1M+Z_1N=X_1(y_2Z_2-z_2Y_2)+\ldots$$
$$X_2L+Y_2M+Z_2N=X_2(y_1Z_1-z_1Y_1)+\ldots$$

Hiermit wird der Inhalt der Pyramide

$$=\tfrac{1}{6}r\{(X_1+X_2)L+(Y_1+Y_2)M+(Z_1+Z_2)N\}$$
$$=\tfrac{1}{6}r\{(AL+BM+CN\}$$

zufolge der drei ersten jener sechs Gleichungen. Soll daher diese Pyramide verschwinden, und damit das System auf zwei in einer Ebene liegende Kräfte reducirt werden können, so muss $AL+\ldots=0$ seyn.

c. Merkwürdiger Weise giebt also der Ausdruck $\tfrac{1}{6}r(AL+\ldots)$, — oder $\tfrac{1}{6}(AL+BM+CN)$ selbst, wenn das Coordinatensystem ein rechtwinkliges ist, — im Allgemeinen den Inhalt der Pyramide an, welche durch die zwei resultirenden Kräfte $(X_1, \ldots)$ und $(X_2, \ldots)$ bestimmt wird; und wir ziehen hieraus den Schluss:

Wie auch ein System von Kräften im Raume auf zwei Kräfte reducirt werden mag, so ist doch immer die Pyramide, welche diese zwei Kräfte zu gegenüberliegenden Kanten hat, von demselben Inhalte.

Sehr einfach lässt sich dieser Satz auch folgendergestalt beweisen. — Sey das System das eine Mal auf die zwei Kräfte PQ, RS, und das andere Mal auf die zwei Kräfte $P'Q'$, $R'S'$ reducirt worden, so sind erstere Kräfte gleichwirkend mit letztern, und es ist

daher in Bezug auf die willkührlich zu nehmende Axe MN (§. 59.):

$$MNPQ + MNRS = MNP'Q' + MNR'S'.$$

Man lasse nun die willkührlichen zwei Punkte M, N resp. mit P, Q zusammenfallen, so wird die Pyramide $MNPQ = 0$, und man erhält:

$$PQRS = PQP'Q' + PQR'S'.$$

Eben so ergiebt sich, wenn man MN nach und nach mit RS, $P'Q'$, $R'S'$ zusammenfallen lässt:

$$RSPQ = RSP'Q' + RSR'S',$$
$$P'Q'PQ + P'Q'RS = P'Q'R'S',$$
$$R'S'PQ + R'S'RS = R'S'P'Q'.$$

Addirt man diese vier Gleichungen, und bemerkt, dass $PQRS = RSPQ$, u. s. w. (§. 63. 1.), so kommt:

$$2PQRS = 2P'Q'R'S', \text{ und damit } PQRS = P'Q'R'S',$$

wie zu erweisen war *).

Vom Gleichgewichte zwischen parallelen Kräften im Raume.

§. 73.

Wir wollen noch die jetzt vorgetragene allgemeine Theorie des Gleichgewichts auf den besondern Fall anwenden, wenn sämmtliche Kräfte des Systems mit

---

*) Der Entdecker dieses merkwürdigen Theorems ist H. Chasles, (siehe Gergonne Annales Tom. XVIII. nr. 12.). Auf die letztere Art habe ich es in Crelle's Journal für die reine und angew. Mathem. IV. Band, pag. 179. dargethan und daselbst durch ganz ähnliche Betrachtungen folgenden viel allgemeineren Satz hergeleitet:

Hat man eine beliebige Anzahl, $= n$, von Kräften, welche auf einen freien festen Körper wirken, und sind diese Kräfte im Gleichgewichte, oder lassen sie sich auf eine einzige Kraft reduciren, so ist die

einer und derselben Geraden parallel sind. Denkt man sich die Kräfte eines solchen Systems nach und nach zu zweien mit einander verbunden, so übersieht man schon im Voraus, dass, da die Resultante zweier parallelen Kräfte, die kein Paar ausmachen, eine mit ihnen parallele Kraft ist (§. 26.), ein solches System im Allgemeinen eine mit jener Geraden parallele einfache Resultante hat, oder sich auf ein Paar reducirt, dessen Ebene mit jener Geraden parallel läuft, oder endlich im Gleichgewichte ist. Die Rechnung hierzu ist folgende.

Sei p ein Abschnitt einer mit den Kräften des Systems parallelen Linie, und von p die Projectionen auf die drei Coordinatenaxen $= a.p$, $b.p$, $c.p$, wo a, b, c aus den Winkeln, welche die drei Coordinatenaxen und p mit einander bilden, bestimmbare Zahlen sind. Alsdann ist, wenn wir die Kräfte (X, Y, Z), (X', Y', Z'), u. s. w. einfach mit P, P', ... bezeichnen:

$$X = aP,\ Y = bP,\ Z = cP,$$
$$X' = aP',\ Y' = bP',\ Z' = cP',$$

u. s. w.; und es werden mit Anwendung des Summationszeichens Σ die sechs den Zustand des Systems bestimmenden Grössen (§. 65.):

$$A = a\Sigma P,\ B = b\Sigma P,\ C = c\Sigma P,$$
$$L = c\Sigma yP - b\Sigma zP,\ M = a\Sigma zP - c\Sigma xP$$
$$N = b\Sigma xP - a\Sigma yP.$$

---

algebraische Summe der $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ *dreiseitigen Pyramiden, welche hervorgehen, indem man die Kräfte durch Linien ausdrückt, und je zwei derselben zu gegenüberliegenden Seiten einer Pyramide nimmt,* $= 0$. *Im allgemeinen Falle aber, wo die n Kräfte sich nicht auf eine, jedoch immer auf zwei Kräfte zurückführen lassen, ist jene Summe von Pyramiden der aus den zwei resultirenden Kräften gebildeten Pyramide selbst gleich.*

Hieraus folgt sogleich: $AL+BM+CN=0$; daher sich ein System paralleler Kräfte, — übereinstimmend mit dem gleich Eingangs Bemerkten, — immer auf zwei in derselben Ebene enthaltene Kräfte, folglich im Allgemeinen auf eine einfache Kraft reduciren lassen muss. Diese Kraft ist $(a\Sigma P, b\Sigma P, c\Sigma P)$, also eine mit den Kräften des Systems parallele Kraft, $P_1=\Sigma P$, die der algebraischen Summe der letztern gleich ist. Die Gleichung für die Projection dieser Resultante auf die Ebene der yz (§. 71. (*a.*)) ist:

$$c\Sigma yP - b\Sigma zP = (cy_1 - bz_1)\Sigma P,$$

oder, wenn wir

$$\frac{\Sigma xP}{\Sigma P}=\xi, \quad \frac{\Sigma yP}{\Sigma P}=\eta, \quad \frac{\Sigma zP}{\Sigma P}=\zeta \text{ setzen:}$$

$$c(\eta-y_1)=b(\zeta-z_1),$$

und eben so sind

$$a(\zeta-z_1)=c(\xi-x_1) \text{ und } b(\xi-x_1)=a(\eta-y_1)$$

die Gleichungen der Projectionen der Resultante auf die Ebenen der zx und xy.

Ist die Summe der Kräfte $P, P', \ldots = 0$, so sind es auch A, B, C, und das System reducirt sich im Allgemeinen auf ein Paar, dessen Ebene, wenn sie durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegt wird, die Gleichung (§. 70.) $Lx+My+Nz=$

$$(bz-cy)\Sigma xP+(cx-az)\Sigma yP+(ay-bx)\Sigma zP=0$$

hat, und daher mit den Richtungen der Kräfte parallel liegt. Das Moment des Paares ist, unter Annahme rechtwinkliger Coordinaten, $=\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}=$

$$\sqrt{[(\Sigma xP)^2+(\Sigma yP)^2+\ldots-(a\Sigma xP+b\Sigma yP+\ldots)^2]},$$

indem bei einem rechtwinkligen Coordinatensysteme, $a^2+b^2+c^2=1$ ist.

Wenn endlich nicht nur $\Sigma P = 0$, und damit A, B, $C = 0$, sondern auch L, M, $N = 0$ sind, also sich

$$\Sigma x P : \Sigma y P : \Sigma z P = a : b : c$$

verhalten, so herrscht Gleichgewicht. Da diese Doppelproportion die Stelle zweier Gleichungen vertritt, so sind zum Gleichgewichte eines Systems paralleler Kräfte drei Bedingungsgleichungen nothwendig und hinreichend.

Zusatz. Viel einfacher wird diese ganze Rechnung, wenn man das Coordinatensystem so legt, dass die eine Axe, z. B. die der z, mit den Kräften parallel wird. Hiermit werden $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, und die Bedingungen des Gleichgewichts reduciren sich auf:

$$\Sigma P = 0,\ \Sigma x P = 0,\ \Sigma y P = 0.$$

Wird bloss die erste dieser Gleichungen erfüllt, so ist das System der Kräfte gleichwirkend mit einem Paare, dessen Ebene die Gleichung

$$x \Sigma y P - y \Sigma x P = 0$$

zukommt, und dessen Moment bei rechtwinkligen Coordinaten

$$= \sqrt{[(\Sigma x P)^2 + (\Sigma y P)^2]} \text{ ist.}$$

Ist ΣP nicht $= 0$, so haben die Kräfte eine mit der Axe der z parallele Resultante $= \Sigma P$, welche die Ebene der xy in einem Punkte schneidet, dessen Coordinaten $= \xi$ und η sind.

Sechstes Kapitel.

Weitere Ausführung der Theorie der Moment

§. 74.

Ist ein System von Kräften im Raume nicht i Gleichgewichte, so ist sein Moment, oder das Mome der zwei Kräfte, auf welche sich das System imm reduciren lässt, von einer Axe zur andern im Allg meinen veränderlich. Die sehr merkwürdigen Gesetz nach denen diese Aenderungen sich richten, sollen d Gegenstand unserer nächsten Untersuchungen ausmache

Die höchst einfachen Beziehungen, welche bei eine in einer Ebene enthaltenen und auf eine einzige Kra reducirbaren Systeme zwischen den Momenten desselb oder seiner Resultante für verschiedene Punkte d Ebene statt finden, haben wir in §. 30. und §. 48. ke nen gelernt. Die jetzt anzustellenden Untersuchung werden daher den dortigen zwar verwandt, aber in de Grade zusammengesetzter seyn, als es überhaupt je geometrische Untersuchung wird, sobald man sie au dem Gebiete von zwei Dimensionen in das von dr Dimensionen überträgt.

Relationen zwischen Momenten, deren Axen sich in einem Punkte schneiden.

§. 75.

Alle zu einem Systeme im Raume gehörigen Kräft kann man auf eine einfache, durch einen beliebig g wählten Punkt M (Fig. 24.) gehende Kraft v und ei Paar w, dessen Kräfte PQ und $P'Q'$ seyen, zurück führen (§. 57.). Die Ebene des Paares und die ein

Kraft $P'Q'$ desselben, nehme man gleichfalls durch M gehend an, was nach §. 50. Folger. immer möglich ist. Alsdann ist in Bezug auf eine durch M gelegte Axe MN das Moment von v sowohl, als von $P'Q'$, null, und daher in Bezug auf dieselbe Axe das Moment des Systems = dem Momente von v und w (§. 59.), = dem Momente von PQ, = dem Sechsfachen der Pyramide $MNPQ$,

$$= 2MPQ \,.\, MN \,.\, \sin(MPQ^\wedge MN).$$

Wenn daher, wie in diesem Kapitel immer geschehen soll, alle Axen, worauf ein System bezogen wird, von gleicher Länge angenommen werden, so hat man folgenden Satz:

Für jeden Punkt M giebt es eine durch ihn gehende Ebene MPQ von der Beschaffenheit, dass das Moment des Systems für jede den Punkt M treffende Axe dem Sinus des von der Axe mit dieser Ebene gebildeten Winkels proportional ist.

§. 76.

Um uns die Verhältnisse, die hiernach zwischen den Momenten für die durch M gehenden Axen statt finden, anschaulicher zu machen, wollen wir von M aus auf die einzelnen Axen, wie MS und MN, Abschnitte, Ms und Mn, tragen, die den Momenten, welche den Axen zukommen, proportional sind. Ist daher MS auf der Ebene MPQ normal, so verhält sich

$$Ms : Mn = 1 : \cos SMN,$$

folglich ist Mns ein rechter Winkel, d. h. der Punkt n liegt in einer um Ms als Durchmesser beschriebenen und daher die Ebene MPQ in M berührenden Kugelfläche; oder mit andern Worten: das Moment jeder durch

M gehenden Axe ist dem von dieser Kugelfläche a geschnittenen Theile Mn der Axe proportional.

So wie nun unter allen durch M gehenden Sehn der Kugel die auf der Berührungsebene in M norm stehende Sehne, als Durchmesser, die grösste ist, u alle von M ausgehende, mit ihr gleiche Winkel b dende Sehnen einander gleich sind, so hat auch unt allen durch M gelegten Axen die auf der Ebene MP normale Axe das grösste Moment, und allen Axe die gegen sie unter gleichen Winkeln geneigt sin kommen Momente von gleicher Grösse zu. So w ferner die Sehnen, wenn sie in die Berührungsebe selbst zu liegen kommen, in Null übergehen, so i auch von jeder in dieser Ebene enthaltenen und dur M gehenden Axe das Moment $= 0$. Sind endlich M und MO zwei von M nach gerade entgegengesetzt Richtungen ausgehende Axen, und schneidet die Gerad in welcher sie beide liegen, die Kugelfläche in n, wird das Moment einer jeden von ihnen zwar dur dieselbe Gerade Mn ausgedrückt. Da aber n mit auf einerlei und mit O auf entgegengesetzte Seiten v M fällt, so stellt Mn für die eine Axe ein positiv und für die andere ein eben so grosses negatives M ment vor.

Man lege durch M eine beliebige Ebene; sie schn det die Kugelfläche in einem Kreise, von welchem d Durchschnitt der Ebene mit der die Kugel in M b rührenden Ebene eine Tangente ist. Von den Sehn dieses Kreises gilt offenbar dasselbe, was so eben v den Sehnen der Kugel bemerkt worden. So wie dah durch jeden Punkt im Raume eine Kugel, so lässt sic durch jeden Punkt einer Ebene in ihr ein Kreis b schreiben, welcher die Eigenschaft besitzt, dass d

Moment jeder durch den Punkt gehenden und in der Ebene enthaltenen Axe der Sehne proportional ist, welche der Kreis von der Axe abschneidet. Unter allen diesen Axen hat daher die den Kreis berührende ein Moment $=0$, die darauf normale Axe das grösste Moment, u. s. w.

Da übrigens das Sechsfache der Pyramide $MNPQ$ zunächst das Moment der Kraft PQ ausdrückt, so gilt das bisher von den Momenten eines ganzen Systems Gesagte auch von den Momenten einer einzelnen Kraft PQ, d. h. die Momente der Kraft PQ in Bezug auf Axen, die durch M gehen, sind den Theilen dieser Axen, welche in eine die Ebene MPQ in M berührende Kugel fallen, proportional.

§. 77.

Unter allen Momenten, welche einem System in Bezug auf die durch M gehenden Axen zukommen, ist das grösste $= 2MN.MPQ$. Die Richtung seiner Axe und seine Grösse in Vergleich zu den Momenten für die übrigen in M sich schneidenden Axen stellt der von M ausgehende, auf MPQ normale, Durchmesser der Kugel vor. Will man daher in Bezug auf durch M gelegte Axen die Momente nicht bloss von einem, sondern von mehreren Systemen, oder auch von mehreren einzelnen Kräften, mit einander vergleichen, so hat man durch M eben so viele Kugelflächen zu beschreiben, deren von M ausgehende Durchmesser auf den Dreiecken MPQ, welche den einzelnen Systemen oder Kräften angehören, rechtwinklig stehen und den Flächen dieser Dreiecke proportional sind. Ein solcher Durchmesser, welcher, in der Axe des grössten Moments

liegend, diesem Momente proportional ist, werde di Linie des grössten Moments genannt.

Von einer einzelnen Kraft *PQ* ist daher, rüc sichtlich des Punktes *M*, die Linie des grössten Momen ein in *M* auf der Ebene *MPQ* errichtetes und diese Dreiecke proportionales Perpendikel.

§. 78.

Bei der Reduction eines Systems von Kräften *A* *CD*, ... auf eine einfache durch *M* gehende Kraft und auf ein Paar *PQ*, *P'Q'* (§. 75.) entsteht letzter durch Zusammensetzung von Paaren, welche in de Ebenen *MAB*, *MCD*, ... liegen, und deren Moment den Doppelten dieser Dreiecke gleich sind (§. 58. Diese Zusammensetzung kann aber nach §. 53. dadurc bewerkstelligt werden, dass man auf den Ebenen *MA* *MCD*, ... in *M* Normalen errichtet, ihre Längen di sen Dreiecken proportional macht, und von diesen L nien, als Kräfte betrachtet, die Resultante bestimm Denn diese ist auf der Ebene des gesuchten resultire den Paares *PQ*, *P'Q'* rechtwinklig und, wenn *P'* durch *M* gelegt wird, dem Dreiecke *MPQ* proportiona

Nach der im vorigen §. gegebenen Erklärung werde aber durch diese Normalen zugleich die Linien de grössten Momente der einzelnen Kräfte und des vo ihnen gebildeten Systems rücksichtlich des Punktes *M* dargestellt, und wir schliessen daher:

Die in Bezug auf einen gewissen Punkt sta findende Linie des grössten Moments für ein Syste von Kräften ist die Resultante der durch denselbe Punkt gehenden Linien der grössten Momente fü die einzelnen Kräfte des Systems.

§. 79.

Aus dem eben entwickelten Satze lässt sich eine nicht uninteressante geometrische Folgerung ziehen. Seyen in Bezug auf den Punkt M die Linien Ms, Ms', ... die Linien der grössten Momente für die Kräfte AB, CD, ...; Ms_1 die Linie des grössten Moments für das System dieser Kräfte. Man beschreibe um Ms, Ms', ... und Ms_1, als Durchmesser, Kugeln und lege durch M eine beliebige Axe MN, welche die Oberflächen dieser Kugeln, ausser in M, resp. noch in n, n', ... und n_1 schneide, so sind die Abschnitte Mn, Mn', ... und Mn_1 die der Axe MN zugehörigen Momente der einzelnen Kräfte AB, CD, ... und des von ihnen gebildeten Systems; folglich $Mn + Mn' + \ldots = Mn_1$, welches uns folgenden Satz giebt:

Beschreibt man durch einen Punkt M mehrere Kugelflächen, legt durch M beliebig eine Gerade und bestimmt auf ihr von M aus einen Abschnitt, welcher der algebraischen Summe der Sehnen gleich ist, die von den Kugelflächen in der Geraden abgeschnitten werden, so ist dieser Abschnitt die Sehne einer neuen durch M gehenden Kugel, deren durch M gelegter Durchmesser, statisch ausgedrückt, die Resultante der durch M gelegten Durchmesser der erstern Kugeln ist.

Auf dieselbe Art, wie die Wirkungen mehrerer sich in einem Punkte schneidender Kräfte auf die Wirkung einer einzigen, denselben Punkt treffenden Kraft reducirt werden können, lassen sich daher auch mehrere sich in einem Punkte schneidende Kugelflächen zu einer einzigen zusammensetzen, und eben so wird man auch mehrere in einer Ebene enthaltene und durch

denselben Punkt gehende Kreise zu einem neuen K vereinigen können.

Sind demnach DA, DB (Fig. 25.) zwei anlie Seiten und DC die Diagonale eines Parallelogra und beschreibt man um diese drei Linien, als D messer, Kreise, so ist der dritte Kreis, als durc sammensetzung der zwei erstern entstanden, zu be ten, indem, wenn eine beliebige durch D gez Gerade die drei Kreise resp. in a, b, c schneide Sehne Dc des dritten aus den Sehnen Da un der beiden ersten zusammengesetzt ist.

Um dieses unmittelbar zu beweisen, erwäge dass DaA, DbB, DcC, als in Halbkreisen gel rechte Winkel, und daher Da, Db, Dc die recht ligen Projectionen von DA, DB, DC auf ein dieselbe Gerade sind. Es ist aber immer die Proj von DC gleich der Summe der Projectionen von und AC; und die Projection von AC gleich der jection von DB, als von einer der AC gleiche parallelen Linie; folglich $Dc = Da + Db$.

§. 80.

Diese aus statischen Betrachtungen hervorg gene, jetzt aber rein geometrisch dargestellte un wiesene Zusammensetzung von Kreisen kann nu wiederum zum Vortheil der Statik verwendet we indem sich darauf ein neuer Beweis für das allelogramm der Kräfte gründen lässt, ein Be der sich von den meisten übrigen dadurch untersch dass sich bei ihm die Richtung und Grösse der R tante zugleich ergeben. Folgendes sind die h nöthigen Betrachtungen.

1) Schneidet eine durch D gezogene Gerad

drei Kreise in a, b, c, und eine zweite Gerade durch D in a', b', c', so sind die drei Bögen aa', bb', cc' einander ähnlich, indem jeder von ihnen die Hälfte des von den beiden Geraden gebildeten Winkels misst. Und umgekehrt: schneidet man von drei, mit D in einer Geraden liegenden, Punkten a, b, c der drei Kreise auf den Kreisen nach einerlei Seite hin drei einander ähnliche Bögen aa', bb', cc' ab, so sind auch a', b', c' mit D in einer Geraden.

2) Werde nun jeder der drei Kreise, die ich nach den Endpunkten ihrer Durchmesser kurz mit A, B, C bezeichnen will, in eine und dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt, und dieses so, dass ein gewisser Theilungspunkt des Kreises A, einer des B, einer des C und D selbst in einer Geraden liegen. Alsdann werden, dem eben Bemerkten zufolge, wenn man von diesen drei Punkten in ihren resp. Kreisen nach einerlei Seite zu weiter fortzählt, je drei gleichvielte Theilpunkte mit D wiederum in einer Geraden seyn.

3) Werde noch bei dieser Eintheilung festgesetzt, dass der den Kreisen gemeinschaftliche Punkt D in jedem von ihnen ein Theilpunkt sey. Da nun, wenn a, b, c irgend drei zusammengehörige Theilpunkte, d. h. drei solche sind, die mit D in einer Geraden liegen, man $Da + Db = Dc$ hat, so muss, wenn a in D fällt, also die Gerade den Kreis A in D berührt, $Db = Dc$ seyn, also b mit c zusammenfallen; d. h. die durch D an den Kreis A gelegte Tangente geht durch den gegenseitigen Durchschnitt E der Kreise B und C. Ist daher, wie verlangt wird, D ein Theilpunkt im Kreise A, so ist auch E ein Theilpunkt in den Kreisen B und C. Damit folglich, der Forderung gemäss, D auch in jedem der zwei letztern Kreise ein Theilpunkt seyn

könne, ist es hinreichend und nothwendig, dass von den Bögen derselben DFE und DGE ein jeder zu seinem ganzen Kreise in einem rationalen Verhältnisse stehe.

Weil aber DEB und DEC, als Winkel im Halbkreisen, rechte Winkel sind, und daher E, B, C in einer Geraden liegen, so misst der Bogen DFE den Winkel $2.DBE = 2.ADB$, und der Bogen DGE den Winkel $2.DCE = 2.ADC$ *). Mithin ist es nur nöthig, dass in dem Parallelogramm $DACB$ jeder der beiden Winkel, welche die Diagonale DC mit den Seiten macht, zu 360° rational ist. Setzen wir daher 360° in m gleiche Theile getheilt, von denen p Theile auf den Winkel ADC, und q auf CDB gehen, so kommen, wenn auch die Peripherie jedes der drei Kreise in m gleiche Theile getheilt wird, auf den Bogen DFE $2(p+q)$ und auf DGE $2p$ solcher Theile, und es liegen, wenn in jedem der drei Kreise D zum ersten Theilpunkt genommen und nach der durch die Folge $DBCA$ bestimmten Richtung herumgezählt wird, der $x$te Theilpunkt des Kreises A, der $(x+2(p+q))$te

---

*) Ueberhaupt ist diese Figur an merkwürdigen Beziehungen reichhaltig. Die Punkte E, H, I, in denen sich die Kreise B und C, A und C, A und B, ausser in D, noch schneiden, liegen in den Seiten BC, AC und der Diagonale AB des Parallelogramms, und die in E, H, I auf BC, AC, AB errichteten Normalen schneiden sich in D. Von diesen Normalen berührt DE den Kreis A, DH den Kreis B, und wenn DI bis nach K an den Kreis C fortgesetzt wird, so ist $DI = IK$. So wie ferner im Obigen die Bögen DFE und DGE, so lassen sich auch alle übrigen Bögen, in welche die drei Kreise einander zerschneiden, durch Winkel im Parallelogramm AB ausdrücken. So sind z. B. die Bögen HLD, DFE, HDE der Kreise A, B, C einander ähnlich und messen einen Winkel $= 2.ADB$. Die Bögen DaI; EbI der Kreise A, B sind sich ähnlich und messen einen Winkel $= 2.DAB$; die Bögen IAH, IMD der Kreise A, B sind sich ähnlich, indem jeder von ihnen einen Winkel $= 2.DBA$ misst; u. s. w.

les Kreises B und der $(x+2p)$te des Kreises C mit D immer in gerader Linie.

4) Wir wollen jetzt von D nach allen $m-1$ übrigen Theilpunkten des Kreises A gerade Linien ziehen, deren jede, ihrer Grösse und Richtung nach, eine auf D wirkende Kraft vorstelle. Auf gleiche Art werde durch die Theilpunkte des Kreises B ein zweites, und durch die Theilpunkte des Kreises C ein drittes System auf D wirkender Kräfte bestimmt. Wegen der Gleichung $Da+Db=Dc$, wenn a, b, c drei zusammengehörige Theilpunkte sind (nr. 3.), ist nun von den diesen Theilpunkten zugehörigen drei Kräften die Kraft in dem Kreise C gleichwirkend mit den beiden andern; und da die Theilpunkte aller drei Kreise zu dreien so zusammen genommen werden können, dass sie mit D in einer Geraden liegen, so wird die Resultante der Kräfte des Kreises A, verbunden mit der Resultante der Kräfte des Kreises B, gleichwirkend mit der Resultante der Kräfte des Kreises C seyn.

5) Betrachten wir aber die Kräfte eines der drei Kreise besonders, so sind je zwei, die von D aus nach gleichweit von D zu beiden Seiten liegenden Theilpunkten des Kreises gerichtet sind, einander gleich und haben daher eine Resultante, welche den durch D gelegten Durchmesser zur Richtung hat. Dieselbe Richtung muss folglich auch der Resultante aller Kräfte des Kreises zukommen.

Offenbar sind ferner je zwei Kreise mit ihren Sehnen, oder den dadurch vorgestellten Kräften, einander ähnliche Figuren, von denen die eine in die andere übergeht, wenn man jede Kraft des einen Kreises in dem Verhältnisse ändert, in welchem sein Durchmesser zu dem Durchmesser des andern steht. In demselben

Verhältnisse werden folglich auch die Resultanten aller Kräfte des einen und des andern Kreises zu einander seyn, so dass die Durchmesser DA, DB, DC nicht allein die Richtungen, sondern auch die Grössenverhältnisse der Resultanten der drei Systeme von Kräften angeben.

6) Zu Folge des in nr. 4. Erwiesenen ist daher von drei durch DA, DB, DC vorgestellten Kräften die letztere gleichwirkend mit den beiden erstern, und somit das Parallelogramm der Kräfte für den Fall dargethan, wenn die Diagonale DC mit den Seiten Winkel macht, deren jeder zu 360° in einem rationalen Verhältnisse steht. Die Ergänzung des Beweises für den Fall irrationaler Verhältnisse bleibe dem Leser selbst überlassen.

Von den Axen der grössten Momente.

§. 81.

Ist für einen Punkt M die Linie des grössten Moments, welche durch ihre Richtung und Länge die dem Punkte zugehörige Axe des grössten Moments und den Werth desselben angiebt (§. 77.), gegeben, so lässt sich das Moment für jede andere durch M gehende Axe sogleich finden. Wie diese Linie des grössten Moments bestimmt werden kann, ist in §. 78. gezeigt worden, und wir wollen nun untersuchen, nach welchem Gesetze die Richtung und Länge dieser Linie von einem Punkte zum andern veränderlich ist.

Sey demnach ein System von Kräften auf eine einfache, durch einen willkührlich angenommenen Punkt M gehende Kraft v und auf ein Paar w reducirt werden. Eben so habe man das System auf eine durch

einen beliebigen andern Punkt M' gehende Kraft v' und auf ein Paar w' zurückgebracht.

Da hiernach v und w gleichwirkend mit v' und w' sind, so sind es auch v, w und $-w'$ mit v'. Die Kraft v muss daher in der Ebene des aus w und $-w'$ resultirenden Paares liegen, oder doch dieser Ebene parallel seyn (§. 57.), und muss mit $-v'$ ein diesem resultirenden Paare das Gleichgewicht haltendes Paar bilden (§. 15. 1.). Die Kräfte v und v' sind folglich einander gleich und haben gleichlaufende Richtungen, und die Ebene dieser Richtungen wird von den Ebenen der Paare w und w' in parallelen Geraden geschnitten (§. 51.). — Ist M' ein Punkt in der Richtung von v selbst, so fallen v und v' zusammen, und haben daher gleiche Wirkung; mithin sind dann auch die Paare w w' einander gleichwirkend, d. i., sie liegen in parallelen Ebenen und haben gleiche Momente.

Dass die Kraft v von einem Punkte M zum andern ihre Richtung und Intensität unverändert behält, geht übrigens auch daraus hervor, dass v die Resultante der an einen Punkt M parallel mit ihren Richtungen getragenen Kräfte des Systems ist.

Weil w mit w' und v', $-v$ gleichwirkend ist, so ist, wenn wir sämmtliche drei Paare auf eine Ebene projiciren, das Moment der Projection von w gleich dem Momente der Projectionen von w' und v', $-v$ (§. 54. 5.). Um ein bestimmteres Bild zu haben, wollen wir uns die gemeinschaftliche Richtung von v und v' vertical aufwärts gehend denken. Lassen wir nun die Projectionsebene horizontal seyn und projiciren darauf rechtwinklig, so ist die Projection des Paares v', $-v$ null und die Momente der Projectionen von w und w' sind einander gleich.

Das Moment der Projection des Paares w auf eine horizontale Ebene ist demnach für alle Punkte M von gleicher Grösse, und mithin das Moment von w selbst am kleinsten für diejenigen Punkte M, für welche sich die Ebene von w horizontal findet.

Um diese Punkte, wenn es anders solche giebt, zu bestimmen, wollen wir die Paare w und w' auf die Ebene des Paares v', $-v$ rechtwinklig projiciren. Nach obigem Satze von den Projectionen ist alsdann das Moment der Projection von w gleich der Summe der Momente des in der Projectionsebene liegenden Paares v', $-v$ selbst und der Projection von w'. In dem Falle nun, wenn w' horizontal, also auf der Projectionsebene rechtwinklig ist, ist das Moment seiner Projection null, folglich haben dann die Projection des Paares w und das Paar v', $-v$ gleiche Momente; und weil immer die Durchschnittslinien der Ebenen von w und w' mit der Ebene von $(v', -v)$ einander parallel sind, jetzt aber w' horizontal seyn soll, so sind jetzt die beiden Durchschnitte von w und w' mit der verticalen Ebene von $(v', -v)$ horizontal. Dies giebt zur Bestimmung der Punkte M', für welche w' horizontal ist, folgende Regel:

Man lege durch die irgend einem Punkte M zugehörige Kraft v eine (verticale) Ebene so, dass sie die Ebene des demselben Punkte zukommenden Paares w in einer horizontalen schneidet. Auf diese Ebene projicire man das Paar w rechtwinklig und ergänze die Kraft $-v$ durch eine zweite v' in derselben Ebene zu einem Paare, welches mit der Projection von w einerlei Moment hat. Jedes Paar w', das einem Punkte M' in der Richtung von v' zukommt, wird alsdann eine horizontale Lage haben.

Sind umgekehrt die sich rechtwinklig schneidenden

v' und w' gegeben, und legt man durch irgend einen Punkt M eine der v' parallele und gleiche Kraft v, so ist das Paar, welches aus der Zusammensetzung der Paare w' und v', $-v$ entspringt, das dem M zugehörige. Die Ebene desselben schneidet die Ebene von (v', $-v$) in einer Horizontalen, sein Moment aber und sein Winkel mit dem horizontalen w' ist um so grösser, je grösser das Moment des Paares v', $-v$ ist, je weiter also M von v' entfernt liegt.

§. 82.

Dieses vorausgeschickt ist nun die Bestimmung der jedem Punkte M zugehörigen Linie des grössten Moments ganz leicht. Diese Linie steht nach §. 77. auf dem w des Punktes rechtwinklig und ist dem Momente dieses Paares proportional; sie ist daher dasselbe, was wir in §. 53. die Axe des Paares nannten. Da nun die Resultante der Axen zweier zusammenzusetzenden Paare die Axe des resultirenden Paares ist (ebendas.), und da jetzt das Paar w aus der Zusammensetzung der Paare w' und v', $-v$ hervorgeht, so ist die Linie des grössten Moments für den Punkt M die Resultante der Linie des grössten Moments für einen in v' liegenden Punkt M' und der nach demselben Massstabe bestimmten Axe des Paares v', $-v$. Die hierzu nöthige Construction ist folgende.

Sey, wie im Vorigen, v' auf w' rechtwinklig; AB (Fig. 26.) stelle die Richtung von v' vor; wir wollen sie die **Hauptlinie des Systems** nennen und sie uns wiederum vertical denken. Für jeden ihrer Punkte M' ist die Linie des grössten Moments eine von M' aus auf sie getragene, dem Momente von w' proportionale, Länge $M's'$.

Ist nun M irgend ein anderer Punkt des Raums und M' der Punkt der Hauptlinie, welcher mit M in einer Horizontalen liegt, so ist MAB die Ebene des Paares v', $-v$; $M'M$ seine Breite, also $M'M.v$ sein Moment und ein auf der Ebene MAB errichtetes, diesem Momente proportionales Perpendikel MO die Axe des Paares. Die Linie des grössten Moments für M wird hiernach gefunden als die Resultante Ms von MO und einer an M der $M's'$ gleich und parallel getragenen MQ, oder, was dasselbe ist, als die Hypotenuse Ms des bei O rechtwinkligen Dreiecks MOs, in welchem Os gleich und parallel der Ms' ist; sie ist daher rechtwinklig auf dem von M auf die Hauptlinie gefällten Perpendikel $M'M$, und ihre Grösse, so wie ihr Winkel mit der Hauptlinie, sind bei einem und demselben Systeme bloss von der Grösse dieses Perpendikels abhängig.

Weil MO proportional mit $M'M.v$ ist, so ist das Verhältniss $MO:M'M$, oder die Tangente des Winkels $MM'O$ proportional mit v, also constant, weil v von einem Punkte M zum andern seine Grösse nicht ändert. Für alle Punkte, welche in einer und derselben durch M' gehenden Horizontalen $M'C$ enthalten sind, liegen daher die zugehörigen O in einer gleichfalls durch M' gehenden Horizontalen $M'D$. Vertical über O in einer Höhe $=M's'$, also in einer durch s' mit $M'D$ gezogenen Parallele $s'E$ liegt der Punkt s. Lässt man daher die Punkte M und s in $M'C$ und $s'E$ sich so fortbewegen, dass die Gerade Ms auf $M'C$ immer normal steht, so ist Ms jederzeit die Linie des grössten Moments für M, und man sieht hieraus deutlich, wie bei wachsender Entfernung des M von M' die Grösse dieser Linie und ihr Winkel mit der Hauptlinie immer zunehmen.

Setzt man den Winkel OsM, oder den Winkel von Ms mit der Hauptlinie, $=\omega$ und den constanten Winkel $CM'D=\alpha$, so ist

$$Ms=\sqrt{(M's'^2+M'M^2\operatorname{tang}\alpha^2)} \text{ und } \operatorname{tang}\omega=\frac{M'M}{M's'}\operatorname{tang}\alpha,$$

woraus dasselbe erkannt wird.

Zum Schlusse wollen wir die erhaltenen Resultate in folgenden Sätzen zusammenstellen.

1) *Für alle Punkte, welche in der Fläche eines um die Hauptlinie, als Axe, beschriebenen Cylinders liegen, sind die Linien der grössten Momente einander gleich, berühren insgesammt diesen Cylinder und machen mit der Hauptlinie gleiche Winkel. Für alle Punkte, die in einer und derselben Seitenlinie des Cylinders liegen, sind daher diese Linien einander parallel und in einer Ebene enthalten, die den Cylinder in der Seitenlinie berührt. Für alle Punkte dagegen, welche in dem Durchschnitte der Cylinderfläche mit einer auf der Hauptlinie normalen Ebene, also in einem Kreise, liegen, bilden die zugehörigen Linien die Fläche eines durch Umdrehung um die Hauptlinie erzeugten hyperbolischen Hyperboloids.*

2) *Je weiter ein Punkt von der Hauptlinie absteht, je grösser also der Durchmesser des Cylinders ist, desto grösser ist die zugehörige Linie des grössten Moments und desto mehr nähert sich der Winkel dieser Linie mit der Hauptlinie einem rechten, indem die Tangente desselben dem Abstande des Punktes von der Hauptlinie proportional ist. Für Punkte, die in einer auf der Hauptlinie normalen Geraden liegen, bilden die zugehörigen Linien die Fläche eines hyperbolischen Paraboloids.* Denn indem M in

$M'C$ fortbewegt wird, bleibt Ms einer auf $M'C$ n
malen Fläche parallel und trifft fortwährend die zw
Geraden $M'C$ und $s'E$.

3) *Für jeden Punkt in der Hauptlinie fällt d
Linie des grössten Moments in die Hauptlinie sel
und ist kleiner, als für jeden andern Punkt, also e
Minimum Maximorum.*

§. 83.

Aufgabe. Die Gleichung für die Hauptlinie u
den Werth des kleinsten unter den grössten Moment
zu finden.

Auflösung. Das Coordinatensystem sey ein rec
winkliges. Beziehen wir nun das System der Krä
zuerst auf eine Axe t, welche durch den Punkt (f, g,
geht, eine Länge $=1$ hat und mit den Axen der
y, z die Winkel φ, χ, ψ macht, so sind die Project
nen der Axe auf die Coordinatenaxen, $=\cos\varphi$, cos
$\cos\psi$, und es ergiebt sich das Moment für diese Ax
wenn wir in dem in §. 65. erhaltenen Ausdrucke d
Moments, für F, G, H diese Cosinus substituire
Bezeichnen wir daher dieses Moment mit T und setz
zur Abkürzung:

$$(1) \ldots L - gC + hB = L_{,}, \quad M - hA + fC = M_{,},$$
$$N - fB + gA = N_{,},$$

so wird

$$(2) \ldots T = L_{,} \cos\varphi + M_{,} \cos\chi + N_{,} \cos\psi.$$

Setzen wir ferner

$$\sqrt{(L_{,}^2 + M_{,}^2 + N_{,}^2)} = T', \text{ und}$$
$$(3) \ldots \frac{L_{,}}{T'} = \cos\varphi', \quad \frac{M_{,}}{T'} = \cos\chi', \quad \frac{N_{,}}{T'} = \cos\psi',$$

so ist $(4) \ldots \cos\varphi'^2 + \cos\chi'^2 + \cos\psi'^2 = 1$ und

$$T = T'(\cos\varphi \cos\varphi' + \cos\chi \cos\chi' + \cos\psi \cos\psi').$$

Wegen (4) lassen sich aber φ', χ', ψ' als drei Winkel betrachten, die eine Gerade — sie heisse t' und werde gleichfalls durch (f, g, h) gelegt — mit den Axen der x, y, z bildet; und es ist mithin

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \cos\chi\cos\chi' + \cos\psi\cos\psi' = \cos t^\wedge t',$$

$$\text{folglich} \ldots\ T = T'\cos t^\wedge t'.$$

Nehmen wir daher bloss φ, χ, ψ veränderlich, so ist der grösste Werth von T, $= T'$ und dafür der Winkel $t'^\wedge t = 0$, d. h. unter allen durch den Punkt (f, g, h) gehenden Axen t ist t' diejenige, welcher das grösste Moment zukommt; die Winkel dieser Axe mit den Coordinatenaxen sind $= \varphi'$, χ', ψ', und das grösste Moment selbst $= T'$.

Unter den verschiedenen grössten Momenten, welche den verschiedenen Punkten (f, g, h) zugehören, fallen aber die Axen t' aller derjenigen Momente in die Hauptlinie, deren Axen mit v, d. i. mit der Resultante von A, B, C, parallel sind, für welche sich also

$$\cos\varphi' : \cos\chi' : \cos\psi' = A : B : C$$

verhalten. Hiermit folgt aus (3) und (1):

$$\frac{L - gC + hB}{A} = \frac{M - hA + fC}{B} = \frac{N - fB + gA}{C},$$

welches daher zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten f, g, h aller derjenigen Punkte sind, welche nebst ihren Axen in die Hauptlinie fallen; es sind folglich die zwei Gleichungen der Hauptlinie selbst.

Setzen wir zuletzt noch in dem allgemeinen Ausdrucke des Moments (2) die durch φ, χ, ψ bestimmte Richtung der Axe parallel mit der Hauptlinie, also mit der Resultante von A, B, C, so werden

$$\cos\varphi = \frac{A}{D},\quad \cos\chi = \frac{B}{D},\quad \cos\psi = \frac{C}{D},$$

wo $D = \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}$, und damit

$$T = \frac{AL_{,} + BM_{,} + CN_{,}}{D}$$

$$= \frac{AL + BM + CN}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}} \text{ wegen (1),}$$

also unabhängig von f, g, h. Alle mit der Hauptlinie parallele Axen haben daher gleiche Momente, deren gemeinschaftlicher Werth der eben gefundene ist. Dieser Werth kommt daher auch dem Momente einer in die Hauptlinie selbst fallenden Axe zu, d. i. dem kleinsten unter den grössten Momenten.

Zusatz. Dass alle mit der Hauptlinie parallele Axen gleiche Momente haben, wird auch leicht aus Fig. 26. erkannt. Denn da Ms die Linie des grössten Moments für den Punkt M, und MQS ein rechter Winkel ist, so ist die der $M's'$ gleiche und parallele Linie MQ dem Momente der in sie fallenden Axe proportional (§. 76.).

Von den Axen, deren Momente null sind.

§. 84.

Noch eine besondere Aufmerksamkeit verdienen diejenigen Axen, in Bezug auf welche das Moment des Systems null ist. Sie ergeben sich unmittelbar aus dem Vorigen, da es unter allen durch einen Punkt M gehenden Axen alle diejenigen und keine andern sind, welche auf der dem Punkte zukommenden Linie des grössten Moments rechtwinklig sind, also in der Ebene des dem M zugehörigen und durch ihn selbst gelegten Paares w liegen. In dieser Beziehung wollen wir die

durch M gelegte Ebene von w die Nullebene des Punktes M nennen.

So wie es nun für jeden Punkt eine Nullebene giebt, so lässt sich auch umgekehrt in jeder Ebene ein Punkt angeben, in Bezug auf welchen sie die Nullebene ist, also ein Punkt, den man den Nullpunkt der Ebene nenne, und welcher die Eigenschaft besitzt, dass von allen in der Ebene enthaltenen Axen bloss für diejenigen, welche den Punkt selbst treffen, das Moment des Systems null ist.

Denn werde die Ebene von der vertikalen Hauptlinie AB (Fig. 26.) im Punkte M' geschnitten und sey $M'C$ eine in der Ebene durch M' gelegte Horizontale, so liegt darin der Nullpunkt M der Ebene und ist von M' um einen Abstand $M'M = M's\frac{\tang\omega}{\tang\alpha}$ entfernt, wo $M's$ und α constant sind, und ω den Winkel der Ebene mit dem Horizonte bezeichnet (§. 82.). Ist aber die Ebene mit der Hauptlinie parallel und von ihr um einen Abstand $= x$ entfernt, berührt sie also einen um die Hauptlinie mit einem Halbmesser $= x$ beschriebenen Cylinder, so liegen in der Ebene die Axen, deren Momente null sind, einander parallel und machen mit der Ebene des Horizonts einen Winkel, dessen Tangente $= \frac{x \tang\alpha}{M's}$. Vergl. §. 82. In diesem Falle ist also der Nullpunkt der Ebene als unendlich entfernt zu betrachten.

Hat man somit den Nullpunkt M einer Ebene gefunden, so kann für eine andere durch M nicht gehende Axe t der Ebene das Moment nicht $= 0$ seyn. Denn ist erstens die Ebene nicht parallel mit der Hauptlinie, so lässt sich unter der hier allein geltenden Voraussetzung, dass die zwei Kräfte, worauf das System re-

ducirbar ist, nicht in einer Ebene liegen, das System auf ein in der Ebene enthaltenes Paar w und auf eine durch M gehende mit der Hauptlinie parallele Kraft v reduciren, und für die Axe t sind nur die Momente der zwei Kräfte, welche das Paar ausmachen, nicht aber das Moment von v, also auch nicht das Moment des Systems, null.

Ist zweitens die Ebene mit der Hauptlinie parallel, und ist p eine der in ihr liegenden parallelen Axen, für welche das Moment des Systems null ist, t irgend eine andere in der Ebene enthaltene Axe, welche p im Punkte N schneidet, so ziehe man durch N (in der Ebene) eine Parallele v mit der Hauptlinie und beschreibe in der Ebene einen Kreis, welcher p in N berühre. Alsdann verhalten sich die Momente in Bezug auf die Axen v und t, wie die in den Kreis fallenden Theile von v und t (§. 76.). Da nun das Moment für v gleich dem kleinsten unter den grössten Momenten ist (§. 83. Zus.), und dieses unter der gemachten Voraussetzung nicht null seyn kann, so kann es auch nicht das Moment für die Axe t seyn.

§. 85.

Die Eigenschaften von Nullebenen und Nullpunkten lassen sich auch ganz leicht aus den oben (§. 69.) analytisch bewiesenen Sätzen herleiten, dass von der einen der beiden Kräfte, worauf ein System reducirbar ist, die Richtung im Allgemeinen nach Willkühr genommen werden kann, und dass, wenn die eine der beiden Kräfte durch einen gegebenen Punkt geht, die andere in einer damit gegebenen, den Punkt enthaltenden Ebene liegt, und umgekehrt. Von diesen Sätzen will

ich jetzt noch einen andern auf ganz einfache Betrachtungen sich gründenden Beweis mittheilen, und hierauf den Zusammenhang zwischen ihnen und den Eigenschaften der Nullebenen und Nullpunkte kürzlich angeben.

1) Hat man zwei Kräfte P und P_1 (Fig. 27.), deren Richtungen nicht in einer Ebene liegen, und eine Richtung q, welche mit der einen P der beiden erstern in einer Ebene a liegt, und daher, im Allgemeinen wenigstens, mit P einen Punkt A gemein hat, so ist es im Allgemeinen immer möglich, die zwei Kräfte in zwei mit ihnen gleichwirkende Q und Q_1 zu verwandeln, von denen die eine Q die Richtung q hat.

Denn da P und P_1 mit Q und Q_1 gleichwirkend seyn sollen, so müssen es auch P und $-Q$ mit Q_1 und $-P_1$ seyn. P und $-Q$ haben aber, als zwei Kräfte, deren Richtungen in einer Ebene a liegen und im Punkte A derselben sich schneiden, eine durch den Schneidepunkt A gehende und in der Ebene a enthaltene Resultante R. Diese Resultante R muss daher auch den Kräften Q_1 und $-P_1$ zukommen, es muss folglich auch Q_1 die Resultante von P_1 und R seyn; und da zwei nicht in einer Ebene enthaltene Kräfte nicht auf eine einzige Kraft reducirt werden können (§. 57.), so müssen P_1 und R, so wie auch Q_1, in einer Ebene a_1 enthalten seyn und sich darin, im Allgemeinen wenigstens, in einem Punkte A_1 schneiden. Hiernach ist die Richtung von R bestimmt als der Durchschnitt der Ebene a, in welcher P und Q wirken, mit der durch P_1 und den Schneidepunkt A von P und Q zu legenden Ebene a_1. Da also von den drei Kräften P, $-Q$, $-R$, welche im Gleichgewichte sind, die Richtungen, und von der ersten derselben, P, die

Intensität, gegeben sind, so lassen sich auch von Q und R die Intensitäten finden (§. 28. *a.*), und hieraus die Richtung und Intensität von Q_1, als von einer Kraft, welche mit $-R$ und $-P_1$ im Gleichgewichte ist.

2) Wir folgern hieraus weiter: Ist von der Richtung der Kraft Q nur der Punkt A gegeben, in welchem sie die P schneiden soll, so kennt man von der Kraft Q_1 nur die Ebene a_1, in welcher sie mit P_1 liegen muss; es ist nämlich die durch A und P_1 zu legende a_1. Ist aber für Q nur die Ebene a gegeben, in welcher sie mit P liegen soll, so ist von Q_1 nur der Punkt A_1 bekannt, in welchem sie die P_1 schneiden muss; es ist nämlich der Durchschnitt der Ebene a mit P_1.

Wenn demnach von irgend zwei Kräften, die mit zwei nicht in einer Ebene liegenden Kräften P und P_1 gleiche Wirkung haben, die eine der P in einem Punkte A begegnet, so liegt die andere in der durch A und P_1 bestimmten Ebene; und wenn die eine mit P in einer Ebene a liegt, so geht die andere durch den Schneidepunkt von a mit P_1.

3) Auch in dem Falle, wenn die gegebene Richtung von Q nicht, wie vorhin, mit der Richtung von P in einer Ebene liegt, lassen sich im Allgemeinen die Intensität von Q und die Richtung und Intensität von Q_1 so bestimmen, dass Q und Q_1 mit P und P_1 gleichwirkend werden. Denn zieht man eine Gerade s, welche die Richtung von P und Q zugleich schneidet, so kann man nach dem Vorigen P und P_1 zuerst in zwei Kräfte S und S_1 verwandeln, von denen S die Richtung s hat, und kann sodann auf dieselbe Weise aus S und S_1 die mit ihnen, und folglich auch mit P und P_1, gleichwirkenden Kräfte Q und Q_1 herleiten.

4) *Ist daher ein System von Kräften auf zwei nicht in einer Ebene liegende Kräfte reducirbar, so kann die Richtung der einen von beiden im Allgemeinen jede beliebige seyn.* Um so mehr kann folglich das noch Unbestimmtere verlangt werden, dass die eine der beiden Kräfte durch einen beliebig gegebenen Punkt gehe, oder in einer beliebig gegebenen Ebene liege. Der Punkt A und die Ebene a in dem Satze nr. 2. können daher ebenfalls ganz nach Willkühr bestimmt werden, welches uns zu dem Schlusse führt:

In Bezug auf ein System von Kräften, welches auf zwei nicht in einer Ebene liegende Kräfte P und P' reducirt werden kann, entspricht jedem Punkte A eine durch ihn gehende Ebene a_1 und jeder Ebene a ein in ihr liegender Punkt A_1 dergestalt, dass, wenn die eine der beiden Kräfte, P, dem Punkte A begegnet, oder in der Ebene a wirkt, die andere P_1 in der entsprechenden Ebene a_1 enthalten ist, oder den entsprechenden Punkt A_1 trifft.

5) Geht aber die Kraft P durch den Punkt A, und liegt folglich die Kraft P_1 in der dem A entsprechenden Ebene a_1, so schneidet jede durch A gehende und in a_1 enthaltene Axe sowohl die Richtung von P, als die von P_1, und es ist daher in Bezug auf jede dieser Axen das Moment von P und P_1, folglich auch das Moment des Systems, null.

Die einem Punkte A entsprechende Ebene a_1 ist mithin die Nullebene des Punktes, und eben so der einer Ebene a entsprechende Punkt A_1 der Nullpunkt der Ebene.

Zusätze. *a.* Ist a_1 die dem Punkte A entsprechende Ebene, so ist auch A der der Ebene a_1 entspre-

chende Punkt, indem, wenn die eine Kraft P_1 in a_1 wirkt, die andere P dem A begegnen muss; und eben so erhellet, dass wenn der Ebene a der Punkt A_1 entspricht, auch umgekehrt letzterer die erstere zur entsprechenden hat.

b. Ist A ein Punkt der Ebene a, und wird die willkührliche Richtung der Kraft P so genommen, dass sie zugleich durch A geht und in a liegt, so muss die Kraft P_1 wegen des erstern in der Ebene a_1 liegen und wegen des letztern durch den Punkt A_1 gehen; mithin muss A_1 ein Punkt der Ebene a_1 seyn, d. h:

Liegt ein Punkt in einer Ebene, so geht die dem Punkte entsprechende Ebene durch den der Ebene entsprechenden Punkt.

§. 86.

Diese gegenseitigen Beziehungen zwischen Punkten und Ebenen sind eine besondere Art der sogenannten dualen oder reciproken Verhältnisse, welche in der neuern Zeit so mannigfach untersucht worden sind, und wobei zwei Systeme von Punkten und Ebenen in einer solchen Beziehung zu einander betrachtet werden, dass jedem Punkte des einen Systems eine Ebene des andern und jeder Ebene des einen ein Punkt des andern entspricht. Im Gegenwärtigen kommt noch die besondere Bedingung hinzu, dass jeder Punkt in der ihm entsprechenden Ebene selbst liegt, und — was eine Folge davon ist, — jede Ebene den ihr entsprechenden Punkt selbst enthält. Hierdurch werden nicht nur die bei der Dualität im Allgemeinen Statt habenden Beziehungen in etwas modificirt, sondern es treten noch Relationen von eigenthümlicher Beschaffenheit hinzu. Folgende

Sätze geben eine kurze Uebersicht dieser merkwürdigen Beziehungen*).

Zuerst folgt unmittelbar aus dem Vorhergehenden:

1. Zu jedem Punkte gehört eine ihn enthaltende Nullebene und zu jeder Ebene ein in ihr liegender Nullpunkt.

2. Ist von einer Ebene und einem in ihr liegenden Punkte erstere die Nullebene des letztern, so ist auch letzterer der Nullpunkt der erstern, und umgekehrt.

3. Liegt ein Punkt in einer Ebene, so geht die Nullebene des Punktes durch den Nullpunkt der Ebene; oder was dasselbe ist:

3*. Geht eine Ebene durch einen Punkt, so liegt der Nullpunkt der Ebene in der Nullebene des Punktes.

Aus 3. fliesst weiter: Liegen mehrere Punkte in einer Ebene, so gehen die Nullebenen der Punkte durch den Nullpunkt der Ebene; d. h.

4. Von mehreren in einer Ebene liegenden Punkten schneiden sich die Nullebenen in einem Punkte, welcher in ersterer Ebene liegt und ihr Nullpunkt ist.

Eben so folgt aus 3*.:

4*. Von mehrern sich in einem Punkte schneidenden Ebenen liegen die Nullpunkte in einer Ebene, welche erstern Punkt enthält und seine Nullebene ist.

Aus 4. schliessen wir ferner: Von mehrern in zwei Ebenen zugleich, d. i. in einer Geraden, liegenden

*) Ausführlicher habe ich diesen Gegenstand in einer Abhandlung „Ueber eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume" in Crelle's Journal X. Band, pag. 317. untersucht.

Punkten gehen die Nullebenen sowohl durch den Nullpunkt der einen, als durch den der andern jener zwei Ebenen, d. i. sie schneiden sich in der diese zwei Nullpunkte verbindenden Geraden; also:

5. **Die Nullebenen mehrerer in einer Geraden liegenden Punkte schneiden sich wiederum in einer Geraden.**

Aehnlicherweise ergiebt sich aus 4°.:

5°. **Die Nullpunkte mehrerer sich in einer Geraden schneidenden Ebenen liegen wiederum in einer Geraden.**

Nach 5. und 5°. entspricht also jeder Geraden eine zweite Gerade, so dass jeder Punkt der einen zu seiner Nullebene die durch ihn und durch die andere Gerade gelegte Ebene hat, und dass von jeder durch die eine Gerade gelegten Ebene der Nullpunkt derjenige ist, in welchem sie von der andern Geraden geschnitten wird. Je zwei solchergestalt sich entsprechende Gerade sind zugleich die Richtungen zweier Kräfte, auf welche sich das System reduciren lässt. Denn sind a und b die Nullebenen der Punkte A und B, und geht die eine der beiden Kräfte durch A oder B, so muss die andere resp. in a oder b liegen; geht folglich die eine durch A und B zugleich, so muss die andere den Durchschnitt von a mit b, d. i. die der AB entsprechende Gerade zur Richtung haben.

In dem besonderen Falle, wenn B in a liegt, geht nach 3. die Nullebene b von B durch den Nullpunkt A von a, d. i. a und b schneiden sich in AB selbst. Jede in einer Ebene a durch den Nullpunkt A derselben gezogene Gerade, oder, was dasselbe ist, jede durch einen Punkt A gelegte Gerade, welche zugleich in der Nullebene a des Punktes liegt, also jede Axe,

in Bezug auf welche das Moment des Systems null ist, hat folglich sich selbst zur entsprechenden, und es ist daher unmöglich, das System auf zwei Kräfte zu reduciren, von denen die eine eine solche Gerade zur Richtung hat.

Um diese Sätze durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir von den drei Coordinatenebenen, worauf das System der Kräfte in dem Vorigen bezogen worden, die Nullpunkte, und von dem Anfangspunkte der Coordinaten O die Nullebene zu bestimmen suchen.

Für eine in der Ebene der xy liegende Axe sind h und H null (§. 62.), folglich das Moment des Systems (§. 65.) in Bezug auf eine solche Axe

$$=rF(L-gC)+rG(M+fC).$$

Man sieht nun sogleich, dass, wenn man f und g durch die Gleichungen und $M+fC=0$ und $L-gC=0$ bestimmt, dieses Moment, unabhängig von F und G, also für jede in der Ebene der xy enthaltene Axe, welche durch den Punkt (f, g) geht, null wird. Dieser Punkt, d. i.

$$\left(-\frac{M}{C}, \frac{L}{C}, 0\right)$$

ist daher der Nullpunkt der Ebene der xy, und eben so finden sich

$$\left(0, -\frac{N}{A}, \frac{M}{A}\right) \text{ und } \left(\frac{N}{B}, 0, -\frac{L}{B}\right)$$

als die Nullpunkte der Ebenen der yz und zx.

Ferner ist für eine durch O gelegte Axe, wenn wir den Anfangspunkt (f, g, h) derselben mit O zusammen fallen lassen und daher $f, g, h=0$ setzen, das Moment

$$=rFG+rGM+rHN.$$

Da nun jetzt (F, G, H) der Endpunkt der Axe ist, so liegt derselbe, und mithin die von O ausgehende Axe selbst, wenn in Bezug auf sie das Moment null ist, in einer Ebene, deren Gleichung

$$Lx + My + Nz = 0,$$

welches also die Gleichung der Nullebene von O ist.

In dieser Ebene müssen nach 4° die Nullpunkte der in O sich schneidenden Coordinatenebenen liegen. Auch finden wir dieses durch unsere Rechnung bestätigt, wenn wir in der Gleichung für erstere Ebene die vorhin für die Nullpunkte erhaltenen Coordinaten substituiren.

§. 87.

Weitere Folgerungen ergeben sich, wenn wir Systeme von Ebenen betrachten, die entweder mit einer und derselben Geraden, oder mit einander parallel sind.

Drei oder mehrere sich in Parallelen schneidende Ebenen können als solche angesehen werden, die sich in einem unendlich entfernten Punkte schneiden, und wir schliessen daher nach 4°.:

6. Die Nullpunkte mehrerer sich in Parallelen schneidenden Ebenen liegen in einer mit den parallelen Durchschnittslinien ebenfalls parallelen Ebene, deren Nullpunkt unendlich entfernt nach der durch die Parallelen bestimmten Richtung zu liegt.

Da ferner parallele Ebenen als solche betrachtet werden können, die sich in einer unendlich entfernt liegenden Geraden schneiden, so müssen nach 5°.

7. die Nullpunkte mehrerer paralleler Ebenen in einer Geraden liegen.

Seyen a, a', a'',... mehrere unter sich parallele Ebenen, und eben so bilden b, b', b'',... ein zweites

System unter sich, aber nicht auch mit den erstern parallelen Ebenen. Von a, a',.. seyen A, A',.. und von b, b',.. seyen B, B',.. die Nullpunkte, so liegen nach 7. A, A',.. in einer Geraden α, und B, B',.. in einer zweiten Geraden β. Da ferner die Ebenen a, a',.. von den Ebenen b, b',.. in einander parallelen Geraden geschnitten werden, so liegen nach 6. sämmtliche Nullpunkte A, A',.. B, B',.., also auch die Geraden α und β, in einer Ebene. Zugleich aber können α und β keinen Punkt mit einander gemein haben. Denn fiele z. B. A mit B zusammen, so müssten auch die Nullebenen a und b dieser Punkte zusammenfallen, welches gegen die Voraussetzung ist. Mithin sind α und β mit einander parallel, und wir können den Satz aufstellen:

Hat man mehrere Systeme paralleler Ebenen, so sind die Geraden, welche sich in jedem Systeme durch die Nullpunkte der Ebenen legen lassen, insgesammt mit einander parallel.

Diese parallele Richtung der Geraden ist, wie man leicht sieht, dieselbe, welche wir im Obigen bei jedem Systeme von Kräften als einzig in ihrer Art fanden und uns vertical dachten. Wir wollen auch gegenwärtig diese Richtung vertical annehmen und hiernach den vorigen Satz so aussprechen:

8. Die Nullpunkte eines Systems paralleler Ebenen liegen in einer verticalen Linie.

Hieraus folgt leicht der umgekehrte Satz:

9. Von zwei Punkten A und B, die in einer Verticallinie liegen, sind die Nullebenen a und b parallel.

Denn wären sie es nicht, so lege man durch B eine Ebene b' parallel mit a. Der Nullpunkt von b' müsste dann derjenige seyn, in welchem b' von einer

durch A gelegten Verticale getroffen wird, folglich B selbst. Mithin hätte B zwei verschiedene Nullebenen, welches nicht möglich ist.

10. Jede verticale Ebene c hat einen unendlich entfernten Nullpunkt, und jeder unendlich entfernte Punkt C eine verticale Nullebene.

Denn seyen A und B zwei Punkte in c, welche in einer verticalen Linie liegen. Die Nullebenen a und b von A und B sind folglich (9.) einander parallel, und da nach 3. in a sowohl, als in b, der Nullpunkt von c liegt, so muss dieser unendlich entfernt seyn.

Um den zweiten Theil des Satzes zu beweisen, lege man durch C eine Ebene a, und eine mit a parallele Ebene b, die, weil C unendlich entfernt seyn soll, ebenfalls durch C gehend zu betrachten ist. Nach 3*. geht aber die Nullebene von C sowohl durch den Nullpunkt A von a, als durch den Nullpunkt B von b, also durch die Verticallinie AB (8.) und ist daher selbst vertical.

Da die Nullebenen zweier Punkte, die in einer Verticale liegen, einander parallel sind (9.), also sich erst in einer unendlich entfernten Geraden schneiden, so ist die einer Verticalen entsprechende Gerade unendlich entfernt. Von den zwei Kräften, worauf sich das System zurückführen lässt, kann daher keine eine verticale (mit der Hauptlinie parallele) Richtung haben, eben so wenig, als sie mit einer Axe, für welche das Moment des Systems null ist, zusammen fallen kann (vor. §.).

§. 88.

Zusätze. Sey $ABCD$ eine dreiseitige Pyramide, und von ihren Seitenflächen BCD, CDA, DAB,

ABC seyen die Nullpunkte resp. *F*, *G*, *H*, *I*, so ist *FGHI* eine in *ABCD* eingeschriebene Pyramide, zugleich aber auch eine um letztere umschriebene. Denn die Ebene durch die Nullpunkte *G*, *H*, *I* der sich in *A* schneidenden Ebenen *CDA*, *DAB*, *ABC* ist nach §. 86. 4°. die Nullebene von *A*, und auf gleiche Art sind *HIF*, *IFG*, *FGH* die Nullebenen von *B*, *C*, *D*. Die zwei Pyramiden stehen daher in einer solchen gegenseitigen Beziehung, dass die Ecken der einen die Nullpunkte der Flächen der andern, und die Flächen der einen die Nullebenen der Ecken der andern sind. Dabei entspricht jeder Kante der einen Pyramide eine Kante in der andern; z. B. der Kante *AB*, in welcher sich die Flächen *DAB* und *ABC* schneiden, die Kante *HI*, welche die Nullpunkte dieser Flächen verbindet*).

Dieselbe Betrachtung lässt sich auch auf jedes andere Polyeder anwenden. Sey *S* die Ecke eines Polyeders, *a*, *b*, *c*,... die in dieser Ecke in der Ordnung, wie sie an einander grenzen, (*a* an *b*, *b* an *c*, u. s. w.) zusammenstossenden Seitenflächen, und *A*, *B*, *C*,... die Nullpunkte dieser Flächen, die daher in einer Ebene, in der Nullebene von *S*, liegen. *ABC*... ist mithin ein ebenes Vieleck, und auf gleiche Art wird bei jeder andern Ecke durch die Nullpunkte der um die Ecke herumliegenden Flächen ein ebenes Vieleck bestimmt. Von allen Seiten aller dieser Vielecke gehört aber jede Seite, z. B. *AB*, zweien Vielecken zugleich an. Denn wenn die Kante des Polyeders, in welcher sich die Flächen *a* und *b* schneiden, und von welcher

*) Ueber die Construction zweier solchen Pyramiden siehe einen Aufsatz des Verf. in Crelle's Journal, III. Band, pag. 273. Vergl. auch Steiner Systemat. Entwickel. pag. 247.

S der eine Endpunkt ist, zum andern Endpunkte die Ecke T hat, so gehört die Seite AB des Winkels $ABC\ldots$ auch zu dem Vielecke, welches sich in der Nullebene von T aus den Nullpunkten der in T zusammenstossenden Flächen bildet. Alle diese Vielecke hängen daher als Seitenflächen eines zweiten Polyeders zusammen, welches in das erstere zugleich um- und eingeschrieben ist; eingeschrieben, weil seine Ecken A, B,... die Nullpunkte der Flächen a, b,... des erstern sind, — umschrieben, weil seine Flächen $ABC\ldots$, u. s. w. die Ecken S, u. s. w. des erstern zu Nullpunkten haben. Jedes von ihnen hat daher eben so viel Ecken und Flächen, als das andere resp. Flächen und Ecken hat; nach dem bekannten Euler'schen Satze, dass die Kantenzahl der um zwei Einheiten verminderten Summe der Ecken- und Flächenzahlen gleich ist, haben folglich beide Polyeder gleich viel Kanten, was auch schon daraus fliesst, dass jeder Kante des einen eine Kante des andern entspricht, z. B. der Kante des ersten, in welcher sich die Flächen a und b schneiden, die Kante AB des zweiten.

Seyen, um diese Betrachtungen noch durch ein Beispiel deutlicher zu machen, a und a', b und b', c und c' die sechs sich zu zweien gegenüberliegenden Vierecke eines Hexaëders, in weiterem Sinne genommen, so sind die Nullpunkte A, A', B, B', C, C' dieser Flächen die Ecken eines in und um das Hexaëder beschriebenen Oktaëders, welche sich eben so paarweise, A und A', u. s. w. gegenüberstehen. So wie das Hexaëder 6 Flächen und 8 Ecken hat, kommen dem Oktaëder 8 Flächen und 6 Ecken zu. Die Zahl der Kanten ist aber bei jedem der beiden Körper $= 12$.

Ist das Hexaëder ein Parallelepipedum, und daher

a' mit a, b' mit b, c' mit c parallel, so sind die drei Diagonalen AA', BB', CC' des Oktaëders einander parallel (§. 87. 8.); die Ebene $AA'BB'$ ist parallel mit den vier Kanten des Parallelepipedums, in denen sich die Flächen a, a', b, b' schneiden; u. s. w. (§. 87. 6.). Allerdings macht es einige Schwierigkeit, sich ein Oktaëder, dessen Diagonalen einander parallel sind, vorzustellen. Es gehört zu den bis jetzt noch nicht betrachteten Polyedern, deren Flächen sich innerhalb der sie begrenzenden Kanten schneiden, zu Polyedern, welche den in §. 45. 3. gedachten Vielecken analog sind, deren Perimeter, bevor sie in sich zurückkehren, sich gleichfalls ein- oder mehrere Male begegnen.

Relationen zwischen Momenten, deren Axen beliebige Richtungen haben.

§. 89.

Die Momente eines Systems in Bezug auf mehrere sich in einem Punkte M schneidende Axen sind, wie wir in §. 76. gesehen haben, den Theilen der Axen proportional, welche in letztern von einer gewissen durch M zu beschreibenden Kugelfläche abgeschnitten werden. Sind daher von drei sich in einem Punkte M schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen MA, MB, MC die Momente α, β, γ gegeben, so lässt sich daraus das Moment δ für irgend eine vierte durch M gehende Axe MD durch folgende einfache Construction finden: Man nehme in den Axen MA, MB, MC die Abschnitte Ma, Mb, Mc proportional mit α, β, γ und beschreibe durch die vier Punkte M, a, b, c eine Kugelfläche. Schneidet nun diese die Axe MD in d, so wird Md dem gesuchten δ proportional seyn.

Eben so lässt sich aus den Momenten Ma, Mb

zweier sich schneidenden Axen MA, MB das Moment Md für jede dritte durch M gehende und mit erstern beiden in einer Ebene liegende Axe MD finden, indem man durch M, a, b einen Kreis beschreibt, welcher MD in d schneiden wird.

§. 90.

Schneiden sich die drei Axen, deren Momente gegeben sind, unter rechten Winkeln, so lässt sich die Aufgabe sehr einfach durch Rechnung lösen. — Sey unter allen durch M gehenden Axen MS die Axe des grössten Moments, und daher, wenn diese von der Kugelfläche in s geschnitten wird, Ms ein Durchmesser der Kugel. Alsdann ist $Ma = Ms . \cos SMA$, oder, wenn wir das grösste Moment $= \sigma$ setzen und uns eine zweite Kugel denken, die um M als Mittelpunkt mit der gemeinschaftlichen Länge der Axen, als Halbmesser, beschrieben ist, und auf deren Oberfläche daher die Punkte S, A, B, C, D liegen:

$$\alpha = \sigma \cos AS, \text{ und eben so}$$

$$\beta = \sigma \cos BS, \quad \gamma = \sigma \cos CS, \quad \delta = \sigma \cos DS.$$

Schneiden sich nun, wie angenommen worden, die drei Axen MA, MB, MC unter rechten Winkeln, und sind daher die Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks ABC insgesammt $= 90°$, so hat man:

$$\cos DS = \cos AD \cos AS + \cos BD \cos BS + \cos CD \cos CS.$$

Hierin für $\cos DS$, $\cos AS$, ... die ihnen nach vorigen Formeln proportionalen Werthe δ, α, ... substituirt, erhält man:

$$(A) \ldots \delta = \alpha \cos AD + \beta \cos BD + \gamma \cos CD.$$

Aus den Momenten für drei sich unter rechten Winkeln in einem Punkte schneidenden Axen findet

sich demnach das Moment für jede vierte durch denselben Punkt gehende Axe, wenn man erstere drei Momente resp. mit den Cosinussen der Winkel multiplicirt, welche von den Axen dieser Momente mit der Axe des vierten gebildet werden, und diese Producte addirt.

Uebrigens ist unter derselben Voraussetzung, dass $BC = CA = AB = 90°$:

$$\cos AS^2 + \cos BS^2 + \cos CS^2 = 1$$

und daher

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \sigma^2,$$

$$\cos AS = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \quad \cos BS = \text{u. s. w.}$$

Formeln, mittelst deren man aus den Momenten für drei sich rechtwinklig in einem Punkte schneidende Axen, von der durch denselben Punkt gehenden Axe, welche das grösste Moment hat, dieses Moment selbst und die Lage der Axe finden kann.

§. 91.

Die im vorigen §. erhaltene Relation zwischen vier Momenten, von deren vier Axen sich drei unter rechten Winkeln treffen, ist zuerst von Euler gegeben worden*). Es ist aber nicht schwer, eine eben so einfache Formel für den allgemeinern Fall herzuleiten, wenn die vier Axen willkührliche Winkel mit einander machen.

1) Von einer durch die Gerade PQ vorgestellten Kraft ist das Moment in Bezug auf die Axe $A_1 B_1$ die Pyramide $A_1 B_1 PQ$ (§. 59. Zus.). Seyen nun A und B zwei beliebige andere Punkte in $A_1 B_1$, so verhalten

*) Nova Acta Petrop. Tom. VII. vom Jahre 1793.

sich die Pyramiden $A_1B_1PQ : ABPQ$ wie die Dreiecke $A_1B_1P : ABP$, und diese wie die Geraden $A_1B_1 : AB$; und es ist daher, wenn wir die Axenlänge A_1B_1 zur Einheit des Maasses nehmen:

$$ABPQ = AB . A_1B_1PQ,$$

wo die Linie AB positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem sie mit der in sie fallenden Axe A_1B_1 einerlei oder entgegengesetzte Richtung hat.

2) Auf gleiche Art ist, wenn wir noch andere Kräfte $P'Q'$, $P''Q''$,... auf die Axe A_1B_1 beziehen:

$$ABP'Q' = AB . A_1B_1P'Q',$$

u. s. w. Addiren wir alle diese Gleichungen, so kommt mit Anwendung des Summationszeichens Σ, und wenn wir das Moment des von den Kräften PQ, $P'Q'$,... gebildeten Systems in Bezug auf eine Axe, welche in der Geraden AB liegt, aber nicht AB selbst, sondern die Linieneinheit $(= A_1B_1)$ zur Länge hat, mit $[AB]$ bezeichnen:

$$\Sigma ABPQ = AB\Sigma A_1B_1PQ = AB[AB].$$

3) Seyen MA_1, MB_1, MC_1, MD_1 vier sich in einem Punkte M schneidende Axen, von denen die drei ersten wenigstens nicht in einer Ebene liegen. Man nehme in MD_1 beliebig einen Punkt D und construire um MD als Diagonale ein Parallelepipedum, dessen in M zusammenstossende Kanten in die Axen MA_1, MB_1, MC_1 fallen. Seyen resp. A, B, C die andern Endpunkte dieser Kanten, so ist, wenn PQ wiederum eine Kraft bezeichnet:

$$MDPQ = MAPQ + MBPQ + MCPQ \quad (\S. 63. 3.)$$

folglich auch bei einem Systeme von mehreren Kräften PQ, $P'Q'$, u. s. w.:

$$\Sigma MDPQ = \Sigma MAPQ + \Sigma MBPQ + \Sigma MCPQ$$

folglich nach nr. 2.:

$$(B) \ldots MD[MD] = MA[MA] + MB[MB] + MC[MC].$$

Wenn demnach für die drei Axen MA_1, MB_1, MC_1 die Momente $[MA]$, $[MB]$, $[MC]$ gegeben sind, und das Moment $[MD]$ für die Axe MD_1 gesucht wird, so construire man das Parallelepipedum $MABCD$, als wodurch sich die Verhältnisse zwischen $MA, \ldots MD$ ergeben, und man erhält damit nach letzterer Gleichung folgenden das Gesuchte.

§. 92.

Zusätze. *a*. Macht man in den Axen $MA_1, \ldots MD_1$ die Linien $Ma, \ldots Md$ den Momenten der Axen resp. proportional, so liegen a, b, c, d mit M in der Oberfläche einer Kugel (§. 76.), und man bekommt damit den geometrischen Satz:

Hat man eine Kugel und ein Parallelepipedum, dessen eine Ecke M in der Fläche der erstern liegt, und sind a, b, c, d die Punkte, in denen die Kugelfläche resp. von den in M zusammenstossenden Kanten MA, MB, MC und der Diagonale MD des Parallelepipedums geschnitten wird, so ist:

$$MD . Md = MA . Ma + MB . Mb + MC . Mc.$$

b. Schneiden sich die drei Axen MA_1, MB_1, MC_1 unter rechten Winkeln, so verhalten sich

$$MA : MB : MC : MD$$
$$= \cos A_1 MD_1 : \cos B_1 MD_1 : \cos C_1 MD_1 : 1$$

und man kommt durch Substitution dieser Verhältnisswerthe in die allgemeine Gleichung (B) auf die specielle Gleichung (A) in §. 90. wieder zurück.

§. 93.

So sehr auch die Gleichung (B) die Eulersche (A) an Allgemeinheit übertrifft, so ist sie doch nur als ein specieller Fall einer weit allgemeinern Relation anzusehen, die sich auf ganz ähnliche Art wie (B) entwickeln lässt.

Man habe, wie vorhin, ein beliebiges System von Kräften PQ, $P'Q'$, $P''Q''$,..., welches S heisse. Seyen ferner AA', BB', CC',... die Kräfte eines zweiten Systems T, welche einander das Gleichgewicht halten. Alsdann ist wegen dieses Gleichgewichts von T, wenn man T nach und nach auf alle Kräfte PQ, $P'Q'$,... des Systems S, als auf Axen, bezieht (§.58.):

$$AA'PQ + BB'PQ + CC'PQ + \ldots = 0$$
$$AA'P'Q' + BB'P'Q' + CC'P'Q' + \ldots = 0$$

u. s. w.; und wenn man alle diese Gleichungen summirt:

$$\Sigma AA'PQ + \Sigma BB'PQ + \Sigma CC'PQ + \ldots = 0;$$

folglich nach §. 91. 2.:

$$AA'[AA'] + BB'[BB'] + CC'[CC'] + \ldots = 0,$$

wo $[AA']$, $[BB']$,... die Momente des Systems S für Axen bezeichnen, welche an Länge einander gleich sind und resp. in den Geraden AA', BB',... liegen, und wo man, wie schon erinnert, die Coefficienten AA', BB',.. dieser Momente positiv oder negativ zu nehmen hat, je nachdem die Richtungen dieser Linien mit denen der in sie fallenden Axen übereinstimmen, oder nicht.

Bezieht man demnach ein System S von Kräften auf mehrere (einander gleiche) Axen, und kann man nach der Richtung einer jeden dieser Axen eine Kraft wirken lassen von der Grösse, dass alle diese

neuen Kräfte einander das Gleichgewicht halten, so ist die Summe der Momente von S, jedes Moment vorher mit einem Coefficienten multiplicirt, welcher der, der Axe des Moments zugehörigen, Kraft proportional ist, $=0$.

Auf gleiche Art findet sich, wenn AA' die Resultante von BB', CC', ... ist:

$$AA'[AA'] = BB'[BB'] + CC'[CC'] + \ldots$$

Auch fliesst dieses schon aus der vorhergehenden Formel. Denn alsdann sind $A'A$, BB', ... mit einander im Gleichgewichte und daher

$$A'A[A'A] + BB'[BB'] + \ldots = 0.$$

Es ist aber $A'A = -AA'$ und $[A'A] = [AA']$, indem der eine Ausdruck, so gut wie der andere, das Moment des Systems S in Bezug auf eine Axe vorstellt, welche in der durch die zwei Punkte A und A' gezogenen Geraden enthalten ist; folglich u. s. w.

§. 94.

Beispiele. 1) Hat man vier sich in einem Punkte schneidende Axen, so kann man immer ein Parallelepipedum construiren, von welchem drei in dem Punkte zusammenstossende Kanten und die durch denselben Punkt gehende Diagonale in die vier Axen zu liegen kommen. Von vier Kräften aber, welche ihrer Grösse und Richtung nach durch diese drei Kanten und die Diagonale vorgestellt werden, ist die Kraft in der Diagonale die Resultante der drei andern. Hiermit das vorige Theorem in Verbindung gebracht, kommen wir auf den Satz in §. 91. zurück, der daher von dem vorigen nur ein besonderer Fall ist.

2) Ist $ABCD$ ein Parallelogramm, so sind die

Kräfte AB und AD mit den Kräften BC und DC gleichwirkend, und daher:

$$AB[AB]+AD[AD]=BC[BC]+DC[DC].$$

3) Construirt man zu einem ebenen Vierecke $ABCD$ (Fig. 13.) ein zweites $abcd$, dessen Seiten ab, bc,... mit den gleichnamigen AB, BC,... des erstern, und dessen Diagonalen ac, bd mit den ungleichnamigen BD, AC des erstern parallel sind, so sind vier Kräfte, welche in den vier Seiten der einen Vierecks wirken, und deren Intensitäten sich wie die entsprechenden Seiten des andern verhalten, im Gleichgewichte (§. 29.); folglich:

$$ab[AB]+bc[BC]+cd[CD]+da[DA]=0, \text{ so wie}$$
$$AB[ab]+BC[bc]+CD[cd]+DA[da]=0,$$

zwei Gleichungen, deren jede die Relation zwischen den Momenten für irgend vier in einer Ebene gelegene Axen darstellt.

§. 95.

Folgerungen. *a.* Ist in dem zweiten Beispiele des vorigen §. D der Nullpunkt der Ebene des Parallelogramms $ABCD$, so ist $[AD]=0$, $[DC]=0$, und die Formel wird

$$AB[AB]=BC[BC];$$

folglich verhalten sich die Momente $[AB]$ und $[BC]$, wie BC und AB, d. i. wie die Abstände der Linien AB und BC von D; also:

Von je zwei in einer Ebene liegenden Axen sind die Momente den Abständen der Axen vom Nullpunkte der Ebene proportional, so dass, wenn man um den Nullpunkt, als Mittelpunkt, Kreise in der Ebene

beschreibt, alle Axen, welche einen und denselben Kreis berühren, gleiche Momente haben, und dass für Axen, welche Tangenten verschiedener Kreise sind, die Momente sich wie die Halbmesser der Kreise verhalten.

b. Sind daher AA', BB' (Fig. 28.) zwei parallele Axen, und trägt man auf sie Längen Aa, Bb, welche den Momenten für diese Axen proportional sind, so muss in der Geraden DD', welche durch den Schneidepunkt D der Geraden AB und ab parallel mit den Axen gezogen wird, der Nullpunkt der Ebene der Axen liegen. Denn die Abstände der AA' und BB' von irgend einem Punkte dieser, und nur dieser, Geraden DD' verhalten sich wie Aa und Bb. In Bezug auf DD', als Axe, ist daher das Moment null, und für je zwei mit DD' parallele und in einer Ebene gelegene Axen sind die Momente den Abständen der Axen von DD' proportional. Für eine dritte mit AA' und BB' parallele und mit ihnen in derselben Ebene liegende Axe CC', die von AB in C und von ab in c geschnitten wird, ist folglich das Moment proportional mit Cc.

c. Auf ähnliche Art, wie hiernach aus den Momenten für zwei parallele Axen das Moment für jede dritte mit ihnen parallele und in derselben Ebene enthaltene Axe gefunden werden kann, lässt sich auch aus den Momenten Aa, Bb, Cc (Fig. 29.) für drei parallele und nicht in einer Ebene liegende Axen das Moment für jede vierte mit ihnen parallele Axe p überhaupt bestimmen. — Eine durch Aa und Bb gelegte Ebene und eine durch Cc und p gelegte mögen sich in der Geraden q schneiden, die mit den vier Axen $Aa, \ldots p$ parallel seyn wird. Sind daher F und f die Durchschnitte von q mit AB und ab, so ist Ff das Moment

für q, und eben so, wenn p von CF und cf resp. in G und g getroffen wird, Gg das Moment für p. Es liegt aber G mit A, B, C, und g mit a, b, c in einer Ebene, welches folgende noch kürzere Regel giebt: Man lege durch A, B, C eine Ebene und eine zweite durch a, b, c, und wenn diese Ebenen die vierte Axe p resp. in G und g schneiden, so ist Gg das für p gesuchte Moment.

Sind daher von drei parallelen aber nicht in einer Ebene liegenden Axen die Momente einander gleich; so ist auch das Moment jeder vierten mit ihnen parallelen Axe von derselben Grösse, indem dann jene zwei Ebenen eine parallele Lage haben. Sind aber die drei Momente ungleich, so schneiden sich die zwei Ebenen, und wenn man durch ihre Durchschnittslinie eine Ebene α parallel mit den Axen $Aa, \ldots$ legt, so ist von jeder mit $Aa, \ldots$ parallelen Axe das Moment dem Abstande der Axe von α proportional. Alle Axen, die parallel mit $Aa, \ldots$ und in einer und derselben mit α parallelen Ebene enthalten sind, haben daher einander gleiche Momente. Jede in α selbst fallende und mit $Aa, \ldots$ parallele Axe hat ein Moment $= 0$. Der Nullpunkt der Ebene α ist daher unendlich entfernt und liegt nach der durch die Parallelen $Aa, \ldots$ bestimmten Richtung. Die Ebene α ist folglich mit der Hauptlinie des Systems parallel (§. 87. 10.).

§. 96.

Zusatz. Aus dem Satze des vorigen §., dass die Momente für Axen, die in einer Ebene liegen, sich wie die Abstände der Axen vom Nullpunkte der Ebene verhalten, fliesst eine leichte Methode, um aus den Momenten dreier Axen in einer Ebene, die nicht

alle drei mit einander parallel sind, oder sich in einem Punkte schneiden, den Nullpunkt der Ebene und damit das Moment für jede vierte Axe der Ebene zu finden. Sey ABC (Fig. 30.) das von den Richtungen der drei Axen gebildete Dreieck, (von welchem die eine Ecke auch unendlich entfernt seyn kann,) und die Momente dieser nach BC, CA, AB gerichteten Axen seyen f, g, h. Man construire ein zweites Dreieck $A'B'C'$, dessen Seiten $B'C'$,... mit den gleichnamigen BC,... des erstern parallel laufen und von BC,... sich in Abständen befinden, die den Momenten f, g, h proportional sind. Da hiernach die Abstände des Punktes A' von CA und AB sich wie g zu h verhalten, und in demselben Verhältnisse die Abstände jedes andern Punktes der Linie AA', und nur dieser, von CA und AB sind, so muss jenem Satze zufolge der Nullpunkt der Ebene in AA', und aus ähnlichem Grunde auch in BB' und CC', liegen. Die drei Geraden AA', BB', CC' schneiden sich daher in einem Punkte N, im Nullpunkte der Ebene, und das Moment für jede vierte Axe der Ebene verhält sich z. B. zu f, wie der Abstand der vierten Axe von N zum Abstande der Axe BC von N.

Beiläufig folgt hieraus der auch sonst schon bekannte geometrische Satz, dass bei zwei ähnlichen und ähnlich liegenden Dreiecken die drei Geraden, welche die sich entsprechenden Ecken verbinden, sich in einem Punkte schneiden.

— Die Aufgabe, aus den Momenten dreier in einer Ebene liegenden Axen das Moment für irgend eine vierte Axe der Ebene zu finden, kann auch mittelst einer der beiden Formeln in §. 94. 3. gelöst werden, wie von selbst einleuchtet.

Noch eine Lösung der Aufgabe geht aus der in §. 89. zu Ende bemerkten Construction hervor. Liegen nämlich die Axen, deren Momente gegeben sind, in den Seiten des Dreiecks ABC, und ist D ein beliebiger Punkt der vierten Axe, so erhält man mittelst jener Construction aus den Momenten der Axen in AB und AC das Moment der Axe in AD, aus den Momenten der Axen in AC und BC das Moment der Axe in CD, und aus den Momenten der Axen in AD und CD das Moment der vierten Axe selbst. — Hieraus ergeben sich zugleich einige geometrische Sätze, bei deren Entwickelung ich mich aber nicht aufhalten will.

§. 97.

Die im Vorhergehenden erhaltenen Relationen zwischen den Momenten eines Systems in Bezug auf mehrere Axen fanden nur dann statt, wenn Kräfte bestimmt werden konnten, welche, nach den Axen wirkend, einander das Gleichgewicht hielten. Die Relationen selbst waren von linearer Form, und jene Kräfte traten darin als Coefficienten der Momente auf. Es entsteht nun die Frage, ob nicht auch dann, wenn ein solches Gleichgewicht nicht möglich ist, Relationen, wenn auch von anderer, als linearer Form, zwischen den Momenten sich angeben lassen.

Um dieses zu untersuchen, wollen wir mehrere Axen in solcher Anzahl $= n$, und in solcher Lage gegen einander voraussetzen, dass zwischen den auf sie bezogenen Momenten irgend eines Systems von Kräften stets eine Gleichung, und nur eine, statt findet. Für ein System S seyen diese n Momente $= M, M', M'', \ldots$; für ein beliebiges andere S' seyen sie $= M+N$, $M'+N'$, $M''+N''$, ... Nach der Natur der Momente

werden alsdann für ein drittes System, welches aus den Kräften von S' und den direct entgegengesetzten von S besteht, die Momente in Bezug auf dieselben Axen, $= N, N', N'', \ldots$ seyn. Besteht daher die gesuchte Gleichung das einemal zwischen $M, M', \ldots$ und das andremal zwischen $M+N, M'+N', \ldots$, so muss sie auch bestehen zwischen $N, N', \ldots$, d. i. wenn man für $M, M', \ldots$ die Incremente setzt, welche diese Grössen der Gleichung zufolge haben können. Wie die Analysis lehrt, ist dieses aber nur dann möglich, wenn die Gleichung von der linearen Form $pM + p'M' + p''M'' + \ldots = 0$ ist, wo $p, p', p'', \ldots$ Zahlen vorstellen, die von einem Systeme S zum andern in constanten Verhältnissen zu einander stehen*).

Um diese constanten Verhältnisse zu bestimmen, setze man, das System S bestehe aus einer einzigen

---

*) In der That, sind z. B. drei Veränderliche x, y, z durch eine Gleichung $z = f(x, y)$ mit einander verbunden, so ist die allgemeine Gleichung zwischen ihren Incrementen Δx, Δy, Δz:

$$\Delta z = p\Delta x + q\Delta y + \tfrac{1}{2} r\Delta x^2 + s\Delta x\Delta y + \tfrac{1}{2} t\Delta y^2 + \ldots$$

wo $p, q, r, s, t, \ldots$ die aus der Gleichung $z = f(x, y)$ zu bestimmenden Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \ldots$$

bezeichnen. Soll nun zwischen den Incrementen dieselbe Gleichung, wie zwischen x, y, z, statt finden, soll also Δz bloss von Δx und Δy, nicht aber von x und y abhängen, so müssen auch in jener allgemeinen Gleichung der Incremente die Coefficienten $p, q, r, s, t, \ldots$ unabhängig von x und y, folglich constant seyn. Sind aber p und q constant, so sind alle folgenden $r, s, t, \ldots$ null. Hiernach ist die Gleichung zwischen den Incrementen:

$$\Delta z = p\Delta x + q\Delta y,$$

und damit die Gleichung zwischen x, y, z selbst:

$$z = px + qy,$$

wo p und q constant sind.

Kraft. Alsdann sind M, M', ... die (sechsfachen) ramiden, welche diese eine Kraft S zur gemeinscl lichen Kante und die der Längeneinheit gleichen n A zu gegenüberstehenden Kanten haben. Die Prod pM, $p'M'$, ... sind folglich Pyramiden, die man erl wenn man in den vorigen die mit den Axen zusamm fallenden Kanten resp. $=p$, p', ..., statt $=1$, nim folglich auch die Momente von Kräften p, p', ..., wel in den n Axen wirken, in Bezug auf eine in der R tung von S liegende Axe. Da nun die Summe di Momente für jede Lage von S null seyn soll, so mü die Kräfte p, p', ... einander das Gleichgewicht hal

Sind demnach mehrere Axen in solcher An $=n$ und in solcher Lage gegen einander vorhan dass die Momente M, M', ... $M^{(n-2)}$ für $n-1$ selben nach der Beschaffenheit des Systems, wel auf sie bezogen wird, alle möglichen Werthe ha können, das Moment $M^{(n-1)}$ für die nte Axe durch jene $n-1$ Momente bestimmt wird, so ist deshalb zwischen den n Momenten statt findende G chung von der linearen Form:

$$pM + p'M' + \ldots + p^{(n-1)} M^{(n-1)} = 0,$$

und Kräfte, welche die Richtungen der n Axen ha und sich wie die Coefficienten p, p', ... $p^{(n-1)}$ halten, sind mit einander im Gleichgewichte.

Sind folglich — so können wir hieraus noch sel ssen — die Momente für irgend $n-1$ Axen von ander unabhängig, und lassen sich für die $n-1$ A und eine $n$te keine Kräfte angeben, welche, nach ih wirkend, einander das Gleichgewicht halten, so ist

das Moment für die $n$te Axe von den Momenten für die $n-1$ erstern unabhängig.

Dieselbe Folgerung gilt aber auch dann noch, wenn die Momente für die $n-1$ erstern Axen, oder für einige derselben, von einander abhängig sind, so dass zwischen ihnen eine oder auch etliche Gleichungen (α) statt finden. Denn gäbe es eine Gleichung (β) zwischen dem $n$ten Momente und den übrigen, so könnte man aus (β) mittelst der Gleichungen (α) so viel der $n-1$ erstern Momente eliminiren, dass in (β) ausser dem $n$ten Momente nur solche zurückblieben, welche von einander unabhängig wären, und es müssten dann Kräfte, nach den Axen dieser Momente wirkend, mit der Kraft in der $n$ten Axe im Gleichgewichte seyn können, welches gegen die Voraussetzung streitet; überhaupt also:

Je nachdem sich für die Richtungen gegebener Axen Kräfte, die im Gleichgewichte mit einander sind, angeben lassen, oder nicht, findet auch zwischen den Momenten eines Systems in Bezug auf diese Axen Abhängigkeit, oder keine, statt.

§. 98.

Nach den Ergebnisssen des vorigen §. ist die Untersuchung über die gegenseitige Abhängigkeit zwischen den Momenten eines Systems in Bezug auf gegebene Axen in jedem Falle auf die Beantwortung der Frage zurückgebracht: Welches muss die gegenseitige Lage einer gegebenen Anzahl gerader Linien seyn, wenn Kräfte sollen gefunden werden können, welche, nach diesen Linien wirkend, einander das Gleichgewicht halten?

Wir gehen, um diese schon an sich nicht unin-

teressante Frage zu beantworten, von den sech gemeinen Bedingungen des Gleichgewichts aus:

$$(a)\begin{cases} A=0, & B=0, & C=0, \\ L=0, & M=0, & N=0, \end{cases} \quad (\S.\ 66.)$$

wo, wenn P, P',... die Kräfte des Systems und φ, φ', χ', ψ';... die Winkel bezeichnen, welche die tungen von P; P';... mit den drei Axen eines winkligen Coordinatensystems machen, und wen y, z), (x', y', z'),... beliebige in den Richtunge P, P',... genommene Punkte sind:

$$A=\Sigma P\cos\varphi,\quad B=\Sigma P\cos\chi,\quad C=\Sigma P\cos\psi$$
$$L=\Sigma P(y\cos\psi-z\cos\chi),\quad M=\Sigma P(z\cos\varphi-x\cos$$
$$N=\Sigma P(x\cos\chi-y\cos\varphi).$$

Aus dem Früheren wissen wir, dass zwischen Kräften nur dann Gleichgewicht herrschen kann, ihre Richtungen in eine und dieselbe Gerade (§. 4. I.), und zwischen drei Kräften nur dann, ihre Richtungen in einer und derselben Ebene l (vergl. §. 85. 1.) und sich darin entweder in Punkte schneiden oder einander parallel sind. Das muss sich auch aus den Gleichungen (a) folgern la Doch wollen wir uns bei den hierzu nöthigen Rec gen nicht aufhalten, sondern sogleich zu dem übergeben, wenn

1) das System aus 4 Kräften besteht. Eli man diese 4 Kräfte aus den Gleichungen (a), so ben, weil in (a) nur die gegenseitigen Verhältniss Kräfte vorkommen, 3 Gleichungen, sie mögen (b) he — zwischen den die Richtungen der vier Kräft stimmenden Grössen x, y, z, φ, χ, ψ, x',... ψ''' zu Diese Gleichungen (b) geben daher für die gegens Lage der 4 Richtungen die Bedingungen an,

denen es möglich ist, dass 4 nach diesen Richtungen wirkende Kräfte sich das Gleichgewicht halten können.

Nun wird die Lage einer geraden Linie im Raume im Allgemeinen durch 4 Constanten bestimmt, z. B. die Richtung der Kraft P durch die zwei Coordinaten x, y ihres Durchschnitts mit der Ebene der x, y, und durch die zwei Winkel φ und χ, welche P mit den Axen der x und y macht. Die Lage einer Geraden ist daher als bestimmt anzusehen, wenn zwischen diesen 4 Constanten 4 Gleichungen gegeben sind. Zu einer solchen Gleichung führt unter andern die Bedingung, dass die Gerade eine andere gegebene Linie schneiden soll; zu zwei solchen Gleichungen die Bedingung, dass die Gerade durch einen gegebenen Punkt gehen, oder in einer gegebenen Ebene liegen soll.

Bezeichnen wir daher die Richtungen der vier Kräfte mit a, b, c, d und nehmen a, b, c als willkührlich gegeben an, so haben wir für die Bestimmung der 4 Constanten von d die 3 Gleichungen (b), und wir können daher nach Willkühr noch eine 4te Gleichung hinzusetzen, welche z. B. die Bedingung ausdrückt, dass d eine gegebene Gerade l schneiden soll. Dies führt zu der bestimmten Aufgabe:

I. *Zu drei gegebenen Richtungen a, b, c eine vierte d zu finden, welche eine noch andere gegebene Gerade l schneidet, dergestalt, dass sich vier Kräfte angeben lassen, welche, nach diesen vier Richtungen wirkend, im Gleichgewichte sind.*

2) Bestehe das System aus 5 Kräften. Nach Elimination derselben aus den 6 Gleichungen (a) erhält man zwei Bedingungsgleichungen (b) zwischen ihren Richtungen. Lässt man daher 4 dieser Richtungen gegeben seyn, so muss die 5te den 2 Gleichungen (b)

Genüge leisten, und man kann daher zur vollständig Bestimmung der 4 Constanten der 5ten Richtung no zwei beliebige andere Gleichungen zwischen diesen Co stanten hinzufügen, wodurch z. B. die Bedingung au gedrückt wird, dass die 5te Richtung durch einen geg benen Punkt *M* gehen, oder in einer gegebenen Ebe μ liegen soll. Hieraus fliesst die bestimmte Aufgabe

II. *Zu vier gegebenen Richtungen a, b, c, eine fünfte e zu finden, welche durch einen gegeben Punkt M geht, oder in einer gegebenen Ebene C^2 e halten ist, dergestalt, dass sich nach diesen fü Richtungen wirkende Kräfte angeben lassen, welc sich das Gleichgewicht halten.*

3) Hat man ein System von 6 Kräften, so ge nach Elimination derselben aus (*a*) eine einzige Gle chung (*b*) zwischen den Richtungen hervor. Hier kö nen also 5 Richtungen beliebig gegeben seyn und f die 6te 3 Bedingungen nach Willkühr genommen we den, z. B. dass die 6te drei gegebene Gerade, od einen gegebenen Punkt und eine gegebene Gera treffen soll. Man hat daher die Aufgabe:

III. *Zu fünf gegebenen Richtungen a, b, c, e eine sechste f zu finden, welche in einer gegebene Ebene μ liegt und darin einen gegebenen Punkt trifft, dergestalt, dass sich nach diesen sechs Ric tungen wirkende Kräfte u. s. w.*

4) Ist das System aus 7 Kräften zusammengesetz so lassen sich aus (*a*) je 5 derselben eliminiren, u man bekommt damit das Verhältniss je zweier Kräf zu einander, ausgedrückt durch die Grössen, welc die Richtungen der 7 Kräfte bestimmen.

Sind daher sieben Richtungen gegeben, so i es im Allgemeinen immer möglich, Kräfte zu finde

welche, nach diesen Richtungen wirkend, einander das Gleichgewicht halten. Die Intensität einer dieser Kräfte kann nach Willkühr bestimmt werden.

Aehnlicherweise erhellet, dass im Allgemeinen für 8, 9, etc. gegebene Richtungen sich Kräfte im Gleichgewichte finden lassen, und dass von diesen Kräften resp. 2, 3, etc. ihrer Intensität nach willkührlich genommen werden können.

§. 99.

Zusätze. *a.* Von den drei im vorigen §. gestellten Aufgaben lässt sich die erste, ohne die allgemeinen Formeln (*e*) zu Hülfe zu nehmen, auch folgendergestalt durch Construction lösen. Zuerst sieht man leicht, dass jede Gerade x, welche die drei gegebenen Richtungen a, b, c, zugleich schneidet, auch die vierte d schneiden muss. Denn heissen P, Q, R, S die nach a, b, c, d gerichteten Kräfte, so sind in Bezug auf x, als Axe, die Momente von P, Q, R einzeln null (§. 60.), mithin muss wegen des Gleichgewichts zwischen P, Q, R, S auch das Moment von S für x null seyn; dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn x der d begegnet.

Halten sich daher vier Kräfte das Gleichgewicht, so trifft jede Gerade, welche die Richtungen dreier der vier Kräfte schneidet, auch die Richtung der vierten.

Es ist aber bekannt, dass, wenn eine Gerade x so fortbewegt wird, dass sie drei andere a, b, c fortwährend schneidet, jede Gerade d, welche drei verschiedenen Lagen h, i, k der x begegnet, auch jede vierte Lage der x trifft, dass folglich die durch die Bewegung der x erzeugte Fläche, — ein hyperbo-

lisches Hyperboloid, — auch entsteht, wenn *d* *h*, *i*, *k* fortgeführt wird.

Man ziehe demnach drei Gerade *h*, *i*, *k*, de jede die Richtungen *a*, *b*, *c* zugleich schneidet, und Aufgabe ist darauf zurückgebracht: eine Gerade *d* zu legen, dass sie die vier Geraden *h*, *i*, *k*, *l* zugle trifft. Dieses ist aber im Allgemeinen entweder doppelte Weise, oder gar nicht möglich, je nachd nämlich das durch die Bewegung von *x* oder *d* erzeu Hyperboloid von der Geraden *l* entweder in zwei Pu ten, oder gar nicht getroffen wird. Im erstern Fa führe man die Gerade *d* an *h*, *i*, *k* so weit fort, sie durch den einen oder andern Schneidepunkt ge und sie wird dann die verlangte Lage haben. Im le teren Falle aber ist die Lösung der Aufgabe unmögli

Nachdem somit die Richtung von *d*, wo mögli bestimmt worden, hat es keine Schwierigkeit, die V hältnisse zwischen den Kräften *P*, *Q*, *R*, *S* noch a zumitteln. Man lege die Kräfte parallel mit ihren kannten Richtungen *a*, *b*, *c*, *d* an einen und densell Punkt. Weil dadurch das Gleichgewicht, das zwisc ihnen bestehen soll, nicht gestört wird (§. 67. 2.), muss jetzt die Resultante von *P* und *Q*, welche *T* heis der Resultante von *R* und *S* gleich und direct ent gengesetzt seyn. Die Richtung von *T* ergiebt sich hi mit als der Durchschnitt der Ebene, in welcher *P* u *Q* liegen, mit der Ebene, in welcher *R* und *S* si Nach §. 28. *a*. kennt man damit die Verhältnisse z schen *P*, *Q*, *T*, so wie zwischen *R*, *S*, — *T*, folgl auch die Verhältnisse zwischen *P*, *Q*, *R*, *S* selbst.

b. Ohne bei der Lösung der zweiten und drit Aufgabe zu verweilen, will ich über diese Aufgal nur folgende Bemerkungen hinzufügen.

Da sich bei vier gegebenen Richtungen a, b, c, d zu jedem Punkte M eine durch ihn gehende fünfte, so sie zu jeder Ebene μ eine in ihr liegende fünfte Richtung finden lässt, so wird durch alle fünften Richtungen, die zu vier gegebenen gefunden werden können, der ganze Raum erfüllt, jedoch so, dass sich im Allgemeinen keine zwei derselben schneiden, oder, was dasselbe ist, keine zwei in einer Ebene liegen, indem es sonst für den Durchschnittspunkt M zwei durch ihn gehende fünfte Richtungen e und e_1 gäbe, und damit auch jede andere durch M gehende und in der Ebene von e und e_1 liegende Gerade f eine fünfte Richtung seyn könnte. Sind nämlich P, Q, R, S, T Kräfte, die, nach a, b, c, d, e gerichtet, sich das Gleichgewicht halten, und sind die nach a, b, c, d, e_1 gerichteten Kräfte P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1 ebenfalls im Gleichgewichte, so würden auch die Kräfte $P+P_1$, $Q+Q_1$, $R+R_1$, $S+S_1$ mit der Resultante der nach e und e_1 gerichteten Kräfte T und T_1 im Gleichgewichte seyn. Weil es aber sowohl bei den erstern fünf Kräften $P, \ldots T$, als bei den fünf letztern $P_1 \ldots T_1$, nur auf ihr gegenseitiges Verhältniss ankommt, so würde man das noch willkührliche Verhältniss von T zu T_1 so bestimmen können, dass die gedachte Resultante irgend eine durch M gehende und in der Ebene von e und e_1 liegende Richtung f hätte.

Haben die vier gegebenen Richtungen eine solche Lage, dass sich zwei Gerade m und n angeben lassen, von deren jeder jede der vier Richtungen geschnitten wird, so ist die einem Punkte M zugehörige fünfte Richtung e diejenige, welche durch M, die m und n zugleich schneidend, gelegt wird. Denn für m und n, als Axen, ist das Moment jeder der nach a, b, c, d wirkenden Kräfte null. Mithin muss auch das Moment

der nach e gerichteten Kraft in Bezug auf m sowo
als auf n, null seyn.

c. Sind fünf Richtungen a, b, c, d, e gegeben, sind alle daraus herzuleitenden sechsten Richtungen $f_1, f_2, \ldots$, welche durch einen und denselben Punkt gehen, in einer Ebene enthalten. Denn gesetzt, lägen f, f_1, f_2 nicht in einer Ebene. Da nun d Kräfte, die nach drei sich in einem Punkte M schn denden und nicht in einer Ebene liegenden Richtung wirken, immer in solchen Verhältnissen zu einand genommen werden können, dass ihre durch M gehen Resultante irgend eine beliebige Richtung hat, so wür man nach ähnlichen Schlüssen, wie vorhin, von d fünf Richtungen $a, \ldots e$ zu allen durch M gehend Richtungen überhaupt, also auch zu allen durch M geh den und in der Ebene μ enthaltenen Richtungen, ni bloss zu einer derselben, wie es die dritte Aufga fordert, gelangen können. Sind aber die sechsten Ri tungen, welche den Punkt M treffen, in einer Ebene enthalten, so ist die in der Aufgabe geforderte Ri tung der Durchschnitt der Ebenen μ und ν.

Auf ähnliche Weise zeigt sich, dass alle aus $a, \ldots$ herzuleitenden sechsten Richtungen, welche in ein und derselben Ebene μ liegen, sich in einem Punkte dieser Ebene schneiden müssen, und dass die in d Aufgabe verlangte Richtung die Gerade MN ist.

Bei einer solchen Lage der fünf Richtungen en lich, bei welcher sie sämmtlich von einer Geraden geschnitten werden, wird jede aus ihnen herzuleiten Richtung von m, als von einer der Axen, für welc das Moment der sechs Kräfte null ist, gleichfalls g troffen. Die in diesem Falle gesuchte sechste Richtu

ist daher die von M nach dem Durchschnitte von μ und m gezogene Gerade.

§. 100.

Dieselben Bedingungen, die wir somit für die Richtungen von Kräften gefunden haben, wenn die Kräfte sich das Gleichgewicht sollen halten können, müssen nun auch für die Richtungen von Axen statt finden, wenn zwischen den Momenten irgend eines Systems in Bezug auf diese Axen eine Relation bestehen soll, oder, was dasselbe ist, wenn das Moment für eine dieser Axen aus den Momenten für die übrigen soll hergeleitet werden können. Es findet daher

1. *zwischen den Momenten eines Systems in Bezug auf zwei Axen nur dann eine Relation statt, wenn letztere in einer und derselben Geraden liegen. Die zwei Momente sind dann einander gleich und haben einerlei oder entgegengesetzte Zeichen, nachdem die Axen einerlei oder entgegengesetzte Richtungen haben.*

2. *Zwischen den Momenten in Bezug auf drei Axen, von denen keine zwei in dieselbe Gerade fallen, giebt es nur dann, und dann immer, eine Relation, wenn die drei Axen in einer Ebene liegen und sich darin entweder in einem Punkte schneiden* (§. 89.), *oder einander parallel sind* (§. 95. *b.*).

3. *Sind die Momente dreier Axen von einander unabhängig, so kann aus ihnen das Moment für jede vierte bestimmt werden, welche gegen die erstern drei eine solche Lage hat, dass jede Gerade, welche erstere drei schneidet, auch der vierten Axe begegnet.*

Von den Momenten dreier Axen, die in einer Ebe liegen, aber sich nicht in einem Punkte schneiden, i daher das Moment jeder vierten Axe in der Ebene a hängig (§. 96.), und aus den Momenten dreier Axe die sich in einem Punkte schneiden, aber nicht in ein Ebene liegen, kann das Moment für jede vierte d Punkt treffende Axe gefunden werden (§. 89. u. §. 91. Wenn keine von drei Axen die andere schneidet, so i von ihren Momenten das Moment jeder vierten abhängi welche zu den drei erstern eine hyperboloidische La hat (§. 99. *a*.).

4. *Bei vier Axen, die rücksichtlich der auf e bezogenen Momente von einander unabhängig sin giebt es für jeden Punkt eine durch ihn gehend und für jede Ebene eine in ihr liegende, Axe, dere Moment aus den Momenten der vier erstern bestimm werden kann* (§. 99. *b*.).

Wird jede der vier Axen von denselben zwei Ge raden getroffen, so sind von ihnen alle diejenigen, un keine anderen, abhängig, welche gleichfalls von diese Geraden geschnitten werden.

5. *Bei fünf von einander unabhängigen Axe giebt es für jeden Punkt eine durch ihn gehen Ebene, und für jede Ebene einen in ihr liegende Punkt dergestalt, dass aus den Momenten für erste fünf Axen das Moment für jede durch den Punk gehende und in der Ebene zugleich enthaltene Ax gefunden werden kann* (§. 99. *c*.).

Werden die fünf Axen von einer und derselbe Geraden geschnitten, so sind von ihnen alle diejenige und keine anderen, abhängig, welche dieser Gerade ebenfalls begegnen.

6. *Aus den Momenten für sechs von einander unabhängige Axen kann das Moment für jede siebente gefunden werden* (§. 98. zu Ende).

§. 101.

Zusatz. Da die Gleichung zwischen den von einander abhängigen Momenten von linearer Form ist und darin kein von den Momenten freies Glied vorkömmt (§. 97.) so schliessen wir noch, dass wenn von den $n-1$ Momenten, woraus sich ein $n$tes bestimmen lässt, jedes $=0$ ist, auch das $n$te $=0$ seyn muss.

Sind also die Momente für 6 von einander unabhängige Axen einzeln $=0$, so ist es auch das Moment jeder 7ten, und es herrscht Gleichgewicht. Eben so, wie bei einem Systeme von Kräften in einer Ebene daraus, dass die Momente des Systems für 3 nicht in einer Geraden liegende Punkte der Ebene $=0$ waren, die Nullität des Moments für jeden andern Punkt der Ebene, und somit das Gleichgewicht des Systems, sich folgern liess (§. 33. A.*), kann also bei einem System im Raume auf die Nullität aller Momente und somit auf das Gleichgewicht geschlossen werden, wenn man weiss, dass für irgend 6 von einander unabhängige Axen die Momente einzeln $=0$ sind. — Dasselbe ergiebt sich auch aus dem allgemeinen Ausdrucke für das Moment eines Systems im Raume (§. 65.):

$$F(L-gC+hB)+G(M-hA+fC)+H(N-fB+gA).$$

Denn schon dadurch, dass man denselben für 6 verschiedene Axen, also für 6 verschiedene Systeme zusammengehöriger Werthe von f, g, h, F, G, H, null setzt, gelangt man zu den 6 Bedingungen des Gleichgewichts: $A=0, \ldots N=0$.

Wenn ferner in Bezug auf 5 von einander unabhängige Axen die Momente eines nicht im Gleichgewichte

befindlichen Systems einzeln $=0$ sind, so sind es auch die Momente aller andern, von erstern fünf abhängigen Axen, nicht aber das Moment einer Axe, welche von ihnen unabhängig ist, indem sonst nach dem Vorhergehenden das System im Gleichgewichte wäre, gegen die Voraussetzung. Aus 5 von einander unabhängigen Axen, deren Momente $=0$ sind, lassen sich daher alle übrigen Axen, die ein Moment $=0$ haben, finden. — Eben so, wie alle durch einen Punkt gehenden Axen, deren Momente null sind, in einer Ebene liegen (§. 84.), müssen daher auch alle in einem Punkte zusammentreffenden Axen überhaupt, deren Momente aus den Momenten für 5 von einander unabhängige Axen gefunden werden können, in einer Ebene enthalten seyn, u. s. w. (Vergl. vor. §.)

§. 102.

Die Bedingungen unter denen sich für 4, 5 oder 6 Richtungen Kräfte finden lassen, die mit einander im Gleichgewichte sind, so wie die Verhältnisse zwischen den sich das Gleichgewicht haltenden Kräften selbst, können ausser den im Obigen angezeigten Verfahrungsweisen, noch auf eine andere Art hergeleitet werden, die sich unmittelbar auf den das Gleichgewicht im Raume betreffenden Hauptsatz (§. 58.) gründet und wegen der Einfachheit, mit welcher sie die gesuchten Resultate liefert, eine nähere Anzeige verdient. Es wird hinreichen, wenn ich diese Methode an dem Falle erläutere, wenn das System nur aus vier Kräften besteht.

Seyen daher P, Q, R, S vier Kräfte, zwischen denen Gleichgewicht herrschen soll. Stellt man diese Kräfte durch Linien dar, bezeichnet durch x irgend eine andere Linie von bestimmter Länge, und

drückt durch Px u. s. w. die Pyramiden aus, welche P und x u. s. w. zu gegenüberliegenden Kanten haben, so ist jenem Hauptsatze zufolge:

$$(1) \ldots Px+Qx+Rx+Sx=0,$$

welches auch die Lage und Länge von x seyn mag.

Man nehme nun in den Richtungen von P, Q, R, S Abschnitte a, b, c, d von beliebiger Länge, so ist (§. 91. 1) $Px=\frac{P}{a}.\ ax$, etc. wo ax die durch die Geraden a und x bestimmte Pyramide vorstellt, und es wird die vorige Gleichung, wenn man noch der Kürze willen

$$(2) \ldots \frac{P}{a}=p,\ \frac{Q}{b}=q,\ \frac{R}{c}=r,\ \frac{S}{d}=s$$

setzt: $(3) \ldots p.ax+q.\ bx+r.\ cx+s.\ dx=0.$

Man lasse jetzt die noch unbestimmte Gerade x nach und nach mit a, b, c, d identisch werden, so erhält man, weil die Pyramiden aa, bb null sind, und $ab=ba$, u. s. w. ist (§. 72. zu Ende.):

$$(4) \begin{cases} q.\ ab+r.\ ac+s.\ ad=0, \\ p.\ ab+r.\ bc+s.\ bd=0, \\ p.\ ac+q.\ bc+s.\ cd=0, \\ p.\ ad+q.\ bd+r.\ cd=0, \end{cases}$$

vier Gleichungen, welche die gesuchten Bedingungen des Gleichgewichts enthalten müssen.

Eliminirt man r und s das einemal aus den drei letzten dieser Gleichungen und das anderemal aus der ersten, dritten und vierten, so kommt:

$$(5) \ldots p.\ (ab.\ cd-ac.\ bd-ad.\ bc)=2q.\ bc.\ bd$$

$$(6) \ldots 2p.\ ac.\ ad=q\ (ab.\ cd-ac.\ bd-ad.\ bc)$$

und wenn hieraus noch das Verhältniss $p:q$ eliminirt wird:

$$(7) \ldots (ab.\ cd-ac.\ bd-ad.\ bc)^2=4\ ac.\ bd.\ ad.\ bc,$$

welches die Bedingungsgleichung für die gegenseitige Lage der vier Richtungen ist. Nach dem bereits in

§. 99. Gefundenen kann sie daher nichts andere die hyperboloidische Lage dieser Richtungen ausdr Auch lässt sich dies unter der Voraussetzung, d zwei Gerade t und t' giebt, deren jede jeder d Richtungen zugleich begegnet (ebendas.) folgen stalt leicht darthun.

Schneide die eine dieser Geraden t die Richt in denen die Abschnitte a, b, c, d liegen, resp. B, C, D (Fig. 31.), und die andere Gerade t' re A', B', C', D'. Man nehme ferner die noch unbe gelassenen Abschnitte a, b, c, d resp. $=AA'$, CC', DD'. Hiermit werden die Pyramiden $ab=$ $BB'=-ABA'B'$, $bc=-BCB'C'$, etc. Nach Zus. ist aber das Sechsfache der Pyramide A $=AB.A'B'.\,u\sin\varphi$, wo u den kürzesten Abstan beiden Geraden AB und $A'B'$, oder t und t', einander, und φ den Winkel von t' mit t bezei Die Pyramiden ab, bc,... werden daher propo den Produkten $AB.A'B'$, $BC.B'C'$,... Substituir diese Verhältnisswerthe in der Gleichung (7) und noch zur Abkürzung:

$$AB.CD=f,\ AC.BD=g,\ AD.BC=h,$$
$$A'B'.C'D'=f',\ A'C'.B'D'=g',\ A'D'.B'C'=$$

so wird die Gleichung:

$$(ff'-gg'-hh')^2=4gg'hh'.$$

Weil aber A, B, C, D in einer Geraden li so ist, wie man leicht findet:

$$(a)\begin{cases}f=g-h, & \text{und aus ähnlichem Grunde}\\ f'=g'-h'.\end{cases}$$

Hiermit reducirt sich die Gleichung auf: $(gh'-g'h)$ also:

$$(b)\ \dots\ g:h=g':h',\ \text{d. i.}$$

$$(c)\quad \frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{A'C'}{B'C'}:\frac{A'D'}{B'D'},$$

d. h. das Verhältniss zwischen den Verhältnissen, nach welchen die Linie AB das einemal in C und das anderemal in D geschnitten wird, ist dem eben so durch die Punkte A', B', C', D' bestimmten Verhältnisse gleich. Wie bekannt, ist dies aber das charakteristische Merkmal, bei welchem ausser t und t' auch jede dritte Gerade, welche dreien der vier Geraden AA', BB', CC', DD' begegnet, zugleich die vierte trifft*).

Mittelst der Abschnitte $AB, BC, \ldots A'B', \ldots$ lassen sich auch die Verhältnisse zwischen den Kräften sehr einfach darstellen. Setzt man nämlich noch

$$BC.BD=i,\quad B'C'.B'D'=i',$$

so geht die Gleichung (5) über in:

$$p\,(ff'-gg'-hh')=2qii',$$

und wenn man darin für f, f', h aus (a) und (b) ihre Werthe setzt:

$$-pgh'=qii',$$

folglich ... $p:q=-BC.B'D':AC.A'D'$,

$$\text{d. i. }\frac{P}{AA'}:\frac{Q}{BB'}=-\frac{BC}{AC}:\frac{A'D'}{B'D'}$$

$$=-\frac{BD}{AD}:\frac{A'C'}{B'C'}\text{ nach }(c)$$

woraus durch gehörige Vertauschung der Buchstaben sich die Verhältnisse zwischen je zwei der übrigen Kräfte ergeben.

Zugleich folgt hieraus, dass, wenn die Punkte A, B, C, D in der genannten Ordnung in der Geraden t auf einander folgen, und mithin auch A', B', C', D' die Folge der Punkte in der Geraden t' ist, und wenn

---

*) Vergl. Steiner Systemat. Entwickel. pag. 192.

P nach der Richtung AA' wirkt, Q die Richtung $-BB'$, d. i. $B'B$, hat. Auf eben die Weise zeigt sich, dass unter denselben Voraussetzungen CC' die Richtung von R und $D'D$ die Richtung von S ist.

§. 103.

Zusätze. *a*. Nicht je drei Kräfte können auf eine einzige Kraft reducirt werden, also auch nicht mit einer einzigen Kraft ins Gleichgewicht gebracht werden. Sind daher von den Richtungen der vier Kräfte P, Q, R, S, welche im Gleichgewichte seyn sollen, irgend drei, z. B. die von P, Q, R, willkührlich gegeben, so können nicht auch P, Q, R selbst nach Belieben genommen werden, und es muss folglich zwischen P, Q, R und den Grössen, welche die gegenseitige Lage der Richtungen dieser drei Kräfte bestimmen, eine Relation statt finden. Diese Relation ergiebt sich ebenfalls ganz leicht aus den vier Gleichungen (4). Denn multiplicirt man sie der Reihe nach mit p, q, r, s und zieht hierauf von der Summe der drei ersten die vierte ab, so kommt:

$$p.q.\ ab + p.r.\ ac + q.r.\ bc = 0,$$

und mit Zuziehung von (2):

$$P.Q\ \frac{ab}{a.b} + P.R\ \frac{ac}{a.c} + Q.R\ \frac{bc}{b.c} = 0,$$

welches die gesuchte Gleichung ist. Sie drückt aus, dass die Summe der drei Pyramiden, welche P und Q, P und R, Q und R zu gegenüberliegenden Seiten haben, null ist. Denn so wie $\frac{P}{a}.ab$ die Pyramide darstellt, deren gegenüberliegende Seiten die Linie P, welche in a fällt, und b sind, so drückt $\frac{P}{a}.\frac{Q}{b}.\ ab$ die Pyramide aus, die zu gegenüberliegenden Seiten zwei Linien hat, welche in a und b fallen, und deren Längen resp. P und Q sind, u. s. w.

b. Auf eine andere Weise, als vorhin geschah, lassen sich die Verhältnisse zwischen den vier Kräften folgendergestalt darstellen. Man multiplicire wiederum die Gleichungen (4) in ihrer Folge mit p, q, r, s und ziehe dann von der Summe je zweier die Summe der beiden andern ab; dies giebt:

$$p.q.\ ab = r.s.\ cd,$$
$$p.r.\ ac = q.s.\ bd,$$
$$p.s.\ ad = q.r.\ bc$$ *),

und wenn man je zwei dieser drei Gleichungen mit einander multiplicirt:

$$p^2.\ ac.\ ad = q^2.\ bc.\ bd,$$
$$p^2.\ ab.\ ad = r^2.\ bc.\ cd,$$
$$p^2.\ ab.\ ac = s^2.\ bd.\ cd,$$

folglich .... $p:q:r:s =$

$$\sqrt{bc.\ bd.\ cd} : -\sqrt{ac.\ ad.\ cd} : \sqrt{ab.\ ad.\ bd} : -\sqrt{ab.\ ac.\ bc},$$

wo nur noch $\frac{P}{a}, \frac{Q}{b}, \ldots$ für $p, q, \ldots$ zu setzen sind, und wo die Vorzeichen so gewählt sind, wie sie statt finden müssen, wenn a, b, c, d die Ordnung ist, in welcher diese Linien von einer sie alle zugleich schneidenden Geraden getroffen werden.

Substituirt man diese Verhältnisswerthe von $p, q, \ldots$ in einer der Gleichungen (4), so ergiebt sich:

$$\sqrt{ab.\ cd} - \sqrt{ac.\ bd} + \sqrt{ad.\ bc} = 0,$$

welches die Bedingungsgleichung für die hyperboloidische Lage der vier Geraden a, b, c, d ist, die, wenn

---

*) Nach dem vorhin Bemerkten sind diese drei Gleichungen identisch mit: $PQ = RS$, $PR = QS$, $PS = QR$, und stellen daher den schon in §. 72. *c* gefundenen, von Chasles entdeckten, Satz dar. Auch ist die Schlussfolge, durch welche wir gegenwärtig zu diesem Satze gelangt sind, von der dortigen nicht wesentlich verschieden.

sie rational gemacht wird, mit der bereits erhaltenen (7), wie gehörig, zusammenfällt.

c. Durch Substitution derselben Werthe von p, q, r, s in (3) erhält man nachstehenden geometrischen Satz:

Sind a, b, c, d vier Gerade von beliebigen Längen und so gelegen, dass jede andere Gerade, welche drei derselben schneidet, auch die vierte trifft, so findet zwischen den Pyramiden ax, bx, cx, dx, welche eine beliebige fünfte Gerade x zur gemeinschaftlichen Kante und a, b, c, d zu gegenüberliegenden Kanten haben, immer eine lineare Relation statt. Es ist nämlich:

$$\sqrt{bc.\,bd.\,cd.}\;ax - \sqrt{ac.\,ad.\,cd.}\;bx + \sqrt{ab.ad.bd.}\;cx - \sqrt{ab.\,ac.\,bc.}\;dx = 0.$$

d. Heissen K, L, M, N die Momente irgend eines Systems in Bezug auf vier Axen, welche resp. in die hyperboloidisch gelegenen Linien a, b, c, d fallen, so bekommt man die Relation zwischen diesen Momenten, wenn man in letzterer Gleichung für ax, bx, cx, dx resp. $a.K$, $b.L$, $c.M$, $d.N$ setzt.

Siebentes Kapitel.

Von den Mittelpunkten der Kräfte.

§. 104.

Bei allen bisherigen Untersuchungen über Systeme von Kräften, die auf einen frei beweglichen festen Körper wirken, zogen wir bloss die Intensitäten und die Richtungen der Kräfte in Betracht, liessen aber

ie Angriffspunkte, oder die Punkte der Richtungen, uf welche die Kräfte zunächst ihre Wirkung äusserten, nberücksichtigt, indem nach §. 14. *a.* eine Kraft ohne enderung ihrer Wirkung auf jeden Punkt ihrer Richng verlegt werden konnte. In den noch folgenden Kapiteln dieses ersten Theils der Statik werden aber ie Angriffspunkte der Kräfte stets mit in Rücksicht enommen werden. Wir werden uns nämlich vorstellen, ass die Lage des frei beweglichen festen Körpers, der, was dasselbe ist: die Lage des frei beweglichen ystems der in unveränderlichen Entfernungen von einnder stehenden Angriffspunkte, auf irgend eine Weise eändert werde, während die Kräfte mit unveränderer Intensität und nach Richtungen, die ihren anfänglichen parallel sind, auf die Angriffspunkte zu wirken ortfahren. Wir werden sodann untersuchen, ob und nwiefern durch diese Aenderung der Lage des Körpers lie Wirkung der Kräfte sich ändert.

Haben die Kräfte anfänglich eine einfache Resultante, und findet es sich, dass bei jeder beliebigen Aenderung der Lage des Körpers die auf die anfänglichen Angriffspunkte parallel mit ihren anfänglichen Richtungen fortwirkenden Kräfte sich immer auf eine einfache Kraft reduciren lassen, und dass die Richtung dieser Resultante fortwährend einem und demselben Punkte des Körpers, oder allgemeiner: einem Punkte, welcher gegen die Angriffspunkte eine unveränderliche Lage hat, begegnet, so soll dieser Punkt **der Mittelpunkt der Kräfte** heissen. Bringt man an ihm eine der Resultante gleiche aber entgegengesetzte Kraft an, so erfolgt Gleichgewicht, das auch bei beliebiger Veränderung der Lage des Körpers fortdauern wird. Eben so wird Gleichgewicht entstehen, wenn man den Mittel-

punkt unbeweglich macht, so dass der Körper nur noch um diesen Punkt gedreht werden kann, indem eine auf einen unbeweglichen Punkt eines Körpers gerichtete Kraft offenbar keine Bewegung erzeugen kann.

I. Von dem Mittelpunkte paralleler Kräfte.

§. 105.

Auf zwei Punkte A und B (Fig. 32.) eines Körpers wirken zwei parallele Kräfte P und Q, welche kein Paar ausmachen und daher eine mit ihrer Richtung gleichfalls parallele Resultante $X = P + Q$ haben. Man theile die Gerade AB in H nach dem Verhältnisse $AH : HB = Q : P$, wobei H zwischen oder ausserhalb A und B fällt, jenachdem P und Q einerlei oder verschiedene Zeichen, d. h. einerlei oder entgegengesetzte Richtung haben. Die Resultante X trifft alsdann den Punkt H des Körpers (§. 26. *a.*), welches auch der Winkel ist, den die Kräfte P und Q mit der Geraden AB bilden, wie folglich auch die Lage des Körpers geändert werden mag, wenn nur die Kräfte P und Q parallel mit einander die Punkte A und B des Körpers zu treffen fortfahren; H ist folglich der Mittelpunkt der parallelen Kräfte P und Q, und wir folgern daraus:

Zwei parallele Kräfte, die kein Paar bilden, haben einen Mittelpunkt. Er liegt mit den Angriffspunkten der beiden Kräfte in einer Geraden und seine Abstände von den Angriffspunkten verhalten sich umgekehrt wie die den letztern zugehörigen Kräfte.

Kommt zu den zwei Kräften P, Q eine dritte ihnen parallele Kraft R hinzu, deren Angriffspunkt C ist, und ist H, wie vorhin, der Mittelpunkt der beiden

erstern, so sind alle drei Kräfte gleichwirkend mit den zwei auf H und C gerichteten $X_{,}=P+Q_{,}$ und $R_{,}$ folglich gleichwirkend mit der einzigen auf I gerichteten Kraft $X+R_{,}=P+Q+R$, wenn HC in I nach dem Verhältnisse $HI:IC=R:P+Q$ getheilt wird. Der Punkt I der Ebene ABC, dessen Lage gegen A, B, C nur von der gegenseitigen Lage dieser Punkte und von den Verhältnissen zwischen den Intensitäten der Kräfte P, Q, R abhängt, ist daher der Mittelpunkt dieser Kräfte.

Hat man vier parallele Kräfte P, Q, R, S, welche auf die Punkte A, B, C, D eines Körpers wirken, so bestimme man wie vorhin den Mittelpunkt I der drei Kräfte P, Q, R, und schneide die Gerade ID, welche ihn mit dem Angriffspunkte D der vierten S verbindet, in K nach dem Verhältnisse $IK:KD=S:P+Q+R$. Eine durch K parallel mit $P, ..$ gelegte Kraft $=$ $P+Q+R+S$ ist dann immer die Resultante der vier Kräfte, K selbst folglich ihr Mittelpunkt.

Auf gleiche Weise kann man auch bei einem Systeme von fünf und mehrern Kräften zu Werke gehen und daher allgemein schliessen:

Bei einem Systeme paralleler Kräfte, die auf bestimmte Punkte eines festen Körpers wirken und eine einfache Resultante haben, giebt es einen Punkt, der gegen die Angriffspunkte eine bestimmte Lage hat, und welchen die Resultante immer trifft, wie auch die Lage des Körpers gegen die Kräfte geändert werden mag, — den Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

§. 106.

Zusätze und Folgerungen. *a.* Eben so, wie der Mittelpunkt zweier parallelen Kräfte mit ihren Angriffspunkten in gerader Linie liegt, so ist auch, wenn die Angriffspunkte dreier oder mehrerer parallelen Kräfte in einer Geraden sind, der Mittelpunkt der Kräfte immer in dieser Geraden enthalten. Gleicherweise ist von vier oder mehrern parallelen Kräften, deren Angriffspunkte in eine Ebene fallen, der Mittelpunkt in derselben Ebene befindlich.

b. Die Folge, in welcher man die Kräfte zur Bestimmung ihres Mittelpunktes nach und nach berücksichtigt, ist willkührlich. Denn könnte bei einer andern Folge ein anderer Mittelpunkt gefunden werden, so müsste bei jeder Lageänderung des Körpers die den Kräften stets parallele und den einen Mittelpunkt treffende Resultante immer auch dem andern begegnen, welches nicht möglich ist.

Statt daher bei drei parallelen Kräften P, Q, R, welche auf die Punkte A, B, C wirken, zuerst die Linie AB in H nach dem Verhältnisse $AH:HB=Q:P$ zu theilen, kann man auch damit anfangen, dass man den in BC liegenden Mittelpunkt F der Kräfte Q und R durch die Proportion $BF:FC=R:Q$ bestimmt. Der Punkt der Linie AF, welcher sie in dem Verhältnisse $R+Q:P$ theilt, muss dann ebenfalls der Mittelpunkt I aller drei Kräfte seyn. Die Linien AF und CH werden sich daher in I schneiden, und wenn man noch CA in G nach dem Verhältnisse $CG:GA=P:R$ theilt, so wird die Gerade GB gleichfalls durch I gehen.

Auf gleiche Art erhellet, dass, wenn man bei vier parallelen Kräften jede der sechs Kanten AB, BC,... der Pyramide $ABCD$, von welcher die Angriffspunkte

der Kräfte die Ecken sind, in dem umgekehrten Verhältnisse der auf die Enden der Kante wirkenden Kräfte resp. in H, F,... theilt, jede der sechs durch eine Kante und den in der gegenüberliegenden Kante befindlichen Theilpunkt gelegten Ebenen, wie CDH, ADF, etc. den Mittelpunkt K der vier Kräfte enthält, und dass sich daher alle sechs Ebenen in diesem Punkte schneiden.

e. Es verhalten sich $P:Q = HB:AH$
$=$ die Dreiecke $HBC:AHC = HBI:AHI$,
folglich $= HBC - HBI : AHC - AHI$,
d. i. $P:Q = IBC:ICA$,
und eben so $Q:R = ICA:IAB$, d. h.

Der Mittelpunkt dreier parallelen Kräfte liegt in der Ebene der Angriffspunkte so, dass jedes der drei Dreiecke, welche der Mittelpunkt mit zwei Angriffspunkten bildet, der auf den dritten Angriffspunkt wirkenden Kraft proportional ist.

Bei den vier parallelen Kräften P,..S verhalten sich

$P:Q:R =$ die Dreiecke $IBC:ICA:IAB$
$=$ die Pyramiden $IDBC:IDCA:IDAB$
$=$ - - - $IKBC:IKCA:IKAB$
folglich $= IDBC - IKBC$: etc.
d. i. $= KDBC:KDCA:KDAB$, und eben so
$Q:R:S = KACD:KADB:KABC$,
folglich $P:Q:R:S =$
$KBCD : -KCDA : KDAB : -KABC$,
(vergl. §. 63. 1.) d. h.

Bei einem Systeme von vier parallelen Kräften ist jede Kraft, abgesehen vom Zeichen, der Pyramide proportional, welche der Mittelpunkt des Sy-

stems mit den Angriffspunkten der drei übrigen Kräfte bildet.

Uebrigens ist die Resultante der vorigen drei Kräfte dem Dreiecke *ABC*, und die Resultante dieser vier Kräfte der Pyramide *ABCD*, aus den Angriffspunkten selbst gebildet, proportional.

d. Sind die Kräfte *P*, *Q*, *R*, *S* einander gleich und von einerlei, nicht entgegengesetzter, Richtung, so ist vermöge der Proportionen im vorigen §.: $BH = HA$, $CI = 2.IH$, $DK = 3.KI$, also auch $CH = 3.IH$ und $DI = 4.KI$, woraus wir die Folgerung ziehen:

Der Mittelpunkt zweier einander gleichen und parallelen Kräfte ist der Mittelpunkt der ihre Angriffspunkte verbindenden Linie. — Von drei einander gleichen und parallelen Kräften liegt der Mittelpunkt in dem Dreieck ihrer Angriffspunkte so, dass er von jeder Seite des Dreiecks, diese Seite als Basis genommen, um den dritten Theil der Höhe entfernt ist. — Bei vier sich gleichen und parallelen Kräften ist der Mittelpunkt von jeder Seitenfläche der Pyramide der Angriffspunkte, wenn man diese Fläche als Basis betrachtet, um den vierten Theil der Höhe der Pyramide entfernt.

Unter derselben Voraussetzung, dass $P = Q = R = S$ ist, geben die in *c*. erhaltenen Proportionen folgenden Satz:

Eben so, wie der Mittelpunkt zweier sich gleichen und parallelen Kräfte die Linie zwischen ihren Angriffspunkten halbirt, so wird durch den Mittelpunkt drei solcher Kräfte das Dreieck der Angriffspunkte in drei einander gleiche Dreiecke, und durch den Mittelpunkt vier solcher Kräfte die Pyramide der Angriffspunkte in vier gleiche Pyramiden getheilt.

e. Die in §. 105 gegebene Methode, um den Mittelpunkt eines Systems paralleler Kräfte zu finden, lässt sich auch so abändern, dass man zuerst das System in zwei oder mehrere Systeme zerlegt und von jedem dieser Systeme besonders die Resultante und den Mittelpunkt bestimmt. Die Kräfte des ganzen Systems sind alsdann, auch bei jeder beliebigen Ortsveränderung des Körpers, gleichwirkend mit diesen ebenfalls einander parallelen Resultanten, welche die gefundenen Mittelpunkte resp. zu Angriffspunkten haben; und man wird daher den Mittelpunkt des ganzen Systems erhalten, wenn man von den Resultanten der einzelnen Systeme und ihren Mittelpunkten, als Angriffspunkten, den Mittelpunkt sucht.

So kann z. B. von vier einander gleichen und parallelen, auf $A, .. D$ wirkenden Kräften $P, .. S$ (Fig. 32.) der Mittelpunkt K auch so gefunden werden, dass man zuerst die Linien AB und CD in H und L halbirt, worauf K der Mittelpunkt der Linie HL seyn wird. Denn H und L sind die den Resultanten von P, Q und R, S zugehörigen Mittelpunkte, mithin u. s. w. Es folgt hieraus noch, dass die drei Geraden, welche die Mittelpunkte je zweier gegenüberstehender Kanten einer dreiseitigen Pyramide verbinden, sich in einem Punkte schneiden und daselbst einander halbiren.

§. 107.

Bei den im Vorhergehenden betrachteten Systemen paralleler Kräfte ist immer vorausgesetzt worden, dass die Kräfte eine Resultante haben, und folglich ihre Summe nicht $=0$ ist. Sey jetzt die Summe der Kräfte $=0$. Man zerlege das System in zwei Gruppen, bei deren keiner die Summe der zugehörigen Kräfte $=0$,

und was, wenn das System aus mehr als zwei Kräften besteht, immer auf mehrfache Art möglich ist. Die Summe der Kräfte der einen Gruppe sey $=X$, also die der andern $=-X$; von der erstern Gruppe sey M, von der letztern N der Mittelpunkt. Alsdann ist für jede Lage des Körpers das System der Kräfte gleichwirkend mit einem Paare, dessen Kräfte X und $-X$ die Angriffspunkte M und N haben. Das Moment dieses Paares ist dem Product aus X in den Abstand des einen der beiden Punkte M und N von einer durch den andern mit den Kräften gelegten Parallele gleich, also von einer Lage des Körpers zur andern veränderlich. Bei einer solchen Lage, wo die Gerade, welche M mit N verbindet, parallel mit den Kräften wird, — und solcher Lagen giebt es zwei, einander gerade entgegengesetzte, — ist das Moment des Paares $=0$, und es herrscht Gleichgewicht; und wie man dann auch das System in zwei Gruppen zertheilt, wird immer der Mittelpunkt der einen mit dem der andern, also auch der Angriffspunkt jeder einzelnen Kraft mit dem Mittelpunkte der jedesmal übrigen, in einer mit den Kräften parallen Geraden liegen.

Finden sich die beiden Mittelpunkte M und N identisch, so sind bei jeder Lage des Körpers die Kräfte im Gleichgewicht. Es muss folglich auch bei jeder andern Zerlegung eines solchen Systems in zwei Gruppen der Mittelpunkt der einen Gruppe mit dem der andern zusammenfallen, so wie der Angriffspunkt jeder einzelnen Kraft der Mittelpunkt der jedesmal übrigen seyn. Um ein System dieser Art zu erhalten, darf man nur zu einem Systeme paralleler Kräfte, welches einen Mittelpunkt hat, eine neue der Resultante des Systems gleiche, aber entgegengesetzte Kraft hinzufügen.

§. 108.

Alle die bisher auf synthetischem Wege erhaltenen Resultate lassen sich auch sehr leicht analytisch herleiten. Seyen von den Kräften P, P', ..., auf ein System dreier Coordinatenaxen bezogen, die Angriffspunkte resp. (x, y, z), (x', y', z'), etc.; (x_1, y_1, z_1) irgend ein Punkt der Resultante, und a, b, c die Projectionen einer mit den Kräften parallel laufenden Linie auf die drei Axen. Alsdann sind, wenn man noch

$$(1) \ldots \frac{\Sigma x P}{\Sigma P} = \xi, \frac{\Sigma y P}{\Sigma P} = \eta, \frac{\Sigma z P}{\Sigma P} = \zeta \text{ setzt:}$$

$$(2) \ldots \frac{\xi - x_1}{a} = \frac{\eta - y_1}{b} = \frac{\zeta - z_1}{c}$$

die Gleichungen der Resultante (§. 73.)

Die Resultante trifft daher den Punkt, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind; und da vermöge (1) diese Coordinaten bloss von den Intensitäten der Kräfte und den Coordinaten der Angriffspunkte, nicht aber von a, b, c, abhängen, so geht bei unveränderlich bleibenden Intensitäten und Angriffspunkten die Resultante immer durch denselben Punkt, wie auch die gegenseitige Lage des Systems der Angriffspunkte und der Richtungen der parallelen Kräfte sich ändern mag. (ξ, η, ζ) ist folglich der Mittelpunkt der Kräfte.

§. 109.

Folgerungen. *a.* Aus den Formeln (1) fliesst noch eine sehr einfache Methode zur Bestimmung des Mittelpunkts. Es wird nämlich nach ihnen der Abstand des Mittelpunkts von einer beliebig gelegten Ebene gefunden, wenn man die Kräfte in die Abstände ihrer resp. Angriffspunkte von dieser Ebene multiplicirt und

die Summe dieser Producte durch die Summe der Kräfte dividirt. Hat man auf diese Weise die Abstände des Mittelpunkts von drei sich in einem Punkte schneidenden Ebenen bestimmt, so ist damit der Mittelpunkt selbst gefunden.

b. Die Summe der Producte aus den Kräften in die Abstände ihrer Angriffspunkte von irgend einer durch den Mittelpunkt selbst gelegten Ebene ist daher immer $=0$.

c. Sind die Kräfte insgesammt einander gleich und nach einerlei Seite gerichtet, so ist der Abstand ihres Mittelpunkts von einer beliebigen Ebene gleich der Summe der Abstände ihrer Angriffspunkte von derselben Ebene, dividirt durch die Anzahl der Kräfte, also gleich dem arithmetischen Mittel letzterer Abstände.

d. Liegen die Angriffspunkte sämmtlicher Kräfte $P, P', \ldots$ in einer Ebene und nimmt man dieselbe zur Ebene der x, y, so sind $z, z', \ldots = 0$, folglich auch $\Sigma z P$ und $\zeta = 0$, also der Mittelpunkt in derselben Ebene enthalten. Befinden sich aber die Angriffspunkte insgesammt in einer Geraden, in der Axe der x zum Beispiel, so werden auf gleiche Weise η und $\zeta = 0$, und der Mittelpunkt ist ebenfalls in dieser Geraden begriffen.

e. Bringt man im Mittelpunkte (ξ, η, ζ) eines Systems paralleler Kräfte $P, P', \ldots$ eine neue ihrer Resultante gleiche, aber entgegengesetzte Kraft $= -\Sigma P$ an, so erhält man ein System, das bei jeder Lage des Körpers im Gleichgewichte bleibt. Da man nun vermöge der Gleichungen (1), $\Sigma x P + \xi(-\Sigma P) = 0$, u. s. w. hat, so ist bei einem solchen Systeme die obige Summe der Producte für jede beliebige Ebene $=0$.

Vom Schwerpunkte.

§. 110.

Die Lehre vom Mittelpunkte paralleler Kräfte ge-
innt dadurch noch ein besonderes Interesse, dass auf
lle Theilchen der auf der Oberfläche unserer Erde
efindlichen Körper fortwährend Kräfte wirken, deren
ichtungen vertical, d. i. rechtwinklich auf der Ober-
äche der Erde sind, und die daher bei einem und
emselben Körper, so wie bei mehreren Körpern, deren
imensionen und gegenseitige Entfernungen gegen den
urchmesser der Erde unbedeutend sind, als einander
arallel angesehen werden können. Der Mittelpunkt
ller dieser auf einen Körper wirkenden Kräfte heisst
er Schwerpunkt, und ihre Resultante das Gewicht
es Körpers. Indem man sich diese Kräfte als Theile
iner einzigen sich über alle Theile der Körper ver-
reitenden Kraft denkt, nennt man letztere die Schwer-
raft.

Die Einwirkung der Schwerkraft auf einen Körper,
der das Gewicht desselben, bleibt an einem und dem-
elben Orte für alle Zeiten unverändert und ändert sich
uch von einem Orte an oder nahe bei der Oberfläche
der Erde zum andern nur wenig, indem es von einem
Punkte des Aequators bis zu dem einen und andern
Pole nur um $\frac{1}{194}$ zunimmt, und bei verticaler Erhebung
des Körpers im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats
seiner Entfernung vom Mittelpunkte der Erde abnimmt.
Ueberhaupt bleibt das Verhältniss zwischen den Ge-
wichten zweier Körper, die sich an einem und demsel-
ben Orte der Erde befinden, das nämliche, wenn sie
beide an einen und denselben andern Ort gebracht

werden. Dieses von dem Orte, wo sich die Körper zugleich befinden, unabhängige Verhältniss ihrer Gewichte ist einerlei mit dem, welches man das Verhältniss ihrer Massen nennt, und man kann daher auch sagen: die auf jeden Theil eines Körpers wirkende Schwerkraft sey der Masse des Theils proportional.

Wenn je zwei Theile eines Körpers, die dem Inhalte nach einander gleich sind, auch gleiche Massen haben, so wird der Körper gleichförmig dicht genannt. Von zwei gleichförmig dichten Körpern heisst die Dichtigkeit des einen das $m$fache der Dichtigkeit des andern, wenn von zwei dem Inhalte nach gleichen Theilen des einen und andern Körpers die Masse des einen das $m$fache der Masse des andern ist. Bei gleichem Inhalte ist daher die Masse der Dichtigkeit proportional, und bei ungleichem Inhalte dem Product aus der Dichtigkeit in den Inhalt proportional, oder auch diesem Producte geradezu gleich, wenn man von einem gleichförmig dichten Körper, dessen Inhalt $=1$ und dessen Masse $=1$ gesetzt worden, auch die Dichtigkeit $=1$ setzt.

§. 111.

Zur Bestimmung des Schwerpunktes eines Körpers dienen die Formeln (1) in §. 108. Man denke sich den Körper in mehrere andere zerlegt, deren Massen $=m, m', m'', \ldots$ seyen. Resp. auf die Punkte (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z''), ... dieser Massen lasse man nach einerlei Richtung parallele den Massen proportionale Kräfte wirken, und sey (ξ, η, ζ) der Mittelpunkt dieser Kräfte, so hat man nach jenen Formeln:

$$(a) \quad \xi = \frac{mx + m'x' + m''x'' + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots}$$

und ähnliche Gleichungen für η und ζ. Diese Gleichungen geben für ξ, η, ζ nach und nach andere Werthe, wenn man für (x, y, z), (x', y', z'), ... andere und andere Punkte der Massen m, m', ... wählt. Es hört aber diese Veränderlichkeit der Werthe von ξ, η, ζ auf, wenn man den Körper in unendlich viele Theile zerlegt, deren jeder nach allen Dimensionen unendlich klein ist. Denn je kleiner man die Dimensionen der Theile seyn lässt, desto geringer wird der Unterschied zwischen den äussersten Werthen, die jede der Coordinaten x, y, z, x', ... haben kann; desto kleiner werden mithin die Aenderungen, welche die Producte mx, $m'x'$, ... erleiden können, gegen die Producte selbst; desto mehr nähern sich folglich ξ, η, ζ gewissen Grenzwerthen, die sie aber erst dann erreichen, wenn die Theilchen unendlich klein geworden sind. Und diese Grenzwerthe sind die Coordinaten des Schwerpunktes.

Bezeichnen daher dm die Masse eines nach allen Dimensionen unendlich kleinen Elementes des Körpers und x, y, z die Coordinaten dieses Elementes, so sind die des Schwerpunktes:

$$(A) \ldots \xi = \frac{\int x\, dm}{\int dm}, \eta = \frac{\int y dm}{\int dm}, \zeta = \frac{\int z dm}{\int dm}.$$

Es ist aber bei einem rechtwinkligen Coordinatensysteme, wenn man sich den Körper durch Ebenen, die mit den Coordinatenebenen parallel sind, in unendlich kleine rechtwinklige Parallelepipeda zerlegt denkt, der Inhalt desjenigen, welches den Coordinaten x, y, z entspricht, $= dx\, dy\, dz$, und daher, wenn ϱ die Dichtigkeit des Körpers im Punkte (x, y, z) ausdrückt:

$$dm = \varrho\, dx\, dy\, dz.$$

Diesen Werth von dm hat man nun in (A) zu substituiren und hierauf die angedeuteten Integrationen

innerhalb der den Körper einschliessenden Flächen, deren Gleichungen gegeben seyn müssen, auszuführen. Die Dichtigkeit ρ wird dabei, als eine Function von x, y, z, gegeben vorausgesetzt. Ist der Körper gleichförmig dicht, also ρ constant, so geht ρ aus den Formeln (A) heraus; der Schwerpunkt ist dann folglich bloss von der Gestalt des Körpers abhängig.

Aehnlicher Weise kann man auch den Schwerpunkt einer blossen Fläche, ja selbst einer Linie zu bestimmen suchen, indem man sich jedes Element der Fläche oder der Linie, als von einer der Wirkung der Schwerkraft unterworfenen Masse gebildet, denkt, einer Masse, die der Grösse des Elements und der daselbst herrschenden Dichtigkeit proportional ist. Die allgemeinen Ausdrücke für die Coordinaten des Schwerpunkts einer Fläche oder Linie wird man daher erhalten, wenn man in den obigen Ausdrücken das einemal

$$dm = \rho \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \cdot dx\, dy$$

und das anderemal

$$dm = \rho \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

setzt. Die Anwendung dieser allgemeinen Formeln auf bestimmte Fälle übergehe ich, da solche Anwendungen in den bisherigen Lehrbüchern der Statik zur Genüge angetroffen werden.

Zusatz. Sind die Massen m, m', ..., in die man sich einen Körper zerlegt denkt, nicht unendlich klein, sondern von endlicher Grösse, so ergeben sich mittelst der Formeln (a) nichtsdestoweniger die Coordinaten des Schwerpunktes des Körpers, wenn nur für (x, y, z), (x', y', z'), ... die Schwerpunkte der einzelnen Massen genommen werden. Denn da die auf einen Körper

kende Schwerkraft bei jeder Verrückung desselben
ichwirkend mit einer verticalen, an seinem Schwer-
nkte angebrachten und seiner Masse proportionalen
raft bleibt, und dasselbe auch rücksichtlich der Masse
d des Schwerpunktes jedes Theiles des Körpers gilt,
müssen verticale Kräfte, die an den Schwerpunkten
r einzelnen Theile eines Körpers angebracht und
n Massen der Theile proportional sind, stets gleiche
irkung mit einer der Masse des ganzen Körpers
oportionalen und auf seinen Schwerpunkt vertical ge-
htteten Kraft haben.

Zufolge der Formeln (*a*) ist daher

die Summe der Producte aus den Massen der inzelnen Theile eines Körpers in die Abstände ihrer chwerpunkte von einer beliebigen Ebene gleich dem roduct aus der Masse des ganzen Körpers in den bstand seines Schwerpunkts von derselben Ebene.

§. 112.

Unter Voraussetzung gleichförmiger Dichtigkeit
sst sich der Schwerpunkt einer geraden Linie, einer
n geraden Linien begrenzten Ebene und eines von
benen begrenzten Körpers auch ohne Gebrauch der
nfinitesimalrechnung oder der sonst ihre Stelle vertre-
nden Exhaustionsmethode finden, wenn man nur den
tz zu Ende des vor. §. und den schon von Archime-
des aufgestellten Grundsatz zu Hülfe nimmt, *dass ähn-
liche Figuren ähnlich liegende Schwerpunkte haben**).

Seyen AB und $A'B'$ zwei einander parallele Ge-
rade und a, b, a', b' die Abstände der Punkte A, B,

*) Archimedes vom Gleichgewichte ebener Flächen, 6te For-
derung.

A', B' von einer beliebig gelegten Ebene; alsdann verhält sich:

$$a-b:a'-b'=AB:A'B'.$$

Hat man daher zwei einander ähnliche und parallel liegende Figuren, d. h. welche so liegen, dass, wenn A, B irgend zwei Punkte der einen und A', B' die ihnen entsprechenden Punkte der andern Figur sind, die Linien AB und $A'B'$ parallel laufen; werden ferner, wie eben jetzt, so auch in der Folge die Abstände der Punkte von einer beliebigen Ebene mit den gleichnamigen Buchstaben aus dem kleinen Alphabete bezeichnet, und drückt $m:m'$ das constante Verhältniss aus, in welchem jede Linie der einen Figur zu der entsprechenden Linie der andern steht: so verhält sich:

$$a-b:a'-b'=m:m'.$$

Ist dabei A oder B der Schwerpunkt der einen Figur, so ist nach Archimedes Grundsatz A' oder B' der Schwerpunkt der andern.

Um nun, dieses vorausgeschickt,

1) den Schwerpunkt einer geraden Linie AB (Fig. 33.) zu finden, verlängere man dieselbe nach E, bis $BE=AB$. Seyen von AB, BE, AE die Schwerpunkte P, Q, R, so ist nach dem Satze des vor. §, da wegen der angenommenen gleichförmigen Dichtigkeit die Massen der Linien ihren Längen proportional sind:

$$p+q=2r,$$

und weil zufolge des archimedischen Grundsatzes P, Q, R ähnlich liegende Punkte in den nach einerlei Richtung liegenden Geraden AB, BE, AE sind:

$$p-a:q-b:r-a=1:1:2,$$

folglich $p-a=q-b=\frac{1}{2}(r-a)$.

Werden hiermit q und r aus der vorigen Gleichung eliminirt, so kommt:

$$p = \frac{1}{2}(a+b).$$

Der Schwerpunkt einer geraden Linie ist also derselbe, den ihre zwei Endpunkte, als zwei einander gleiche Massen betrachtet, haben (§. 109. *c.*), *und ist folglich der Mittelpunkt der Linie* (§. 106. *d.*).

2) Den Schwerpunkt der Fläche eines Parallelogramms $ABCD$ zu finden. — Man verlängere AB nach E und AD nach I, bis $BE = AB$ und $DI = AD$, construire das Parallelogramm $AEGI$, und verlängere auch BC bis zum Durchschnitte F mit EG, und BC bis zum Durchschnitte H mit IG. Von dem gegebenen Parallelogramme AC, den drei durch diese Construction entstandenen, ihm gleichen und ähnlichen Parallelogrammen BF, CG, DH, und von dem aus allen vier zusammengesetzten Parallelogramme AG seyen die Schwerpunkte der Reihe nach P, Q, R, S, T, so hat man, weil bei der hier immer vorausgesetzten gleichförmigen Dichtigkeit die Masse jeder dieser Flächen ihrem Inhalte proportional ist:

$$p + q + r + s = 4t;$$

und weil sämmtliche fünf Parallelogramme einander ähnliche und parallel liegende Figuren sind, und die Punkte A, B, C, D, A ebenso, wie P, Q, R, S, T, in ihnen auf ähnliche Weise liegen:

$$p - a = q - b = r - c = s - d = \frac{1}{2}(t - a).$$

Drückt man hiermit in voriger Gleichung die Werthe von q, r, s, t durch p, a, b, c, d aus, so kommt:

$$p = \frac{1}{4}(a + b + c + d).$$

Der Schwerpunkt eines Parallelogramms wird mithin eben so gefunden, wie der Schwerpunkt von vier an den vier Ecken der Figur angebrachten einander gleichen Massen und ist daher der gemeinschaftliche Mittelpunkt der beiden Diagonalen,

also auch einerlei mit dem Schwerpunkte zweier den zwei Endpunkten einer Diagonale befindlichen g chen Massen, d. i.

$$p = \frac{1}{2}(a + c) = \frac{1}{2}(b + d).$$

3) Den Schwerpunkt eines Parallelepipedums finden. — Indem man die drei in einer Ecke des K pers zusammenstossenden Kanten verlängert, bis Verlängerungen den Kanten selbst gleich werden, u auf ganz ähnliche Art, wie vorhin, weiter verfährt, giebt sich, dass *der Schwerpunkt eines Parallelepipedums der gemeinschaftliche Mittelpunkt der d Diagonalen, also einerlei mit dem Schwerpun aller acht Ecken ist, wenn diese als gleichschw Punkte betrachtet werden.*

4) Den Schwerpunkt einer Dreiecksfläche *A* (Fig. 34.) zu finden. — Man halbire die Seiten *B CA*, *AB* resp. in *D*, *E*, *F* und ziehe *DE*, *EF*. H mit hat man die drei einander ähnlichen und para liegenden Dreiecke *AFE*, *EDC*, *ABC*, deren Lin dimensionen sich wie 1 : 1 : 2 verhalten, und in nen resp. *A*, *E*, *A* ähnliche liegende Punkte si Nennt man daher *Q*, *R*, *S* die Schwerpunkte die Dreiecke und *P* den Schwerpunkt des Parallelogram *BE*, so verhält sich nach Archimedes Grundsatz

$$q - a : r - e : s - a = 1 : 1 : 2$$

also $q - a = r - e = \frac{1}{2}(s - a)$,

folglich . . . . . $q + r = s + e$;

auch ist nach 2) . . . . . $p = \frac{1}{2}(b + e)$.

Nach vor. §. aber ist, weil sich die Figuren *B AFE*, *EDC* und das aus ihnen zusammengeset Dreieck *ABC* ihrem Inhalte nach wie 2 : 1 : 1 : 4 v halten:

$$2p + q + r = 4s.$$

Eliminirt man hieraus p, q, r, so kommt:

$$b+2e=3s$$

und, weil E der Mittelpunkt von CA, und daher $2e=c+a$ ist:

$$s=\tfrac{1}{3}(a+b+c).$$

Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche ist daher einerlei mit dem Schwerpunkte der drei Ecken des Dreiecks, diese als gleichschwere Punkte betrachtet, also einerlei mit dem Punkte, von welchem aus das Dreieck sich in drei einander gleiche Theile theilen lässt.

5) Den Schwerpunkt eines dreiseitigen Prisma $ABCA''B''C''$ zu finden. — Man halbire die parallelen Seitenkanten AA'', BB'', CC'' in A', B', C' und die Seiten der drei einander gleichen und ähnlichen und parallel liegenden Dreiecke ABC; $A'B'C'$; $A''B''C''$ in D, E, F; D', E', F'; D'', E'', F''. Hiermit kann man das Prisma, dessen Inhalt man $=8$ setze, und dessen Schwerpunkt S heisse, zerlegen: in ein Parallelepipedum BE'', dessen Inhalt $=4$ ist, und dessen Schwerpunkt P sey, und in vier dem gegebenen Prisma ähnliche und mit ihm parallel liegende Prismen $AFEA'F'E'$, $EDCE'$.., $A'F'E'A''$.., $E'D'C'E''$.., die insgesammt einerlei Inhalt $=1$ haben, und deren Schwerpunkte resp. Q, R, Q', R' seyen. In diesen vier Prismen sind resp. A, E, A', E' mit dem Punkte A des gegebenen Prisma ähnlich liegende Punkte, und man hat daher dem Grundsatze zufolge:

$$q-a=r-e=q'-a'=r'-e'=\tfrac{1}{2}(s-a),$$

mithin $q+r+q'+r'=2s-a+e+a'+e'$

$$=2s+2e',$$

weil die Linien AE' und EA' sich in ihren Mittelpunkten schneiden, und daher $a+e'=a'+e$ ist.

Da ferner der Schwerpunkt P des Parallelepipedum BE'' der Mittelpunkt der Linie BE'', folglich auch de Linie $B'E'$ ist, so hat man:

$$p = \frac{1}{2}(b' + e').$$

Sodann ist nach vor. §.:

$$4p + q + q' + r + r' = 8s.$$

Hieraus folgt nach Elimination von p, q, q', r, (mittelst der vorigen Gleichungen:

$$4e' + 2b' = 6s, \text{ und weil } 2e' = c' + a',$$

$$s = \frac{1}{3}(a' + b' + c'), \text{ oder weil } 2a' = a + a'', \text{ etc.}$$

$$s = \frac{1}{6}(a + b + c + a'' + b'' + c'').$$

Der Schwerpunkt eines dreiseitigen Prisma fäl daher zusammen mit dem Schwerpunkte seiner sech Ecken, also auch mit dem Mittelpunkte der Lini welche die Schwerpunkte der zwei parallelen Fläch des Prisma verbindet.

6) Den Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyrami $ABCD$ (Fig. 35.) zu finden. — Man halbire die sech Kanten AD, BD, CD, BC, CA, AB in E, F, G H, I, K und lege die drei Ebenen EFG, EIK, EGH Hierdurch wird die Pyramide $ABCD$ in zwei ihr äh liche und mit ihr parallel liegende Pyramiden $AKIE$ $EFGD$ und in zwei dreieckige Prismen $BKHFEG$ $HGCKEI$ zerlegt, welche vier Körper dem Inhalt nach sich zu einander und zu der gegebenen Pyramid wie 1 : 1 : 3 : 3 : 8 verhalten. Sind daher P, Q, R, S, T die Schwerpunkte aller dieser fünf Körper, so habe wir zuerst

$$p + q + 3r + 3s = 8t;$$

sodann, weil A, E, A resp. in den Pyramiden $AKIE$ $EFGD$, $ABCD$ ähnlich liegende Punkte sind:

$$p - a = q - e = \frac{1}{2}(t - a),$$

folglich $p + q = t + e$,

und endlich nach dem Vorigen:

$$r = \frac{1}{8}(b+f+e+h+g+k),$$
$$s = \frac{1}{8}(c+i+e+h+g+k).$$

Es ist aber $b+d=2f$, $a+c=2i$ u. s. w. folglich

$$a+b+c+d=2f+2i=2e+2h=2g+2k,$$

und daher, wenn wir jede dieser vier einander gleichen Summen $=4u$ setzen:

$$r+s=\frac{1}{8}(b+c+10u)=\frac{1}{8}(2h+10u).$$

Mit diesen Werthen für $p+q$ und $r+s$ wird nun die zuerst stehende Gleichung:

$$8t=t+e+h+5u=t+7u,$$

folglich ... $t=u=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$.

*Der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide ist daher einerlei mit dem Schwerpunkte ihrer vier Ecken, also mit dem Punkte, von welchem aus sie in vier gleiche Theile getheilt werden kann.**)

§. 113.

Nachdem wir somit den Schwerpunkt eines Dreiecks und einer dreiseitigen Pyramide zu finden gelernt haben, ist es nun leicht, von jeder andern mit geraden Linien begrenzten Ebene und jedem andern mit Ebenen begrenzten Körper den Schwerpunkt zu bestimmen, da sich alle diese Figuren durch Diagonallinien und Diagonalflächen in Dreiecke und Pyramiden zerlegen lassen.

Werde z. B. der Schwerpunkt des ebenen Vierecks *ABCD* (Fig. 36.) gesucht. — Man theile das Viereck durch die Diagonale *AC* in die zwei Dreiecke *ABC*, *CDA* und bestimme nach dem Vorigen ihre Schwer-

*) Auf ähnliche Art, wie hier, hat bereits Poinsot in seinen *Élémens de Statique 4 ème édit.* pag. 180 und pag. 186. den Schwerpunkt des Dreiecks, des Prisma und der Pyramide zu finden gelehrt.

punkte, welche P, Q seyen. Der Schwerpunkt des Vierecks ist alsdann der Mittelpunkt zweier parallelen auf P, Q wirkenden und den Dreiecksflächen ABC, CDA proportionalen Kräfte. Theilt man daher die Gerade PQ in R so, dass $PR:RQ = CDA:ABC$, so wird R der gesuchte Schwerpunkt seyn (§. 105.).

Hiernach kann man auch, wenn die Abstände der Ecken des Vierecks von irgend einer Ebene gegeben sind, den Abstand des Schwerpunkts von der Ebene finden. Es ist nämlich, wenn wir diese Abstände, wie im vorigen §., mit den Buchstaben des kleinen Alphabets bezeichnen, welche den grossen Buchstaben entsprechen, womit die Punkte benannt sind:

$$(1) \quad 3p = a + b + c, \; 3q = a + c + d$$
$$\text{und} \quad ABCD.r = ABC.p + CDA.q,$$

oder, wenn man die vier Dreiecke EAB, EBC, ECD, EDA, in welche das Viereck durch seine Diagonalen getheilt wird, resp. $= f, g, h, i$ setzt und erwägt, dass sich $ABCD : ABC : CDA = DAB : EAB : EDA = i + f : f : i$ verhalten:

$$(i + f)\, r = fp + iq$$

und wenn man hierin für p und q ihre Werthe aus (1) setzt:

$$(2) \ldots (i + f)(3r - a - c) = fb + id.$$

Gleicherweise findet sich:

$$(3) \ldots (f + g)(3r - b - d) = gc + fa.$$

Durch Verbindung dieser zwei Gleichungen kann man den Abstand r auch durch drei der vier Abstände a, b, c, d allein ausdrücken und damit zu noch andern nicht uninteressanten Folgerungen gelangen. Um z. B. a zu eliminiren, schreibe man zuerst statt der Gleichung (3), weil sich $f:g = i:h = f + i : g + h$ verhält:

$$(f + g + h + i)(3r - b - d) = (g + h)\, c + (i + f)\, a.$$

Hiervon die Gleichung (2) abgezogen, kommt:

$$3(g+h)r = (g+h+i)b + (g+h-i-f)c$$
$$+(f+g+h)d,$$

d. h. R ist der Mittelpunkt dreier parallelen Kräfte, welche B, C, D zu Angriffspunkten haben und den Coefficienten von b, c, d in dieser Gleichung proportional sind. Nach §. 106. *c.* verhalten sich folglich die Dreiecke

$$RBC : RCD = f+g+h : g+h+i.$$

Setzen wir daher noch die Dreiecke RAB, RBC, RCD, RDA, welche der Schwerpunkt des Vierecks mit den Seiten des letztern bildet, resp. $= F, G, H, I$, und die Vierecksfläche $= V$, so verhalten sich

$$G : H = V-i : V-f$$

und eben so $H : I : F = V-f : V-g : V-h$, folglich $F : F+..+I = V-h : 4V-(f+..+)$. Es ist aber $F+G+H+I = f+g+h+i = V$; mithin

$F = \frac{1}{3}(V-h)$, und auf gleiche Art

$$G = \tfrac{1}{3}(V-i),\ H = \tfrac{1}{3}(V-f),\ I = \tfrac{1}{3}(V-g),$$

oder $F = \frac{1}{3}(i+f+g)$, $G = \frac{1}{3}(f+g+h)$, tc.

woraus noch $F+G-f-g = \frac{1}{3}(h+i-f-g)$

d. i. $RCA = \frac{1}{3}(ABC - CDA)$ folgt.

Der Schwerpunkt einer Vierecksfläche liegt demnach so, dass immer das Dreieck, welches er mit einer Seite des Vierecks bildet, dem dritten Theil der Summe der drei Dreiecke gleich ist, welche der Durchschnitt der Diagonalen mit derselben Seite und den zwei angrenzenden Seiten macht; oder (weil $3F+h = V$ ist,) *dass das Dreieck des Schwerpunkts mit einer Seite, dreimal genommen, und dazu das Dreieck des Diagonalendurchschnitts mit der gegenüberliegenden Seite addirt, die Fläche des ganzen Vierecks ausmacht. Auch ist das Dreieck des*

Schwerpunkts mit der einen Diagonale gleich dem dritten Theile des Unterschieds zwischen den zwei Dreiecken, in welche das Viereck durch die Diagonale getheilt wird.

Noch eine merkwürdige Relation besteht zwischen den vier Dreiecken F, G, H, I selbst, welche der Schwerpunkt mit den vier Seiten des Vierecks bildet. Man erhält diese Relation, wenn man in der Proportion $f:g=i:h$ für $f, g, \ldots$ ihre Werthe $V-3H$, $V-3I, \ldots$ setzt. Hiermit kommt:

$$V(F+H-G-I)=3(FH-GI).$$

Wegen $V=F+\ldots+I$ reducirt sich dieses auf:

$$F^2-FH+H^2=G^2-GI+I^2,$$

eine Gleichung, welcher man auch die Form geben kann:

$$(F+G+H+I)(F-G+H-I)$$
$$+3(F+G-H-I)(F-G-H+I)=0.$$

Zusatz. Die in voriger Rechnung gefundene Gleichung: $RCA=\frac{1}{3}(ABC-CDA)$, kann sehr einfach auch folgendergestalt hergeleitet werden. — Es verhält sich

$$PR:RQ=DAC:BCA,$$

und weil $DAC=3QAC$ und $BCA=3PCA$ ist (§. 112. 4.):

$$PR:RQ=QAC:PCA$$
$$=MQ:PM,$$

wenn PQ von der Diagonale AC in M geschnitten wird. Aus letzterer Proportion folgt aber unmittelbar:

$$PR=MQ, \text{ mithin } RM=PM-MQ$$

und $RCA=PCA-QAC=\frac{1}{3}(BCA-DAC)$,

wie zu erweisen war.

Zugleich sieht man aus der Gleichung $PR=MQ$, wie man aus den Schwerpunkten P und Q der beiden

Dreiecke ABC und CDA den Schwerpunkt R des Vierecks auf das einfachste bestimmen kann.

II. Von dem Mittelpunkte nicht paralleler in einer Ebene wirkender Kräfte.

§. 114.

Streng genommen, hat nur ein System paralleler Kräfte einen Mittelpunkt. Indessen lässt sich auch bei einem Systeme nicht paralleler, in einer Ebene wirkender Kräfte ein Mittelpunkt angeben, wenn nur die Aenderung der Lage des Körpers der Bedingung unterworfen wird, dass die Ebene der Kräfte sich parallel bleibt, und daher der Körper nur um eine auf dieser Ebene normale Axe gedreht werden kann, während die Axe selbst entweder unbewegt gelassen, oder parallel mit sich fortgeführt wird. Dass bei einer so bedingten Lageänderung des Körpers, und wenn die Kräfte auf ihre anfänglichen Angriffspunkte parallel mit ihren anfänglichen Richtungen zu wirken fortfahren, die Resultante der Kräfte, wenn sie anders eine solche haben, immerfort demselben Punkte des Körpers begegnet; dass folglich, wenn dieser Punkt unbeweglich gemacht wird, die Kräfte bei jeder Lage, in die der Körper durch Drehung um eine durch den Punkt gehende und auf jener Ebene normale Axe gebracht werden kann, sich das Gleichgewicht halten: dies wird aus nachstehenden Betrachtungen ohne Mühe erhellen.

§. 115.

Seyen PA und QA (Fig. 37.) zwei in einer Ebene liegende und sich in A schneidende Richtungen zweier Kräfte; P und Q die Angriffspunkte der Kräfte und

TA die Richtung der Resultante derselben. Ob nun die zwei Kräfte auf die Punkte P und Q des Körpers parallel mit ihren jetzigen Richtungen fortwirken, während der Körper um einen beliebigen Winkel α um eine auf der Ebene PQA normale Axe gedreht wird, oder ob man den Körper in Ruhe lässt, dagegen aber die Richtungen PA und QA um die Angriffspunkte P und Q nach der, der vorigen entgegengesetzten, Seite, jede um denselben Winkel, $=\alpha$, in der Ebene dreht, ist hinsichtlich der gegenseitigen Lage des Körpers und der Richtungen der Kräfte offenbar einerlei. Es geschehe das Letztere, so bleibt die Grösse des Winkels von QA mit PA unverändert, und die Spitze A desselben beschreibt einen durch die Punkte P und Q gehenden Kreis. Da also die Intensitäten der beiden Kräfte und die Winkel ihrer Richtungen unverändert bleiben, so werden auch die Intensität der Resultante und die Winkel TAP, TAQ der Resultante mit den beiden Kräften sich nicht ändern. Ist daher T der Durchschnitt der Resultante mit dem Kreise beim Anfange der Drehung, so wird auch fernerhin die Resultante den Kreis in T treffen, indem der Bogen PT das Doppelte des constanten Winkels PAT misst. Die Resultante wird sich daher um denselben Winkel α und nach derselben Seite, wie jede der beiden Kräfte, um den Punkt T drehen; T wird folglich der Mittelpunkt der beiden Kräfte seyn.

Sind demnach in einer Ebene zwei Kräfte und ihre Angriffspunkte gegeben, so findet sich der Mittelpunkt der Kräfte als der Durchschnitt ihrer Resultante mit dem durch die Angriffspunkte und den Durchschnitt der Richtungen der beiden Kräfte zu beschreibenden Kreise.

Sind die zwei Kräfte mit einander parallel, so liegt ihr Durchschnittspunkt unendlich entfernt, der zu beschreibende Kreis wird unendlich gross, und der Bogen desselben durch die beiden Angriffspunkte verwandelt sich in eine gerade Linie, so dass, wie wir bereits im Obigen (§. 105.) sahen, von zwei parallelen Kräften der Mittelpunkt mit den beiden Angriffspunkten in einer Geraden liegt.

Es erhellet nun leicht, wie auch von drei und mehreren Kräften in einer Ebene der Mittelpunkt gefunden werden kann. — Seyen p, q, r drei solcher Kräfte und P, Q, R ihre Angriffspunkte. Man suche erstlich von p und q die Resultante t und den in ihr liegenden Mittelpunkt T. Man suche zweitens von den Kräften t und r, deren Angriffspunkte T und R sind, die Resultante s und den in ihr befindlichen Mittelpunkt S, so wird S auch der Mittelpunkt der drei Kräfte p, q, r seyn. Denn werden sämmtliche Kräfte p, q, r, t, s um die Punkte P, Q, R, T, S um gleiche Winkel nach einerlei Seite in der Ebene gedreht, — als welches mit der Drehung des Körpers nach der entgegengesetzten Seite auf Eines hinauskommt, — so sind auch nach dieser Drehung p und q noch gleichwirkend mit t, und t und r gleichwirkend mit s, folglich auch p, q, r gleichwirkend mit s; folglich S der zu bestimmende Mittelpunkt. — Hat man vier Kräfte mit ihren Angriffspunkten, so wird die Resultante und der Mittelpunkt von dreien dieser Kräfte in Verbindung mit der vierten Kraft und ihrem Angriffspunkte die Resultante und den Mittelpunkt aller vier Kräfte geben, u. s. w.

Jedes System von Kräften in einer Ebene, welches auf eine Kraft reducirbar ist, hat demnach

einen Mittelpunkt; oder, wie wir diesen Satz auch noch ausdrücken können:

Sind von mehrern Kräften in einer Ebene, welche eine einfache Resultante haben, die Intensitäten, die Winkel, welche ihre Richtungen mit einander bilden, und in der Richtung einer jeden irgend ein Punkt gegeben, so kann man daraus die Intensität der Resultante, den Winkel ihrer Richtung mit jeder der erstern Richtungen und einen in ihrer Richtung liegenden Punkt finden, — nämlich den Mittelpunkt des Systems, wenn erstere Punkte als die Angriffspunkte der Kräfte genommen werden.

§. 116.

Eben so, wie ein System von parallelen Kräften, hat auch ein System von Kräften in einer Ebene nur einen Mittelpunkt. Denn gäbe es noch einen zweiten, so müsste die Resultante des Systems nicht nur sie beide enthalten, sondern auch, nachdem sie das einemal um den einen, das anderemal um den andern nach einerlei Seite zu um einerlei Winkel von beliebiger Grösse gedreht worden wäre, in beiden Fällen einerlei Wirkung haben; welches nicht möglich ist. In welcher Ordnung man daher auch die Kräfte nach und nach mit einander verbindet, um zu ihrem Mittelpunkte zu gelangen, so muss zuletzt doch immer derselbe Punkt gefunden werden. Diese Bemerkung kann uns zur Entdeckung mehrerer geometrischer Sätze führen.

Seyen, um dieses nur an dem einfachsten Beispiele zu zeigen, p, q, r drei Kräfte in einer Ebene, AD, AB, CB (Fig. 38.) ihre Richtungen und die Punkte P, Q, R dieser Linien die Angriffspunkte der Kräfte. Von p und q sey t die Resultante und AC ihre Rich-

tung; von t und r sey s die Resultante und DC ihre Richtung; also s auch die Resultante von p, q, r.

Um nun den in DC liegenden Mittelpunkt von p, q, r zu finden, beschreibe man erstlich durch P, Q und A einen Kreis, welcher AC noch in T schneide, und es wird T der Mittelpunkt von p und q, oder der Angriffspunkt von t seyn. Man beschreibe ferner einen Kreis durch T, R und C, so wird sein Durchschnitt S mit DC der Mittelpunkt von t und r, d. i. von p, q und r, also der gesuchte, seyn.

Es lässt sich aber dieser Mittelpunkt noch auf zwei andere Arten bestimmen. — Da die vier Kräfte p, q, r, $-s$ im Gleichgewichte sind, so ist die Resultante von q und r, welche u heisse, einerlei mit der Resultante von $-p$ und s, und die gemeinschaftliche Richtung beider ist DB. Bezeichnet ferner E den Durchschnitt von AD mit CB, und F den Durchschnitt von AB mit DC, so geht die Resultante von p und r, welche man v nenne, durch E, und die Resultante von $-q$ und s durch F; und da wegen des gedachten Gleichgewichts auch diese zwei Resultanten identisch sind, so ist EF ihre gemeinschaftliche Richtung.

Indem man nun zuerst q und r zu u vereiniget und hierauf u und p zu s zusammensetzt, beschreibe man einen Kreis durch Q, R, B, welcher DB, als die Richtung von u, in U, dem Mittelpunkte von q und r, treffe, und einen Kreis durch U, P, D, welcher DC ebenfalls in S schneiden wird.

Endlich kann man auch von den drei Kräften p, q, r zuerst p mit r zu v, und alsdann v mit q zu s verbinden. Man beschreibe deshalb durch P, R, E einen Kreis, welcher EF, als die Richtung von v, in V schneide, so ist V der Mittelpunkt von p und r; und

es wird ein durch V, Q und F gelegter Kreis der DC gleicherweise in S begegnen.

Erwägen wir nun noch, dass die drei Richtungen von Kräften, AD, AB, CB, und die in ihnen liegenden Punkte P, Q, R, so wie die Richtungen CA, DB der durch A und B gehenden Resultanten ganz nach Belieben genommen werden können, so liefert uns die Zusammennahme der drei verschiedenen Arten, den Punkt S zu finden, folgendes Theorem:

Hat man ein ebenes Viereck $ABCD$ und beschreibt zwei Kreise, den einen durch A, den andern durch C, welche die Diagonale AC in einem und demselben Punkte T schneiden, und nennt man P, Q die Durchschnitte des erstern Kreises mit den Seiten DA, AB, und R, S die Durchschnitte des letztern mit BC, CD; so schneiden auch die Kreise QBR und SDP die Diagonale BD in einem und demselben Punkte U; und wenn man die Durchschnitte von DA mit BC und von AB mit CD, E und F nennt, so gehen auch die Kreise PER und QSF durch einen und denselben Punkt V der Diagonale EF.

Diese Figur besitzt aber noch die merkwürdige Eigenschaft,

dass sich sämmtliche sechs durch A, B, C, D, E, F gelegten Kreise in einem und demselben Punkte Z schneiden, und dass die Bögen ZA, ZB, ... ZF dieser Kreise, alle von Z aus nach derselben Seite zu genommen, einander ähnlich sind.

Um dieses einzusehen, wollen wir uns sämmtliche sieben Linien der Figur, d. i. die Richtungen der Kräfte p, q, r, s und der Resultanten t, u, v um ihre Angriffspunkte P, Q, R, S, T, U, V nach einerlei Seite mit einerlei Winkelgeschwindigkeit sich zu

drehen anfangen lassen. Je zwei Kräfte und ihre Resultante, (wie p, q und t, oder q, r und u,) fahren dabei fort, sich in einem Punkte (A, oder B) zu schneiden; dieser Punkt rückt in dem durch die Angriffspunkte der beiden Kräfte und ihrer Resultante zu legenden Kreise (PQT, oder QRU) fort, und alle diese Durchschnittspunkte A, B, ... beschreiben, wegen der Gleichheit der Winkelgeschwindigkeiten von $p, q, \ldots$, in gleichen Zeiten ähnliche Bögen ihrer Kreise und kehren in demselben Zeitpunkte zu ihren anfänglichen Oertern zurück, um ihre Kreisbewegung von Neuem anzufangen.

Sey nun von den zwei Kreisen PQT und QRU (Fig. 38*), welche sich das einemal in Q schneiden, Z der zweite Durchschnittspunkt, und sey der Punkt A in seinem Kreise PQT bis Z gekommen. Weil A, Q, B immer in gerader Linie, in der Richtung der Kraft q, sind, so muss, wenn A in Z ist, der im Kreise QRU fortgehende Punkt B in der Geraden QZ, also entweder in Q oder Z seyn. Ist aber B in Q, so wird die Gerade BQ eine den Kreis QRU in Q Berührende, und A befindet sich daselbst, wo diese Tangente den Kreis PQT schneidet, also nicht in Z. Ist daher A nach Z gelangt, so muss auch B gleichzeitig in Z eingetroffen seyn. Alsdann schneiden sich folglich die Richtungen AP, AQ, RB, AT, UB der Kräfte p, q, r und ihrer Resultanten t, u, mithin auch die Richtungen von v und s, als den Resultanten von p, r und p, q, r, in einem Punkte Z. Nächst A und B müssen daher auch die übrigen Durchschnittspunkte C, D, E, F je zweier Kräfte und ihrer Resultante gleichzeitig in Z eintreffen. Sämmtliche sechs durch die anfänglichen Oerter von A, B, ... F gelegten Kreise schneiden sich folglich in einem und demselben Punkte Z, und die

Bögen derselben ZA, ZB, ... ZF müssen einander ähnlich seyn, indem sonst A, B, ... F nicht gleichzeitig in Z eintreffen könnten.

§. 117.

Zusätze. *a.* Während sich die Resultanten t und u um ihre Angriffspunkte T und U drehen, beschreibt ihr Durchschnittspunkt, welcher G heisse, einen durch T und U gehenden Kreis und trifft, wenn p, q, r, s in Z zusammenkommen, ebenfalls in Z ein. Es liegen daher T, U, G mit Z ebenfalls in einem Kreise, und es ist der Bogen ZG den Bögen ZA, ... ähnlich. Wir können hieraus den Schluss ziehen:

Werden in den drei Seiten BG, GA, AB eines Dreiecks ABG (oder in ihren Verlängerungen) nach Belieben drei Punkte U, T, Q genommen, so schneiden sich die drei Kreise ATQ, BQU, GUT in einem Punkte Z, und die Bögen ZA, ZB, ZG dieser Kreise sind einander ähnlich.

Auf gleiche Weise erhellet, dass, wenn AC, EF in H und BD, EF in I sich schneiden, die Punkte T, V, H sowohl, als U, V, I mit Z in einem Kreise liegen, und dass die Bögen ZH, ZI dieser Kreise einander und den Bögen ZA, ... ähnlich sind.

b. Da, wenn die Kräfte p, q, r, s, t, u, v um ihre Angriffspunkte P, ... V auf die gedachte Weise gedreht werden, die Winkel je zweier Kräfte mit einander sich nicht ändern, und da je drei Kräfte, wie p, q, t, welche sich anfangs in einem Punkte A schneiden, auch bei der Drehung damit fortfahren, so wird jedes der anfangs von den Kräften gebildeten Dreiecke sich ähnlich bleiben und die Anzahl dieser Dreiecke nicht geändert werden; mithin wird auch das System der Durch-

schnittspunkte A, B, ... G, H, I, also die ganze Figur, bei der Drehung sich ähnlich bleiben.

Mit dieser neuen Eigenschaft der Figur lässt sich die vorige, dass sämmtliche Kreise, welche die Punkte A,... I beschreiben, sich in einem Punkte Z schneiden, auch folgendergestalt darthun. Da nämlich erwiesenermassen die zwei Punkte A und B gleichzeitig in dem Durchschnitte Z ihrer Kreise eintreffen, und damit ihr gegenseitiger Abstand $=0$ wird, so müssen dann auch alle übrigen Punkte C, D, ... I in Z zusammenkommen, indem sie sonst eine Figur bildeten, welche der anfänglichen nicht ähnlich wäre.

§. 118.

Die so eben aus statischen Betrachtungen erhaltenen geometrischen Sätze führen zu einer besondern Art von Reciprocität zwischen Punkten und Kreisen, woraus sich umgekehrt jene anfangs vielleicht überraschenden Sätze auf das natürlichste herleiten und so weit, als man will, verallgemeinern lassen.

Man habe eine beliebige Anzahl gegebener Punkte A, B, C, ... in einer Ebene. Jeder derselben werde mit noch einem andern gegebenen Punkt Z der Ebene durch einen Kreis von solcher Grösse verbunden, dass jeder der Bögen ZA, ZB, ZC,..., wenn man ihn in seinem Kreise vom Mittelpunkte des letztern aus betrachtet und immer nach einer und derselben Seite zu rechnet, einen und denselben gegebenen Winkel $=2\alpha$ misst, und daher alle diese Bögen einander ähnlich sind. Die hiermit vollkommen bestimmte Figur besitzt nun folgende Eigenschaften:

1) Die zwei durch A und B gelegten Kreise mögen sich ausser in Z noch in P (Fig. 39.) schneiden, so

ist der Winkel $ZPA = ZPB = \alpha$, und P, A, B, liegen folglich in gerader Linie; d. h. die durch zwei Punkte des Systems geführten Kreise schneiden sich in einem Punkte der jene zwei Punkte verbindenden Geraden.

2) Es werden daher auch, wenn drei Punkte A, B, C des Systems oder mehrere in einer Geraden liegen, die den Punkten zugehörigen Kreise sich in einem und demselben Punkte P dieser Geraden schneiden. Jeder Geraden AB kommt hiernach ein gewisser in ihr liegender Punkt P zu, den wir den festen Punkt der Geraden nennen wollen. Er wird gefunden als der Durchschnitt der Geraden AB mit einer zweiten ZP, welche, durch Z gelegt, mit der erstern den constanten Winkel α nach einerlei Seite zu macht.

3) Seyen AP, AQ, AR,... mehrere sich in demselben Punkte A schneidende Geraden und P, Q, R,... ihre festen Punkte. Der dem Punkte A zugehörige Kreis muss nun, da A in einer Geraden liegt, deren fester Punkt P ist, durch P gehen, und aus ähnlichem Grunde wird er auch die Punkte Q, R,... treffen. Schneiden sich daher zwei oder mehrere Gerade in einem Punkte A, so liegt dieser Punkt mit den festen Punkten der Geraden und dem Punkte Z in dem, dem Punkte A zugehörigen, Kreise; oder mit andern Worten: der einem Punkte zugehörige Kreis schneidet alle durch den Punkt gehenden Geraden in ihren festen Punkten.

4) Man lasse jetzt sämmtliche Punkte A, B, C,... des Systems in ihren Kreisen nach einerlei Seite sich gleichmässig fortbewegen, so dass jeder in derselben Zeit denselben Theil seines Kreises zurücklegt, und alle gleichzeitig in ihren anfänglichen Stellen wieder eintreffen. Weil ZA, ZB,... ähnliche Bögen sind,

so werden sie auch bei der Bewegung einander ähnlich bleiben, also gleichzeitig $=0$ werden, d. h. sämmtliche Punkte A, B, C, ... werden zu gleicher Zeit nach Z kommen.

Aus der Aehnlichkeit der Bögen ZA und ZB wurde in 1) der Durchgang der Geraden AB durch den Durchschnitt P der Kreise durch A und B geschlossen. Es wird daher auch bei der Bewegung die AB den Punkt P zu treffen fortfahren, d. h. die AB, und eben so jede andere zwei Punkte des Systems verbindende Gerade, wird sich um ihren festen Punkt drehen.

Hieraus folgt weiter, dass das Dreieck ZAB sich fortwährend ähnlich bleibt. Denn der Nebenwinkel von ZAB wird von dem Bogen $\frac{1}{2}PZ$ des Kreises durch A, und der Winkel ZBA von dem Bogen $\frac{1}{2}PZ$ des Kreises durch B gemessen. Auf gleiche Art bleibt auch jedes der Dreiecke ZBC, ZAC, etc. sich ähnlich. Mithin wird auch das ganze System des ruhenden Punktes Z und der sich bewegenden A, B, C, ... nur der Grösse, nicht der Form nach, sich ändern. Dieses System schwindet beim Eintreffen der A, B, ... in Z in einen Punkt zusammen und wird am grössten, wenn jeder der Punkte A, B, ... sich in seinem Kreise von Z um den Durchmesser des Kreises entfernt hat. Da alsdann die Mittelpunkte der Linien ZA, ZB, ... mit den Mittelpunkten der Kreise zusammenfallen, so folgt, dass auch das System der Mittelpunkte der Kreise eine dem System der Punkte A, B, ... ähnliche Figur bildet, und dass in beiden Z ein ähnlich liegender Punkt ist.

§. 119.

Bei der jetzt betrachteten Figur wurden die Punkte A, B, C, ..., so wie der Punkt Z und der Winkel 2α, beliebig angenommen und damit die Kreise durch

A, B, C, ... construirt. Statt des Punktes Z und d
Winkels 2α können wir aber auch zwei von den Kr
sen, als zum Theil beliebig gegeben, setzen und di
aus die übrigen zu bestimmen suchen.

Sey demnach in einer Ebene ein System von Pun
ten A, B, C, D, E, ... (Fig. 40.) gegeben und werd

1) durch A willkührlich ein Kreis beschrieben, d
man als den dem Punkte A zugehörigen betrach
Er schneide die Geraden AB, AC, AD, AE, ...
Punkten, die ich mit $A{\cdot}B$, $A{\cdot}C$, $A{\cdot}D$, $A{\cdot}E$ bezeichn
will, und welche die festen Punkte dieser Linien seyn w
den. — Der durch B zu beschreibende Kreis muss auss
dem noch durch den Punkt $A{\cdot}B$ und den im Krei
durch A liegenden Punkt Z gehen. Man beschreibe dah

2) durch B und $A{\cdot}B$ willkührlich einen zweit
Kreis und nenne Z den Durchschnitt desselben mit de
Kreise durch A. Die Durchschnitte $B{\cdot}C$, $B{\cdot}D$, $B{\cdot}E$, .
des Kreises durch B mit den Linien BC, BD, BE, .
sind die festen Punkte dieser Linien.

3) Der Kreis für den Punkt C muss ausser C no
die schon erhaltenen Punkte $A{\cdot}C$, $B{\cdot}C$, Z treffen u
ist hierdurch mehr als vollkommen bestimmt. Di
giebt, wie man leicht wahrnimmt, den schon in §. 117
gefundenen Satz. — Treffe der Kreis durch C d
CD, CE, ... in $C{\cdot}D$, $C{\cdot}E$, ..., als den festen Punkt
dieser Linien, so liegen nunmehr

4) die fünf Punkte D, $A{\cdot}D$, $B{\cdot}D$, $C{\cdot}D$, Z in eine
Kreise, in dem, welcher dem Punkte D zugehört, u
wir haben damit den in §. 116 vom Vierecke bemer
ten Satz wiedergefunden. — Der Kreis durch D tre
die Linien DE, ... in $D{\cdot}E$, ..., so müssen

5) die sechs Punkte E, $A{\cdot}E$, $B{\cdot}E$, $C{\cdot}E$, $D{\cdot}E$, .
in einem Kreise liegen. Dies ist der Kreis für d

Punkt E, von dem man auf ähnliche Art zu den Kreisen der noch übrigen Punkte fortgeht. — Das damit gewonnene allgemeine Resultat kann etwa folgendergestalt ausgedrückt werden:

Hat man ein System von Punkten in einer Ebene, und verbindet sie paarweise durch gerade Linien, so kann man in jeder dieser Linien noch einen Punkt angeben, dergestalt, dass alle die letztern Punkte, welche in Linien liegen, die von einem und demselben Punkte des Systems ausgehen, mit diesem Punkte selbst immer in einem Kreise enthalten sind. Drei der Punkte, welche in Linien liegen, die nicht alle drei von demselben Punkte des Systems ausgehen, können willkührlich genommen werden. Alle die gedachten Kreise schneiden sich übrigens noch in einem Punkte, und die Bögen derselben von diesem Punkte bis zu den Punkten des Systems sind insgesammt einander ähnlich.

§. 120.

Bei der Construction, wodurch in §. 115. der Mittelpunkt eines Systems von Kräften in einer Ebene gefunden wurde, giebt es einige noch nicht erwähnte Beziehungen, welche uns, den Mittelpunkt noch auf eine andere Weise zu finden, in Stand setzen.

Seyen, wie in §. 115., PA, QA, TA (Fig. 37.) die Richtungen zweier Kräfte p, q und ihrer Resultante t; P, Q die Angriffspunkte der erstern und T der in der Resultante enthaltene Mittelpunkt. Weil T mit P, Q, A in einem Kreise liegt, so ist der Winkel $PAT = PQT$, $QAT = QPT$ und $PAQ =$ dem Nebenwinkel von PTQ. Construirt man daher ein Dreieck $P'Q'T'$, dessen Seiten $T'Q'$, $P'T'$, $P'Q'$ den Richtungen von p, q, t par-

allel sind, so wird dieses dem Dreiecke PQT ähnli seyn, jedoch, wie die Figur zeigt, die umgekehrte La von PQT haben, so dass man das eine Dreieck ni durch blosses Drehen in seiner Ebene, sondern e nach einer halben Wendung um eine in der Ebe liegende Axe in eine solche Lage bringen kann, da seine Seiten mit denen des andern parallel werden.

Sind folglich im Gegentheile die Angriffspunkte und Q zweier Kräfte und das Dreieck $P'Q'T'$ geg ben, dessen Seiten $T'Q'$, $P'T'$ und $P'Q'$ den Ri tungen der beiden Kräfte und ihrer Resultante paral seyn sollen, so construire man, um den Mittelpunkt finden, über PQ ein dem $P'Q'T'$ ähnliches, aber u gekehrt liegendes Dreieck PQT, und es wird T d gesuchte Mittelpunkt seyn.

Hierbei verdient noch bemerkt zu werden, da nach §. 28. *b.* die Seiten des Dreiecks $P'Q'T'$, u folglich auch des Dreiecks PQT, den Intensitäten v p, q, t proportional sind. Lassen wir daher noch i T eine der Resultante t gleiche aber entgegengesetz Kraft, also nach der Richtung AT, wirken, als w durch ein bei der Drehung sich nicht aufhebend Gleichgewicht entsteht, so haben wir folgenden der seine Beziehungen zwischen den Stücken eines Dreiec und den bestimmenden Stücken dreier Kräfte nicht u interessanten Satz:

Sind die Ecken P, Q, T eines Dreiecks die A griffspunkte dreier Kräfte p, q, t, sind die Wink des Dreiecks den Supplementen der von den Richtu gen der Kräfte mit einander gebildeten Winkel gleic $P = 180° - q^\wedge t$, etc. und sind die Seiten des Dre ecks den Intensitäten der Kräfte proportional, Q proportional mit p, etc. so herrscht Gleichgewicht.

Dass dieses Gleichgewicht durch Drehung nicht gestört wird, geht schon aus dem Satze selbst hervor, indem eine der drei Richtungen nach Willkühr genommen werden kann, und unabhängig von dieser Annahme die gegenseitigen Winkel der Richtungen bestimmt werden.

§. 121.

Wir wollen jetzt nach dieser zweiten Methode den Mittelpunkt von drei Kräften p, q, r zu bestimmen suchen. Seyen ad, ba, cb (Fig. 38.) parallel mit den Richtungen derselben. bd sey parallel mit der Resultante t von p und q; ca parallel mit der Resultante u von q und r. Alsdann ist, wie sich auch ohne das Parallelogramm der Kräfte erweisen lässt, cd parallel mit der Resultante von p, q, r, welche s heisse*). Seyen endlich P, Q, R die gegebenen Angriffspunkte von p, q, r.

*) Denn construirt man ein Viereck $ABCD$, dessen drei Seiten DA, AB, BC und zwei Diagonalen AC, BD, resp. den Seiten da, ba, bc und Diagonalen bd, ac des Vierecks $abcd$ parallel sind, und lässt man AD, AB, CB die Richtungen der Kräfte p, q, r vorstellen, so sind AC, DB die Richtungen der Resultanten t, u. Die Resultante s von p, q, r, d. i. von t, r oder von p, u, muss daher sowohl durch C, als durch D gehen, folglich in CD fallen. Heisst nun noch g der Durchschnitt von ac mit bd, und G der Durchschnitt von BD mit AC, so sind wegen des Parallelismus von DA mit da, u. s. w. die Dreiecke gda und GAD, gab und GBA, gbc und GCB paarweise einander ähnlich, und es verhält sich daher

$$gd : ga = GA : GD,$$
$$ga : gb = GB : GA,$$
$$gb : gc = GC : GB,$$
$$\text{folglich } gd : gc = GC : GD.$$

Mithin sind auch die Dreiecke gcd und GDC einander ähnlich, und cd ist mit DC, d. i. mit der Richtung von s, parallel. — Uebrigens ist der jetzt geometrisch erwiesene Parallelismus von cd mit DC, unter denselben Voraussetzungen, wie hier, bereits in §. 29. durch Statik dargethan worden.

Man construire nun über PQ ein dem Dreiecke bda, d. i. dem Dreiecke der Richtungen von p, q, t ähnliches Dreieck PQT, indem man die Spitze T auf derjenigen Seite von PQ nimmt, wodurch PQT die umgekehrte Lage des Dreiecks pqt erhält. Eben so mache man über RT das Dreieck RTS dem Dreiecke rts in umgekehrter Lage ähnlich, und man hat damit S, als den Mittelpunkt von p, q, r gefunden.

Oder man verzeichne über QR das dem Dreiecke qru ähnliche und umgekehrt liegende Dreieck QRU und über PU das dem Dreiecke pus ähnliche und umgekehrt liegende Dreieck PUS.

Da sich auf beide Arten derselbe Punkt S ergeben muss, so hat man folgenden Satz:

Sind p, q, r, s die aufeinander folgenden Seiten eines ebenen Vierecks, t die durch den Durchschnitt von p mit s und den von q mit r gehende Diagonale, u die andere Diagonale, so kann man zu drei beliebig genommenen Punkten P, Q, R drei andere S, T, U in derselben Ebene hinzufügen, dergestalt, dass die vier Dreiecke PQT, QRU, RST, SPU den Dreiecken pqt, qru, rst, spu der erstern Figur ähnlich sind.

Sämmtliche Dreiecke PQT, etc. können hierbei übrigens die umgekehrte Lage der Dreiecke pqt, etc. haben, wie vorhin, oder auch die directe, indem man nur die Ebene der einen Figur von der entgegengesetzten Seite zu betrachten braucht, um die eine Lage sogleich in die andere zu verwandeln.

Auf dieselbe Weise kann man nun auch bei einem Systeme von noch mehreren Kräften verfahren, und damit folgenden allgemeinen Satz gewinnen:

Hat man ein System von m Punkten in einer Ebene und verbindet je zwei derselben durch eine Gerade, so kann man in einer Ebene jeder dieser $\frac{1}{2}m(m-1)$ Geraden einen Punkt entsprechen lassen, dergestalt, dass jedem der $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ Dreiecke, welches drei der m erstern Punkte zu Ecken hat, das Dreieck ähnlich ist, dessen Ecken die den Seiten des erstern Dreiecks entsprechenden Punkte sind. Dabei können von den $\frac{1}{2}m(m-1)$ Punkten irgend $m-1$, von deren entsprechenden Linien keine drei oder mehrere ein geschlossenes Vieleck bilden, nach Willkühr bestimmt werden.

Die übrigen $\frac{1}{2}m(m-1)-(m-1)=\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ Punkte werden durch Construction eben so vieler Dreiecke gefunden, die den entsprechenden Dreiecken in dem Systeme der m Punkte ähnlich sind. Zufolge des Satzes müssen dann auch die übrigen $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)-\frac{1}{2}(m-1)(m-2)=\frac{1}{6}(m-1)(m-2)(m-3)$ Dreiecke der einen Figur den entsprechenden Dreiecken in der andern ähnlich seyn.

§. 122.

Nachdem wir in dem Bisherigen von Kräften, die nach beliebigen Richtungen in einer Ebene wirken, den Mittelpunkt durch Construction zu finden gelernt haben, wollen wir diesen Punkt noch durch Rechnung zu bestimmen suchen, wobei sich uns zugleich einige andere für die Folge wichtige Bemerkungen darbieten werden.

Seyen, in Bezug auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem, (X, Y), (X', Y'), etc. mehrere Kräfte in einer Ebene, die sich das Gleichgewicht halten; (x, y), (x', y'), etc. die Angriffspunkte der Kräfte. Alsdann ist wegen des Gleichgewichts (§. 38.):

$$1)\ \Sigma X=0,\quad 2)\ \Sigma Y=0,\quad 3)\ \Sigma(xY-yX)=0$$

Indem nun die Kräfte mit parallel bleibenden Richtungen und unveränderten Intensitäten auf dieselben Punkte des Körpers zu wirken fortfahren, werde der Körper verrückt, jedoch so, dass die Ebene der Kräfte nicht aus ihrer Lage komme. Durch diese Verrückung seyen in Bezug auf das vorige Coordinatensystem, welches an der Bewegung nicht Theil genommen hat, die Coordinaten der Angriffspunkte resp. in $x_1, y_1; x'_1, y'_1$ etc. übergegangen. Soll daher auch jetzt noch Gleichgewicht herrschen, so muss zu den vorigen drei Gleichungen noch die vierte

$$\Sigma(x_{,}Y-y_{,}X)=0$$

hinzukommen.

Es ist aber, wenn der Punkt des Körpers, welcher anfänglich mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfiel, nachher die Coordinaten a, b erhält, und wenn die Linie des Körpers, welche anfangs mit der Axe der x coincidirte, nach der Verrückung einen Winkel $=\alpha$ mit derselben macht:

$$x_{,}=a+x\cos\alpha-y\sin\alpha,$$
$$y_{,}=b+x\sin\alpha+y\cos\alpha,$$

u. s. w. Mit diesen Werthen von $x_{,,}\ y_{,,}\ \ldots$ wird

$$\Sigma(x_{,}Y-y_{,}X)=a\,\Sigma Y-b\,\Sigma X+\cos\alpha\,\Sigma(xY-yX)$$
$$-\sin\alpha\,\Sigma(xX+yY)$$

oder mit Anwendung der Abkürzungen A, B, N (§. ...) und wenn wir

$$\Sigma(xX+yY)=h$$

setzen: ... $\Sigma(x_{,}Y-y_{,}X)=aA-bB+N\cos\alpha-h\sin\alpha$

$$=-h\sin\alpha,$$

wegen 1), 2) und 3); und es ist demnach

$$4)\ h=0$$

die Bedingungsgleichung für die Fortdauer des Gleichgewichts.

§. 123.

Zusätze. *a.* Durch a, b und α wird die Verrückung des Körpers, wie sie jetzt angenommen worden, vollkommen bestimmt. Sie kann hiernach als zusammengesetzt betrachtet werden aus einer mit der Ebene der x, y parallelen Fortbewegung, welche durch a, b gegeben ist, und aus einer durch α gegebenen Drehung um eine auf dieser Ebene normale Axe.

b. So wie $\Sigma(xY-yX)$ das anfängliche Moment des Systems in Bezug auf den Anfangspunkt der Coordinaten ist, so ist $\Sigma(x_{\prime}Y-y_{\prime}X)$ das Moment in Bezug auf denselben Punkt nach der Verrückung. Beim anfänglichen Gleichgewicht ist ersteres Moment $=0$, und unter derselben Voraussetzung das letztere $=-h\sin\alpha$, also nur abhängig von dem Winkel, um welchen der Körper gedreht worden, und unabhängig von der durch a, b bestimmten parallelen Fortbewegung. Es ist daher auch unabhängig von der Axe der Drehung, wenn diese nur auf der Ebene der x, y senkrecht steht.

c. Weil sowohl anfangs, als bei der nachherigen Drehung, A und B null sind, so wird das System, welches anfangs im Gleichgewichte ist, bei der Drehung mit einem Paare gleichwirkend (§. 39.). Das Moment des Systems, $-h\sin\alpha$, ist daher eben so, wie das Moment eines Paares, für alle Punkte der Ebene von gleicher Grösse (§. 31.).

d. Das Moment nach der Drehung ist dem Sinus des Drehungswinkels α proportional und erreicht daher nach einer Drehung um 90° oder 270° seinen grössten Werth, welcher $=\mp h$ ist. Dagegen ist es $=0$ und

das Gleichgewicht besteht noch, wenn $\alpha =$ einem V fachen von 180°, und daher der Körper seiner anfä lichen Lage parallel ist, oder halb um sich herum dreht worden ist. (Vergl. §. 5. *b.*)

Dass $-h$ der Werth des Moments nach e Drehung um 90° ist, folgt übrigens auch unmittel daraus, dass durch eine solche Drehung des Syst um den Anfangspunkt der Coordinaten, x in $-y$ y in x, folglich $xY-yX$ in $-(xX+yY)$ überge

§. 124.

Ist in der Ebene, worin die Kräfte (X, Y), $(X', Y'$ wirken, noch ein zweites System von Kräften befindl die sich bei der anfänglichen Lage des Körpers el falls das Gleichgewicht halten, und ist nach einer I hung um 90° das Moment dieses zweiten Systems e so gross, als das des ersten, $=-h$, so ist es n einer Drehung um α, $=-h \sin \alpha$, folglich stets dem ersten gleichwirkend.

Bestehe das zweite System nur aus zwei Krä P_1 und P_2, $=-P_1$, deren Angriffspunkte A_1 und seyen. Das Coordinatensystem, dessen Lage willk lich ist, wollen wir so annehmen, dass beim anfä lichen Gleichgewichte der Punkt A_1 in den Anfan punkt der Coordinaten und die Gerade A_1A_2 in die der x fällt. Alsdann ist für den Punkt A_2, $x=A_1$ $y=0$, und für die Kraft P_2, $X=P_2$, $Y=0$; folg $h=xX=A_1A_2.P_2$, wo die Richtung von P_2 und anfängliche von A_1A_2 einerlei oder einander entgeg gesetzt seyn müssen, nachdem h positiv oder negativ

Hat man daher für ein System von Kräften in ei Ebene, die im Gleichgewichte sind, das Moment h rechnet, und bringt man an zwei willkührlich in

Ebene genommenen Punkten A_1 und A_2 zwei einander direct entgegengesetzte Kräfte P_1 und P_2 an, deren jede $= \frac{k}{A_1 A_2}$ ist, und von welchen P_2 auf A_2 nach der Richtung $A_1 A_2$ oder $A_2 A_1$ wirkt, nachdem k das positive oder negative Zeichen hat, so dass mithin beide Kräfte bei einem positiven k ihre Angriffspunkte von einander zu entfernen, bei einem negativen einander zu nähern streben: so werden bei der Drehung das Paar, in welches diese zwei Kräfte übergehen, und das erstere System selbst immer gleiche Wirkung haben. Mit andern Worten:

Ein System von Kräften in einer Ebene, welche sich das Gleichgewicht halten, wird bei Drehung der Ebene in sich selbst gleichwirkend mit einem Paare, dessen Kräfte eben so, wie die des Systems mit parallel bleibenden Richtungen und unveränderter Stärke fortwährend auf dieselben zwei Punkte der Ebene wirkend sich annehmen lassen. Die zwei Punkte selbst, oder auch der eine Punkt und die auf ihn gerichtete Kraft, können dabei willkührlich bestimmt werden.

Ist das System anfänglich nicht im Gleichgewichte, sondern auf ein Paar reducirbar, werden also von den Gleichungen 1), 2), 3) nur die beiden ersten erfüllt, so wird

$$\Sigma(x_{,}Y - y_{,}X) = N \cos\alpha - k \sin\alpha,$$

folglich wenn wir $\Sigma(x_{,}Y - y_{,}X) = 0$ setzen:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{N}{k},$$

d. h. das Moment des Systems verschwindet nach einer Drehung, deren Winkel α durch letztere Gleichung

bestimmt ist und somit zwei um 180° versch
Werthe hat.

*Ist demnach ein System von Kräften in
Ebene mit einem Paare gleichwirkend, so gi
bei Drehung der Ebene in sich selbst zwei ein
entgegengesetzte Lagen, in denen Gleichgewich
findet. Ein System dieser Art muss daher eb
wie das vorige, bei der Drehung mit einem
gleichwirkend seyn, dessen Kräfte auf zwei
kührlich zu nehmende Punkte der Ebene nac
allel bleibenden Richtungen wirken.*

§. 125.

Wenn endlich das in einer Ebene enthalte
stem durch eine einzelne Kraft (X_1, Y_1) ins Gl
wicht gebracht werden kann, so lässt sich der A
punkt (x_1, y_1) dieser Kraft in ihrer Richtung im
bestimmen, dass auch bei der Drehung das Gl
wicht fortdauert. Man hat nämlich, wenn zu de
ten des Systems noch die Kraft (X_1, Y_1) hinzu
wird, zufolge der vier Gleichungen 1) .. 4) (§.
welche das bei der Drehung fortdauernde Gleichg
bedingen:

$$X_1 + A = 0, \quad x_1 Y_1 - y_1 X_1 + N = 0,$$
$$Y_1 + B = 0, \quad x_1 X_1 + y_1 Y_1 + h = 0.$$

Hieraus fliesst nach Elimination von X_1 und

$$Bx_1 - Ay_1 = N, \quad Ax_1 + By_1 = h,$$

und hieraus weiter:

$$x_1 = \frac{Ah + BN}{A^2 + B^2}, \quad y_1 = \frac{Bh - AN}{A^2 + B^2}.$$

Ein auf eine einzelne Kraft ($-X_1$, $-Y_1$) r
bares System bleibt daher auch bei der Drehu
dieser Kraft gleichwirkend, und die Richtung de
trifft fortwährend den durch die eben gefundene

dinaten x_1, y_1 bestimmten Punkt der Ebene, — den Mittelpunkt des Systems.

Für den besondern Fall, wenn die Kräfte einander parallele Richtungen haben, und φ den Winkel bezeichnet, unter dem diese Richtungen gegen die Axe der x geneigt sind, P, P', ... aber die Intensitäten der Kräfte ausdrücken, hat man:

$$A = \cos\varphi\,\Sigma P,\quad N = \sin\varphi\,\Sigma xP - \cos\varphi\,\Sigma yP,$$
$$B = \sin\varphi\,\Sigma P,\quad h = \cos\varphi\,\Sigma xP + \sin\varphi\,\Sigma yP.$$

Substituirt man diese Werthe in den obigen Ausdrücken für x_1 und y_1, so ergeben sich nach leichter Reduction:

$$x_1 = \frac{\Sigma xP}{\Sigma P},\quad y_1 = \frac{\Sigma yP}{\Sigma P},$$

die schon in §. 108. gefundenen Werthe für die Coordinaten des Mittelpunkts paralleler Kräfte.

Achtes Kapitel.

Von den Axen des Gleichgewichts.

§. 126.

Die Untersuchungen, welche wir im vorigen Kapitel über Systeme von parallelen Kräften, so wie von Kräften, die in einer Ebene wirken, angestellt haben, wollen wir jetzt auf Systeme von Kräften im Raume überhaupt ausdehnen und uns deshalb zunächst folgende Frage vorlegen:

Auf einen frei beweglichen festen Körper wirken Kräfte nach beliebigen Richtungen und halten einander das Gleichgewicht. Unter welchen Bedingungen wird

dieses Gleichgewicht bei Aenderung der Lage des K
pers fortdauern, wenn die Kräfte auf die anfänglich
Angriffspunkte parallel mit ihren anfänglichen Ri
tungen zu wirken fortfahren?

Die in den nächsten §§. zu gebende Beantwort
dieser Frage wird die Grundlage aller übrigen hier
gehörigen Untersuchungen bilden.

§. 127.

In Bezug auf ein rechtwinkliches Coordinatensyst
dessen Axen eine unveränderliche Lage im Raume
ben, seyen (X, Y, Z), (X', Y', Z'), ... die auf
Körper wirkenden Kräfte und (x, y, z), (x', y', z'),
die Angriffspunkte derselben vor der Verrückung
Körpers. Alsdann ist, weil sich die Kräfte das Glei
gewicht halten sollen (§. 66.):

$$(1)\begin{cases}\Sigma X=0,\\ \Sigma Y=0,\\ \Sigma Z=0,\end{cases}\quad (2)\begin{cases}\Sigma(yZ-zY)=0,\\ \Sigma(zX-xZ)=0,\\ \Sigma(xY-yX)=0.\end{cases}$$

Man denke sich noch ein zweites System dre
sich rechtwinklich schneidender Coordinatenaxen, w
ches mit dem beweglichen Körper fest verbunden
und für welches daher die Coordinaten der Angri
punkte bei der Bewegung des Körpers ungeänd
bleiben. Dieses zweite System falle anfangs mit d
ersten Systeme zusammen, so dass die Coordinaten
Angriffspunkte in beiden Systemen anfangs sich gle
sind. Die nachherige Verrückung des Körpers w
nun vollkommen bestimmt seyn, wenn wir die dadu
erfolgte Aenderung der Lage des zweiten Systems
gen das erste angeben.

Sey daher nach der Verrückung (a, b, c) der A
fangspunkt des zweiten Systems in Bezug auf das ers

seyen ferner die Cosinus der Winkel, welche mit den Axen der x, y, z im ersten Systeme

die Axe der x im zweiten macht, $= \alpha, \beta, \gamma,$
- - - y - - - $= \alpha', \beta', \gamma',$
- - - z - - - $= \alpha'', \beta'', \gamma''.$

Alsdann ist, wenn wir noch die für das erste System veränderten Coordinaten der Angriffspunkte mit $x_{,}, y_{,}, z_{,}$; $x'_{,}, y'_{,}, z'_{,}$; etc. bezeichnen:

$$x_{,} = a + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z,$$
$$y_{,} = b + \beta x + \beta' y + \beta'' z,$$
$$z_{,} = c + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z,$$
$$x'_{,} = a + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z',$$

u. s. w. u. s. w.

Da nun auch nach der Verrückung zwischen den sich parallel gebliebenen Kräften Gleichgewicht noch herrschen soll, so müssen nächst den obigen sechs Gleichungen (1) und (2) noch folgende drei

$$(3) \begin{cases} \Sigma(y_{,}Z - z_{,}Y) = 0, \\ \Sigma(z_{,}X - x_{,}Z) = 0, \\ \Sigma(x_{,}Y - y_{,}X) = 0, \end{cases}$$ erfüllt werden.

Es wird aber, wenn man für $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ ihre durch x, y, z ausgedrückten Werthe substituirt:

$$y_{,}Z - z_{,}Y = bZ + \beta x Z + \beta' y Z + \beta'' z Z$$
$$- cY - \gamma x Y - \gamma' y Y - \gamma'' z Y.$$

Setzt man daher noch der Kürze willen und mit Rücksicht auf (2):

$$(4) \begin{cases} \Sigma y Z = \Sigma z Y = F, & \Sigma x X = l, \\ \Sigma z X = \Sigma x Z = G, & \Sigma y Y = m, \\ \Sigma x Y = \Sigma y X = H, & \Sigma z Z = n, \end{cases}$$

und erwägt, dass nach (1) $\Sigma X = 0$, etc., so verwandelt sich die erste der Gleichungen (3) in:

$$(5)\begin{cases}(\beta'-\gamma'')F+\beta G-\gamma H-\gamma'm+\beta''n=0;\\ \text{und eben so folgen}\\ (\gamma''-\alpha)G+\gamma'H-\alpha'F-\alpha''n+\gamma l=0,\\ (\alpha-\beta')H+\alpha''F-\beta''G-\beta l+\alpha'm=0\end{cases}$$

aus den beiden andern Gleichungen (3).

An die Stelle dieser mit (3) identischen Gleichungen (5) lassen sich aber drei aus ihnen fliessende ungleich einfachere setzen. Zu dem Ende erinnere man sich zuerst der bekannten Relationen:

$$(A)\begin{cases}\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0,\\ \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma=0,\\ \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,\end{cases}\quad (B)\begin{cases}\beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0,\\ \gamma\alpha+\gamma'\alpha'+\gamma''\alpha''=0,\\ \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0,\end{cases}$$

$$(C)\begin{cases}\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1, & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\\ \beta^2+\beta'^2+\beta''^2=1, & \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1,\\ \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1, & \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1,\end{cases}$$

und der aus ihnen sich ergebenden:

$$(D)\begin{cases}\beta'\gamma''-\beta''\gamma'=\alpha, & \gamma'\alpha''-\gamma''\alpha'=\beta, & \alpha'\beta''-\alpha''\beta'=\gamma,\\ \beta''\gamma-\beta\gamma''=\alpha', & \gamma''\alpha-\gamma\alpha''=\beta', & \alpha''\beta-\alpha\beta''=\gamma',\\ \beta\gamma'-\beta'\gamma=\alpha'', & \gamma\alpha'-\gamma'\alpha=\beta'', & \alpha\beta'-\alpha'\beta=\gamma'',\text{*)},\end{cases}$$

---

*) Um letztere weniger oft vorkommende Relationen (D) aus den vorhergehenden abzuleiten, denke man sich in den (D) auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens statt $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots$ einstweilen $a, b, c, a', \ldots,$ als abkürzende Bezeichnungen von $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$, etc. geschrieben. Der dann noch zu führende Beweis, dass $a=\alpha$, $b=\beta, \ldots$ $c''=\gamma''$, ist folgender.

Aus der zweiten und dritten der Gleichungen (A) fliesst:

$$\alpha:\beta:\gamma=\beta'\gamma''-\beta''\gamma' : \gamma'\alpha''-\gamma''\alpha' : \alpha'\beta''-\alpha''\beta'$$
$$\text{d. i. } = a : b : c,$$

eben so aus der zweiten und dritten der Gleichungen (B):

$$\alpha : \alpha' : \alpha'' = a : a' : a'';$$

und man sieht leicht, indem man auf gleiche Art auch die übrigen Verbindungen zweier Gleichungen in (A) und in (B) in Rechnung zieht, dass überhaupt die neun Grössen $a, b, \ldots c''$ den neun Cosinussen $\alpha, \beta, \ldots \gamma''$ proportional sind. Man setze daher

$$a=m\alpha,\ b=m\beta, \ldots c''=m\gamma'',$$

Nun folgt aus den zwei letzten der Gleichungen (5), wenn man aus ihnen l wegschafft, sie deshalb resp. mit β und γ multiplicirt und hierauf addirt, mit Anwendung der Relationen (D):

$$(\alpha''\gamma-\alpha'\beta)F-(\alpha\beta+\alpha')G+(\alpha\gamma+\alpha'')H+\alpha'\gamma m-\alpha''\beta n=0.$$

Hierin ist vermöge (D) der Coefficient von F,

$$=\gamma''\alpha-\beta'-\alpha\beta'+\gamma''=(1+\alpha)(\gamma''-\beta').$$

Multiplicirt man daher noch die erste der Gleichungen (5) mit $1+\alpha$ und addirt sie zu der letztgefundenen, so geht F heraus, und man bekommt nach gehöriger Reduction mittelst (D):

---

wo m eine für alle diese Gleichungen unveränderliche Zahl ist. Um sie zu bestimmen, nehme man etwa die drei letzten Gleichungen von (D):

$$\beta\gamma'-\beta'\gamma=m\alpha'',\quad \gamma\alpha'-\gamma'\alpha=m\beta'',\quad \alpha\beta'-\alpha'\beta=m\gamma'',$$

und addire ihre Quadrate, so kommt nach leichter Transformation:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2=m^2(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2),$$

eine Gleichung, die sich vermöge der Gleichungen (C) und der dritten von (A) auf

$$1=m^2$$

reducirt; folglich entweder immer $m=+1$, oder immer $m=-1$.

Ueber die Wahl zwischen diesen beiden Werthen von m entscheidet der Umstand, dass die zwei Axensysteme, deren gegenseitige Lage durch α, β, ... γ'' bestimmt wird, anfangs zusammenfallen sollen, die positiven Axen der x, y, z des einen mit den gleichnamigen positiven Axen des andern. Bei dem Zusammenfallen beider Systeme ist aber offenbar $\alpha=\beta'=\gamma''=1$, und jeder der sechs übrigen Cosinuse $=0$. Substituirt man diese Werthe von α, ... γ'' in die erste der Gleichungen (D): $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'=m\alpha$, so erhält man $m=+1$. Die Gleichungen (D), wie sie oben geschrieben sind, haben daher ihre Richtigkeit.

Hätte das eine Axensystem gegen das andere eine solche Lage, dass sie beide nicht zur Coincidenz gebracht werden könnten, sondern dass, wenn z. B. die positiven Axen der x und y des einen in die positiven Axen der x und y des andern fielen, die positiven Axen der z einander entgegengesetzt wären, so würde man, wie sich auf gleiche Art zeigen lässt, $m=-1$ zu nehmen haben.

$$(\beta-\alpha')G+(\alpha''-\gamma)H+(\beta''-\gamma')(m+n)=0;$$

und eben so findet sich

$$(\gamma'-\beta'')H+(\beta-\alpha')F+(\gamma-\alpha'')(n+l)=0,$$

$$(\alpha''-\gamma)F+(\gamma'-\beta'')G+(\alpha'-\beta)(l+m)=0,$$

nachdem man die Gleichungen (5) das einemal mit α', $1+\beta'$, γ', das anderemal mit α'', β'', $1+\gamma''$ multiplicirt und sie hierauf beidemale addirt hat.

Man setze nun noch zur Abkürzung:

$$(6)\quad \gamma'-\beta''=\varphi\tau,\ \alpha''-\gamma=\chi\tau,\ \beta-\alpha'=\psi\tau;$$

$$(7)\ \begin{cases} m+n=\Sigma(yY+zZ)=f, \\ n+l=\Sigma(zZ+xX)=g, \\ l+m=\Sigma(xX+yY)=h, \end{cases}$$

so werden die eben erhaltenen drei Gleichungen

$$(8)\ \begin{cases} \psi G+\chi H=\varphi f, \\ \varphi H+\psi F=\chi g, \\ \chi F+\varphi G=\psi h. \end{cases}$$

Dies sind demnach die Gleichungen, welche die Stelle von (5) oder (3) vertreten können, also die Bedingungen, unter denen auch nach der Verrückung des Körpers Gleichgewicht noch statt findet. In ihnen sind F, G, H, f, g, h nach (4) und (7) durch die Richtungen und Intensitäten der sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte und durch die anfänglichen Coordinaten ihrer Angriffspunkte gegeben; die Verhältnisse zwischen φ, χ, ψ aber sind nach (6) durch die Lage des Körpers nach der Verrückung gegen seine anfängliche Lage bestimmt.

§. 128.

Die Verhältnissgrössen φ, χ, ψ haben hier eine noch besonders merkwürdige Bedeutung. Addirt man nämlich die Gleichungen (6), nachdem man sie vorher resp. mit α, β, γ multiplicirt hat, so kommt mit abermaliger Anwendung von (D):

$$\alpha\varphi\tau + \beta\chi\tau + \gamma\psi\tau = \gamma' - \beta'' = \varphi\tau, \text{ d. i.}$$

$$(9)\ \begin{cases} \alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi = \varphi, \text{ und ähnlicherweise} \\ \alpha'\varphi + \beta'\chi + \gamma'\psi = \chi, \\ \alpha''\varphi + \beta''\chi + \gamma''\psi = \psi. \end{cases}$$

Man bestimme nun die in (6) bis jetzt beliebig zu nehmende Grösse τ so, dass

$$(10)\quad \tau^2 = (\gamma' - \beta'')^2 + (\alpha'' - \gamma)^2 + (\beta - \alpha')^2.$$

Hierdurch wird

$$(11)\quad \varphi^2 + \chi^2 + \psi^2 = 1,$$

nd man kann nunmehr φ, χ, ψ als die Cosinus dreier inkel betrachten, welche eine Gerade p mit den drei xen des ersten Coordinatensystems macht. Weil α, β, γ ie Cosinus der Winkel der Axe der x des zweiten ystems mit den drei Axen des ersten sind, so ist $\varphi + \beta\chi + \gamma\psi$ der Cosinus des Winkels, den die Gerade mit der Axe der x des zweiten Systems macht. Dieser Cosinus ist aber zufolge der ersten Gleichung in 9) $= \varphi$; d. h. die Gerade p macht mit der Axe der x s zweiten Systems denselben Winkel, als mit der e der x des ersten. Auf gleiche Art erkennt man s der zweiten der Gleichungen (9), dass p mit den xen der y, und aus der dritten, dass p mit den Axen r z beider Systeme einerlei Winkel macht.

Nimmt man daher an, dass beide Systeme einen meinschaftlichen Anfangspunkt haben, so giebt es mer eine durch denselben gehende, durch φ, χ, ψ stimmte Gerade p, welche gegen beide Systeme einerlei Lage hat.*)

*) Der Entdecker dieses merkwürdigen Satzes ist Euler. Siehe sen Abhandlung: *Formulae generales pro translatione quacunque corrum rigidorum* in *Nov. Comment. Petrop. Tom.* XX., wo der Satz r einfach durch eine geometrische Construction bewiesen ist.

§. 129.

Man denke sich um den gemeinschaftlichen Anfangspunkt beider Systeme mit einem beliebigen Halbmesser eine Kugelfläche beschrieben. Werde diese von den Axen der x, y, z des ersten und zweiten Systems resp. in $A_{\prime}$, $B_{\prime}$, $C_{\prime}$ und A, B, C, und von p in P (Fig. 41.) getroffen, so sind zu Folge des Erwiesenen die Bögen $PA_{\prime} = PA$, $PB_{\prime} = PB$, $PC_{\prime} = PC$, und daher die sphärischen Dreiecke $B_{\prime}PC_{\prime}$, $C_{\prime}PA_{\prime}$, $A_{\prime}PB_{\prime}$ resp. gleich und ähnlich den Dreiecken BPC, CPA, APB. Hieraus folgt leicht weiter, dass die drei Winkel $A_{\prime}PA$, $B_{\prime}PB$, $C_{\prime}PC$ einander gleich sind, und dass mithin das eine System durch blosse Drehung um die Gerade p um einen Winkel $= A_{\prime}PA =$ etc. mit dem andern zur Deckung gebracht werden kann.

Die Grösse dieses Winkels muss sich ebenfalls durch $\alpha, \ldots \gamma''$ ausdrücken lassen. In der That hat man in dem sphärischen Dreiecke $A_{\prime}PA$:

$$\cos A_{\prime}A = \cos PA_{\prime} \cos PA + \sin PA_{\prime} \sin PA \cos A_{\prime}PA,$$

mithin, weil $\cos A_{\prime}A = \alpha$, $\cos PA_{\prime} = \cos PA = \varphi$, und wenn man den Cosinus von $A_{\prime}PA =$ etc. mit σ bezeichnet:

$$(12) \quad \alpha = \varphi^2 + (1 - \varphi^2)\sigma,$$

worin man nur noch, mittelst (6) und (10), φ durch $\alpha, \ldots \gamma''$ auszudrücken hat. Um aber einen symmetrischen Ausdruck für σ zu erhalten, entwickle man seinen Werth auf gleiche Weise durch Betrachtung der Dreiecke $B_{\prime}PB$, $C_{\prime}PC$, und es kommt:

$$(12) \begin{cases} \beta' = \chi^2 + (1 - \chi^2)\sigma, \\ \gamma'' = \psi^2 + (1 - \psi^2)\sigma; \end{cases}$$

mithin wenn man diese zwei Gleichungen zu der vorigen addirt, und mit Berücksichtigung von (11):

$$(13) \quad \alpha + \beta' + \gamma'' = 1 + 2\sigma.$$

— Der Werth von σ hängt auf eine sehr einfache Weise mit der Hülfsgrösse τ zusammen. Es ist nämlich zufolge der Gleichungen (C):

$$\gamma'^2+\beta''^2=1+\alpha^2-\beta'^2-\gamma''^2,$$

und nach (D): $-2\gamma'\beta''=2\alpha-2\beta'\gamma''$.

Hiermit wird:

$$(\gamma'-\beta'')^2=(1+\alpha+\beta'+\gamma'')(1+\alpha-\beta'-\gamma'')$$
$$=4(1+\sigma)(\alpha-\sigma), \text{ und eben so}$$
$$(\alpha''-\gamma)^2=4(1+\sigma)(\beta'-\sigma),$$
$$(\beta-\alpha')^2=4(1+\sigma)(\gamma''-\sigma);$$

folglich nach (10) und (13):

$$(14)\quad \tau^2=4(1+\sigma)(1-\sigma)=4\sin A,PA'^2.$$

So wie daher φ, χ, ψ die Cosinus der Winkel der Drehungsaxe mit den Axen der Coordinaten sind, so ist $\frac{1}{2}\tau$ der Sinus des Winkels selbst, um welchen das System gedreht worden.*)

§. 130.

Um den Körper aus seiner anfänglichen in die nachherige durch a, b, c $\alpha, \beta, \ldots \gamma''$ bestimmte Lage zu

---

*) Mittelst der 9 Gleichungen (6), (9) und (12) lassen sich umgekehrt sämmtliche neun zur gegenseitigen Verwandlung der Coordinaten dienende Cosinus $\alpha, \ldots \gamma''$ durch σ oder $\tau=2\sqrt{1-\sigma^2}$ und φ, χ, ψ ausdrücken. Die Werthe von α, β', γ'' geben die Gleichungen (12) unmittelbar. Die Werthe der übrigen finden sich nach leichter Rechnung:

$$\beta''=(1-\sigma)\chi\psi-\tfrac{1}{2}\tau\varphi,\quad \gamma'=(1-\sigma)\chi\psi+\tfrac{1}{2}\tau\varphi,$$
$$\gamma=(1-\sigma)\psi\varphi-\tfrac{1}{2}\tau\chi,\quad \alpha''=(1-\sigma)\psi\varphi+\tfrac{1}{2}\tau\chi,$$
$$\alpha'=(1-\sigma)\varphi\chi-\tfrac{1}{2}\tau\psi,\quad \beta=(1-\sigma)\varphi\chi+\tfrac{1}{2}\tau\psi.$$

Diese Formeln sind gleichfalls von Euler gefunden worden. *Nov. Comment. Petrop.* Tom. XX. *Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi.* §. 22. Vergl. Crelle's Journal II. Band II. Heft, S. [illegible]: *Euleri formulae de transformatione coordinatorum* von Jacobi; dasselbe Journ. VIII. Bd. II. Heft S. 153: Grunert *über die Verwandlung der Coordinaten im Raume.*

bringen, kann man auch so verfahren, dass man ihn zuerst parallel mit sich fortbewegt, bis in Bezug auf das erste im Raume unveränderliche Coordinatensystem der im Anfangspunkte desselben befindliche Punkt des Körpers nach (a, b, c) kommt, und dass man zweitens den Körper um diesen Punkt dreht, bis die Coordinatenaxen die durch $\alpha, \beta, \ldots \gamma''$ bestimmten Richtungen erhalten. Dieses letztere aber lässt sich, wie wir so eben gesehen haben, immer dadurch bewerkstelligen, dass man den Körper um eine durch den Punkt gehende, durch φ, χ, ψ ihrer Richtung nach bestimmte, Axe um einen Winkel dreht, dessen Sinus $= \frac{1}{2} r$ ist. Jede Verrückung eines Körpers kann daher als zusammengesetzt aus einer parallelen Fortbewegung und aus einer Drehung um eine gewisse Axe betrachtet werden. Durch die parallele Bewegung wird aber das anfängliche Gleichgewicht nicht aufgehoben, indem die Coordinaten a, b, c aus den Bedingungsgleichungen (5) oder (8) für die Fortdauer des Gleichgewichts herausgegangen sind, und wie auch schon daraus erhellet, dass jede Kraft parallel mit ihrer anfänglichen Richtung auf denselben Punkt des Körpers fortwirken soll. Bei der Untersuchung über die Fortdauer des Gleichgewichts kommen daher bloss die Werthe von $\alpha, \ldots \gamma''$ oder die Winkel in Betracht, welche die Coordinatenaxen in ihrer neuen Lage mit den Axen in der alten Lage bilden, und diese Winkel nicht einmal vollständig, sondern zufolge der Gleichungen (8) bloss die durch die Winkel bestimmte Axe der Drehung.

Sind daher zwei nicht parallele Lagen des Körpers gegeben, in deren jeder Gleichgewicht statt findet, so lassen sich daraus noch unzählige andere Lagen finden, welche denselben Zweck erfüllen. Indem man nämlich

mit dem Körper ein rechtwinkliges Coordinatensystem fest verbindet und die zwei Lagen desselben, welche es bei den zwei verschiedenen Lagen des Körpers hat, mit einander vergleicht, ergeben sich die Werthe von $a, \ldots \gamma''$, und aus diesen nach (10) und (6) die Werthe von τ, φ, χ, ψ, von denen die drei letzten wegen des Gleichgewichts den drei nothwendigen Bedingungsgleichungen (8) Genüge leisten werden. Da diese Gleichungen aber auch hinreichend sind, so wird mit Beibehaltung von φ, χ, ψ und beliebig anderer Annahme von τ das Gleichgewicht noch bestehen; oder mit andern Worten:

Zu zwei einander nicht parallelen Lagen eines Körpers lässt sich immer eine Richtung finden, so dass der Körper durch Drehung um eine mit dieser Richtung parallele Axe aus der einen Lage in eine mit der andern parallele Lage gebracht werden kann; und wenn der Körper in jeder dieser beiden Lagen im Gleichgewichte ist, so ist er es auch in jeder dritten, in welche er durch weitere Drehung um jene Axe und durch parallele Fortbewegung versetzt wird.

Ein Fall, dessen wir hierbei noch besonders gedenken müssen, ist der, wenn zugleich

$$\gamma' = \beta'', \; \alpha'' = \gamma, \; \beta = \alpha'$$

ist. Alsdann bleiben die Verhältnisse zwischen φ, χ, ψ nach den Formeln (6) unbestimmt, τ oder der doppelte Sinus des Drehungswinkels wird $=0$, und daher dieser Winkel selbst entweder $=0$, oder $=180°$. Im erstern Falle sind die beiden Lagen des Körpers, wo nicht identisch, doch mit einander parallel. Im letztern hat zwar eine Drehung statt gefunden, auch lassen sich dann die Werthe von φ, χ, ψ mittelst der Formeln (12)

bestimmen, indem σ, als der Cosinus des Drehungswinkels, $=-1$, und damit

$$\varphi^2=\tfrac{1}{2}(1+\alpha),\ \chi^2=\tfrac{1}{2}(1+\beta'),\ \psi^2=\tfrac{1}{2}(1+\gamma'')$$

werden. Da aber τ in den Formeln (6) jetzt nicht mehr unbestimmt bleibt, so kann aus dem anfänglichen Gleichgewichte und dem Gleichgewichte nach einer Drehung um 180° noch nicht auf das Gleichgewicht nach einer Drehung um dieselbe Axe um irgend einen andern Winkel geschlossen werden.

§. 131.

Wenn das Gleichgewicht zwischen mehrern auf einen Körper wirkenden Kräften durch Drehung des Körpers um eine gewisse Axe nicht aufgehoben wird, so wollen wir die Axe eine Axe des Gleichgewichts nennen. Jede mit einer solchen parallele Axe ist bei einem frei beweglichen Körper, den wir bisher allein in Betrachtung nahmen, ebenfalls eine Axe des Gleichgewichts, da ihre Lage bloss durch die Winkel, welche sie mit den Coordinatenaxen bildet, bestimmt wird. Doch wollen wir der Kürze wegen von diesem Systeme paralleler Axen, als wie von einer einzigen, sprechen, und unter der einen, welche genannt wird, die übrigen ihr parallelen zugleich mit verstehen.

Nicht bei jedem Systeme von Kräften, welche an einem frei beweglichen Körper im Gleichgewichte sind, giebt es eine Axe des Gleichgewichts. Denn aus der zweiten und dritten der Gleichungen (8) folgt:

$$(15)\quad \varphi:\chi:\psi=gh-F^2:FG+Hh:HF+Gg,$$

und wenn man diese Verhältnisswerthe von φ, χ, ψ in der ersten jener Gleichungen substituirt:

$$(16)\quad 2FGH+F^2f+G^2g+H^2h-fgh=0.$$

Dies ist demnach die Bedingungsgleichung, unter welcher eine Gleichgewichtsaxe statt findet. Wird sie erfüllt, so erhält man aus (15) die Verhältnisse zwischen χ, ψ, und damit die Winkel, welche die Gleichgewichtsaxe mit den Axen der Coordinaten macht.

§. 132.

Soll ein System von Kräften, welche im Gleichgewichte sind, eine Gleichgewichtsaxe von einer durch χ, ψ gegebenen Richtung haben, so müssen die drei Gleichungen (8) einzeln erfüllt werden.

Werde z. B. gefordert, dass die Axe der x eine Gleichgewichtsaxe sey. Alsdann sind φ und $\chi = 0$, und die drei Gleichungen ziehen sich zusammen in:

$$G = 0,\ F = 0,\ h = 0,$$

d. i. $\Sigma xZ = 0$, $\Sigma yZ = 0$, $\Sigma(xX + yY) = 0$.

Die zwei ersten dieser Gleichungen geben, in Verbindung mit der wegen des anfänglichen Gleichgewichts nöthigen Gleichung $\Sigma Z = 0$, zu erkennen (§. 73. Zus.), dass, wenn man jede Kraft an ihrem Angriffspunkte in zwei zerlegt, von denen die eine parallel mit der Ebene der x, y, die andere parallel mit der Axe der x ist, die mit der Axe der x parallelen Kräfte für sich im Gleichgewichte seyn müssen. Die dritte Gleichung, in Verbindung mit den Gleichungen $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma(xY - yX) = 0$, deutet an (§. 122.), dass, wenn die Kräfte auf die Ebene der x, y projicirt werden, das Gleichgewicht zwischen diesen Projectionen durch Drehung des Körpers um die Axe der x, als wodurch die Ebene der x, y in sich selbst gedreht wird, nicht aufgehoben werden darf. Wir können daher auch sagen:

Zur Fortdauer des Gleichgewichts, wenn der Körper, auf welchen die Kräfte wirken, um eine Axe gedreht wird, ist es nöthig und hinreichend, dass erstens die Projectionen der Kräfte auf Linien, welche man parallel mit der Axe durch die Angriffspunkte der Kräfte legt, für sich im Gleichgewichte sind, und dass zweitens das Gleichgewicht zwischen den Projectionen der Kräfte auf eine die Axe rechtwinklich schneidende Ebene bei der Drehung nicht aufhört.

§. 133.

Dass diese zwei Bedingungen die einzig nothwendigen zum Fortbestehen des Gleichgewichts sind, lässt sich ohne Zuhülfenahme der vorhergehenden Rechnung auch folgendergestalt sehr anschaulich durch Construction darthun.

Sey AB (Fig. 42.) die Drehungsaxe, welche man sich vertical denke; MN eine darauf normal gesetzte, also horizontale, Ebene. PQ sey eine der Kräfte des Systems und P ihr Angriffspunkt, so wie auch in dem Folgenden bei Darstellung einer Kraft durch eine gerade Linie der in dem Ausdrucke der Linie zuerst gesetzte Buchstabe immer den Angriffspunkt bezeichne.

Sey TU die rechtwinklige Projection von PQ auf MN, und PR, QS zwei Perpendikel von P, Q auf QU, PT. Man verlängere noch UT bis O, so dass $TO = UT$. Alsdann ist, auch bei beliebiger Verrückung des Körpers, die Kraft PQ gleichwirkend mit den an den Punkten P, T des Körpers angebrachten Kräften PR, PS, TU, TO, d.i. mit den Kräften TU, PS und dem Paare PR, TO.

Man verfahre auf gleiche Art mit jeder der übrigen Kräfte des Systems und zerlege es somit in drei andere

Systeme: in ein System *H*, dessen Kräfte *TU*,... in der horizontalen Ebene *MN* liegen, in ein System *V* von verticalen Kräften *PS*,... und in ein System *W*, aus Paaren *PR*, *TO*;... in verticalen Ebenen bestehend. Da nun *H*, *V*, *W* zusammen im Gleichgewichte seyn sollen, und die einfache horizontale Kraft oder das horizontale Paar, worauf sich *H* reduciren könnte, mit der einfachen verticalen Kraft oder dem verticalen Paare, worauf sich *V* und *W* in Verbindung zurückführen lassen könnten, nicht im Gleichgewichte seyn kann, so müssen *H* für sich und *V* und *W* zusammen für sich im Gleichgewichte seyn; also muss entweder *V* und *W*, jedes besonders, im Gleichgewichte seyn, oder *V* muss sich auf ein dem *W* gleiches und entgegengesetztes Paar reduciren lassen.

Man denke sich jetzt den Körper um die Axe *AB* um einen beliebigen Winkel gedreht, während die Kräfte *PQ*,... auf die Punkte *P*,..., oder, was dasselbe ist, die Kräfte *TU*, *PS*, *PR* und *TO*, etc. auf die Punkte *P* und *T*, etc. des Körpers, parallel mit ihren anfänglichen Richtungen, zu wirken fortfahren. Die Kräfte von *H* bleiben dabei in der horizontalen Ebene *MN*, die Kräfte von *V* bleiben vertical, und eben so wenig wird die Verticalität der Ebenen der Paare von *W* geändert. Da nun auch jetzt noch zwischen *H*, *V*, *W* Gleichgewicht herrschen soll, so muss, wie vorhin, *H* für sich im Gleichgewichte seyn, welches die zweite der obigen Bedingungen giebt: dass nämlich zwischen den Projectionen der Käfte auf eine die Drehungsaxe rechtwinklich schneidende Ebene bei Drehung der Ebene in sich selbst das Gleichgewicht besonders fortbestehe.

Ferner muss, wie vorhin, das System *V* entweder

für sich im Gleichgewichte seyn, oder ein dem W das Gleichgewicht haltendes Paar zur Resultante haben. Bei Drehung des Körpers um AB haben aber die mit AB parallelen Kräfte PS,..., aus denen V zusammengesetzt ist, ihre Lage gegen den Körper unverändert behalten. Je nachdem daher V anfangs im Gleichgewichte war, oder sich auf ein Paar reducirte, wird es auch jetzt noch im Gleichgewichte seyn, oder mit einem Paare gleiche Wirkung haben, dessen Moment dem des erstern Paares gleich ist, dessen Ebene aber mit der Ebene des erstern Paares einen dem Drehungswinkel gleichen Winkel macht.

Anders verhält es sich mit dem Systeme W der Paare PR und TO, etc. Die verticale Ebene eines jeden derselben bleibt bei der Drehung sich selbst parallel, mithin bleibt auch die Wirkung jedes Paares ungeändert (§. 50.); und je nachdem W anfänglich im Gleichgewichte war, oder sich auf ein Paar reducirte, wird es auch jetzt noch im Gleichgewichte, oder mit demselben, auch seiner Lage nach unverändert gebliebenen, Paare gleichwirkend seyn.

Hieraus folgt nun unmittelbar, dass jedes der beiden Systeme V und W für sich im Gleichgewichte seyn muss, indem sonst, wenn sie anfangs auf zwei sich das Gleichgewicht haltende Paare sich reducirt hätten, bei der Drehung des Körpers das von V herrührende Paar sich mit gedreht hätte, die Ebene des andern aber sich parallel geblieben, und somit das Gleichgewicht aufgehoben worden wäre. Das Gleichgewicht von V, oder das Gleichgewicht zwischen den nach Parallelen mit der Axe geschätzten Kräften des Systems ist demnach die zweite, oben zuerst genannte, Bedingung für die Fortdauer des Gleichgewichts,

und, da hiervon das Gleichgewicht des Systems W eine nothwendige Folge ist, keine dritte Bedingung weiter erforderlich.

— Wir nahmen bei dieser Beweisführung den Drehungswinkel beliebig an. Ist er gerade $=180°$, so kommen die horizontalen Kräfte des Systems H in Bezug auf den Körper in eine ihrer anfänglichen direct entgegengesetzte Lage und sind daher, so wie anfangs, auch jetzt wieder im Gleichgewichte. Damit also nach einer Drehung um 180° noch Gleichgewicht statt finde, ist es nur nöthig, dass das System V oder die nach der Drehungsaxe geschätzten Kräfte des Systems unter sich im Gleichgewichte sind. — Daraus also, dass nach einer Drehung um 180° das Gleichgewicht noch besteht, kann noch nicht auf die Fortdauer desselben bei irgend einem andern Drehungswinkel geschlossen werden. (§. 130. zu Ende.)

§. 134.

Eben so wie $F=0$, $G=0$, $h=0$ die Bedingungen sind, unter denen die Axe der z eine Axe des Gleichgewichts ist, so drücken $G=0$, $H=0$, $f=0$ die Bedingungen aus, unter welchen der Körper, ohne das Gleichgewicht zu verlieren, um die Axe der x gedreht werden kann. Sind daher F, G, H, f, h zugleich $=0$, so sind sowohl die Axe der z, als die der x, und alle mit ihnen parallelen Axen, und nicht allein diese, sondern auch alle mit der Ebene der z, x überhaupt parallelen Axen, Axen des Gleichgewichts. Denn für jede dieser Axen ist $\chi=0$, und mit den sechs Gleichungen $F, G, H, f, h, \chi=0$ wird den drei Gleichungen (8) Genüge geleistet. Wenn folglich von zwei Axen, welche einen rechten Winkel mit einander

machen, eine jede eine Gleichgewichtsaxe ist, so ist es auch jede andere, welche mit der Ebene des Winkels parallel läuft.

Um die Sache allgemeiner zu untersuchen, seyen irgend zwei einander nicht parallele, durch φ, χ, ψ und φ', χ', ψ' bestimmte Axen Gleichgewichtsaxen zugleich. Alsdann muss seyn:

$$(8) \quad \begin{cases} -\varphi f + \chi H + \psi G = 0, \\ \varphi H - \chi g + \psi F = 0, \\ \varphi G + \chi F - \psi h = 0, \end{cases} \quad \text{und}$$

$$(8^*) \quad \begin{cases} -\varphi' f + \chi' H + \psi' G = 0, \\ \varphi' H - \chi' g + \psi' F = 0, \\ \varphi' G + \chi' F - \psi' h = 0. \end{cases}$$

Es folgt aber, wenn man zur Abkürzung

$$\chi\psi' - \chi'\psi = p, \quad \psi\varphi' - \psi'\varphi = q, \quad \varphi\chi' - \varphi'\chi = r$$

setzt und die erste Gleichung in (8) mit der ersten in (8*) verbindet:

$$-f : H : G = p : q : r,$$

und eben so durch Verbindung der zweiten und dritten Gleichung in (8) mit der zweiten und dritten in (8*):

$$H : -g : F = p : q : r,$$
$$G : F : -h = p : q : r.$$

Eliminirt man hieraus die Grössen p, q, r, von denen höchstens nur eine $= 0$ seyn kann, indem sonst die beiden Gleichgewichtsaxen einander parallel oder identisch wären, so erhält man nicht mehr, als folgende drei von einander unabhängige Gleichungen:

$$fF + GH = 0, \quad gG + HF = 0, \quad hH + FG = 0.$$

Dies sind demnach die Bedingungsgleichungen, bei denen zwei Gleichgewichtsaxen zugleich vorhanden sind. Eliminirt man aber damit f, g, h aus (8) oder (8*), so erhält man jedesmal dieselbe Gleichung:

$$\frac{\varphi}{F}+\frac{\chi}{G}+\frac{\psi}{H}=0, \text{ oder } \frac{\psi'}{F}+\ldots=0,$$

als die einzige jetzt zwischen den φ, χ, ψ der einen und andern Gleichgewichtsaxe zu erfüllende Relation. Dieser Gleichung leisten aber nicht bloss die vorigen zwei, sondern auch alle diejenigen Gleichgewichtsaxen Genüge, welche parallel mit der Ebene sind, deren Gleichung

$$\frac{x}{F}+\frac{y}{G}+\frac{z}{H}=0 \text{ ist.}$$

Giebt es daher bei einem Körper, welcher im Gleichgewichte ist, zwei einander nicht parallele Gleichgewichtsaxen, so sind es auch noch alle diejenigen, welche mit erstern beiden einer und derselben Ebene parallel laufen.

Hieraus ist leicht weiter zu folgern, *dass, wenn ein Körper drei Gleichgewichtsaxen a, b, c hat, welche, nicht einer und derselben Ebene parallel sind, auch jede vierte Axe d eine Gleichgewichtsaxe ist.* Denn denken wir uns sämmtliche Axen durch einen und denselben Punkt gehend (§. 181.), und werde dann eine durch *a* und *b* gelegte Ebene von der Ebene durch *c* und *d* in der Geraden *e* geschnitten, so dass *e* mit *a* und *b* in einer Ebene ist, und desgleichen *d* mit *c* und *e*. Da nun *a* und *b* Gleichgewichtsaxen sind, so muss auch *e* eine solche seyn; und weil *e* und *c* es sind, so muss es auch *d* seyn. — Wir können den hiermit bewiesenen Satz auch so ausdrücken: Ist ein Körper im Gleichgewichte, und wird dieses durch drei verschiedene Verrückungen nicht aufgehoben, so dauert es im Allgemeinen auch bei jeder vierten Verrückung fort; oder mit noch andern Worten:

Ist ein Körper in vier verschiedenen Lagen im Gleichgewichte, so ist er es im Allgemeinen auch in

jeder fünften. — Uebrigens ist dann, wie man leicht findet, jede der sechs Grössen F, G, H, f, g, h einzeln $=0$.

§. 135.

Ein im Gleichgewichte befindlicher Körper hat im Allgemeinen keine Axe des Gleichgewichts, da zum Vorhandenseyn einer solchen Axe die Erfüllung der Bedingungsgleichung (16) erfordert wird. Indessen ist es doch immer möglich, zu den sie anfangs das Gleichgewicht haltenden Kräften zwei neue das Gleichgewicht nicht störende Kräfte hinzufügen, welche eben so, wie die schon vorhandenen, auf bestimmte Punkte des Körpers, mit parallel bleibenden Richtungen wirken, und wodurch es geschieht, dass der Körper eine Gleichgewichtsaxe von gegebener Richtung erhält.

Denn seyen P_1 und P_2, oder wenn wir sie nach den drei Coordinatenaxen zerlegen, (X_1, Y_1, Z_1) und (X_2, Y_2, Z_2) die zwei neuen Kräfte; A_1 und A_2, oder $(x_1\ y_1, z_1)$ und (x_2, y_2, z_2) ihre Angriffspunkte. Da das anfängliche Gleichgewicht des Körpers durch Hinzufügung dieser zwei Kräfte nicht aufgehoben werden soll, so müssen letztere zu Anfange einander ebenfalls das Gleichgewicht halten. Mithin muss seyn (§. 66.):

$$X_1 + X_2 = 0,\ Y_1 + Y_2 = 0,\ Z_1 + Z_2 = 0,$$
$$y_1 Z_1 + y_2 Z_2 = z_1 Y_1 + z_2 Y_2, \text{ etc.}$$

und wenn wir X_1, Y_1, Z_1 hieraus eliminiren:

$$(y_2 - y_1) Z_2 = (z_2 - z_1) Y_2,$$
$$(z_2 - z_1) X_2 = (x_2 - x_1) Z_2, \text{ etc.}$$

folglich, wenn wir noch die von A_1 bis A_2 gezogene Gerade $= r$, die Cosinus der Winkel dieser Geraden mit den Coordinatenaxen $= \lambda, \mu, \nu$, und daher

$$x_2 - x_1 = r\lambda,\ y_2 - y_1 = r\mu,\ z_2 - z_1 = r\nu$$

setzen:

$$X_2 : Y_2 : Z_2 = \lambda : \mu : \nu.$$

Mithin wirkt P_2 in der Linie r, wie schon aus dem VIII. Grundsatze in §. 14. fliesst, und es ist, wenn wir diese Kraft positiv annehmen, sobald sie nach der Richtung $A_1 A_2$ wirkt, also den Punkt A_2 von A_1 zu entfernen strebt:

$$X_2 = P_2\lambda,\ Y_2 = P_2\mu,\ Z_2 = P_2\nu.$$

Hiermit haben wir in unserm Systeme von Kräften über sieben neue Grössen: x_1, y_1, z_1, r, P_2 und die zwei Verhältnisse zwischen λ, μ, ν, zu verfügen, und werden diese Grössen auf unendlich viele Arten so bestimmen können, dass den drei Gleichungen (8), in denen φ, χ, ψ als gegeben anzusehen sind, Genüge geschieht. Die Rechnung hierzu, deren Ergebniss uns im nächsten Capitel von besonderem Nutzen seyn wird, ist folgende.

Heissen $F', G', H', f', g' h'$ die Werthe, welche $F, G, \ldots h$ erhalten, sobald noch die Kräfte P_1 und P_2 zu dem gegebenen Systeme hinzugefügt werden, und es ist zufolge der Gleichungen (4):

$$F' = F + y_1 Z_1 + y_2 Z_2$$
$$= F + (y_2 - y_1) Z_2 = F + rP_2\mu\nu,$$

und wenn noch der Kürze willen

$$(a) \ldots rP_2 = Q$$

gesetzt wird:

$$F' = F + Q\mu\nu, \text{ und eben so}$$
$$G' = G + Q\nu\lambda,\ H' = H + Q\lambda\mu.$$
$$f' = f + y_1 Y_1 + y_2 Y_2 + z_1 Z_1 + z_2 Z_2$$
$$= f + (y_2 - y_1) Y_2 + (z_2 - z_1) Z_2,$$
$$\text{d. i. } f' = f + Q(\mu^2 + \nu^2), \text{ und eben so}$$
$$g' = g + Q(\nu^2 + \lambda^2),\ h' = h + Q(\lambda^2 + \mu^2).$$

Soll nun das jetzt um P_1 und P_2 vermehrte und durch $F', G', \ldots h'$ bestimmte System eine durch

φ, χ, ψ gegebene Axe des Gleichgewichts haben, so muss seyn (8):

$$G'\psi + H'\chi - f'\varphi = 0,$$
$$H'\varphi + F'\psi - g'\chi = 0,$$
$$F'\chi + G'\varphi - h'\psi = 0.$$

Substituirt man hierin die für $F', \ldots h'$ erhaltenen Werthe, so wird die erste dieser Gleichungen:

$$G\psi + H\chi - f\varphi = Q\,[\varphi\,(\mu^2 + \nu^2) - \lambda\,(\mu\chi + \nu\psi)]$$
$$= Q\,(\varphi - \varkappa\lambda),$$

weil (*b*) $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ ist, und wenn man

(*c*) $\lambda\varphi + \mu\chi + \nu\psi = \varkappa$ setzt.

Eben so verwandeln sich die beiden andern Gleichungen in:

$$H\varphi + F\psi - g\chi = Q\,(\chi - \varkappa\mu),$$
$$F\chi + G\varphi - h\psi = Q\,(\psi - \varkappa\nu),$$

Um diese Formeln und die nachfolgende Rechnung noch mehr abzukürzen, setze man die als bekannt anzusehenden Grössen

$$(d)\quad \begin{cases} G\psi + H\chi - f\varphi = D\alpha, \\ H\varphi + F\psi - g\chi = D\beta, \\ F\chi + G\varphi - h\psi = D\gamma, \text{ und} \end{cases}$$

$$(e)\quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

wobei aus (*d*) die Verhältnisse zwischen α, β, γ, und hieraus in Verbindung mit (*e*) diese Grössen selbst, so wie auch D, sich finden lassen.

Die drei Bedingungsgleichungen werden damit:

$$(f)\quad \begin{cases} D\alpha = Q\,(\varphi - \varkappa\lambda), \\ D\beta = Q\,(\chi - \varkappa\mu), \\ D\gamma = Q\,(\psi - \varkappa\nu). \end{cases}$$

Aus den fünf Gleichungen (*b*), (*c*), (*f*) muss man nun die Werthe der eben so viel Unbekannten λ, μ, ν, $\varkappa$, Q zu bestimmen suchen. Zu dem Ende multiplicire man die

drei Gleichungen (f) resp. mit φ, χ, ψ und addire sie hierauf, so kommt mit Berücksichtigung von (11) und (c):

$$D(\alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi) = Q(1 - x^2).$$

Eben so folgt mit Rücksicht auf (b) und (c), wenn man die Gleichungen (f), nach vorausgegangener Multiplication mit λ, μ, ν, addirt, und D nicht $= 0$ annimmt, indem sonst die drei Grössen $G\psi + H\chi - f\varphi$, etc. in (d) null wären, mithin das System die durch φ, χ, ψ gegebene Axe zur Gleichgewichtsaxe schon hätte und keine neuen Kräfte deshalb hinzuzufügen nöthig wären:

$$(g) \quad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0.$$

Addirt man endlich die Gleichungen (f), nachdem man sie mit α, β, γ multiplicirt hat, so kommt mit Rücksicht auf (e) und (g):

$$D = Q(\alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi).$$

Hieraus fliesst sogleich:

$$(h) \quad Q = \frac{D}{\alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi},$$

$$(i) \quad 1 - x^2 = (\alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi)^2,$$

oder, weil $1 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2)$ ist:

$$(i^*) \quad x^2 = (\beta\psi - \gamma\chi)^2 + (\gamma\varphi - \alpha\psi)^2 + (\alpha\chi - \beta\varphi)^2.$$

Die Werthe von λ, μ, ν ergeben sich dann aus (f), nämlich

$$(k) \quad \lambda = \frac{Q\varphi - D\alpha}{Qx} = \frac{\varphi - \alpha(\alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi)}{x}, \text{ u. s. w.}$$

Somit ist unsere Aufgabe: Zu einem durch $F, \ldots h$ gegebenen Systeme von Kräften, welche sich das Gleichgewicht halten, zwei neue Kräfte hinzuzufügen, wodurch das System eine durch φ, χ, ψ ihrer Richtung nach gegebene Axe des Gleichgewichts erhält, als gelöst zu betrachten.

Aus $F, \ldots h$, φ, χ, ψ berechne man nämlich mittelst der Formeln (d) und (e) die Werthe von D, α, β, γ,

und hieraus mit Hülfe der Formeln (*h*), (*i*) oder (*i**), und mit (*k*) die Werthe von Q, x und λ, μ, ν. In einer Geraden, parallel mit der durch λ, μ, ν bestimmten Richtung, nehme man hierauf beliebig zwei Punkte A_1 und A_2 und lasse resp. auf sie zwei einander gleiche Kräfte P_1 und P_2 nach entgegengesetzten Richtungen in der Geraden wirken, dergestalt, dass, vermöge (*e*), $A_1A_2 . P_2 = Q$ ist, und P_2 die Richtung A_1A_2 oder A_2A_1 hat, also die Kräfte P_1, P_2 die Linie A_1A_2 aus einander zu ziehen oder zusammenzudrücken streben, nachdem Q positiv oder negativ ist; und es wird das um diese zwei Kräfte vermehrte System bei Drehung des Körpers um die durch φ, χ, ψ gegebene Axe im Gleichgewichte beharren.

§. 136.

Zusätze und Erläuterungen. *a.* Von x wird unmittelbar nur das Quadrat gefunden. Dieses ist vermöge (*i**) positiv, und daher x, folglich die Lösung der Aufgabe überhaupt, immer möglich. Ob man von den daraus entspringenden zwei Vorzeichen für x das positive oder negative nimmt, ist gleichgültig. Denn mit Aenderung des Zeichens von x ändern sich auch die Zeichen der Cosinus λ, μ, ν. Eine durch $-\lambda, -\mu, -\nu$ bestimmte Gerade aber hat dieselbe Lage gegen das Coordinatensystem, als eine durch λ, μ, ν bestimmte, nur die entgegengesetzte Richtung der letztern; und die Seite, nach welcher man die Richtung positiv nimmt, hat auf das Endresultat keinen Einfluss.

b. Mit nur einiger Aufmerksamkeit auf die Formeln des vorigen §. wird man wahrnehmen, dass die zwei Hauptstücke, welche zur Lösung unserer Aufgabe erforderlich sind: die anfängliche Lage der Linie A_1A_2

und die Grösse Q, auch durch eine sehr einfache Construction aus den gegebenen $F, \ldots h$, φ, χ, ψ gefunden werden können.

Man drücke die drei Grössen $G\psi + H\chi - f\varphi$, etc. in (d) durch Linien aus, trage dieselben vom Anfangspunkte der Coordinaten aus auf die Axen der x, y, z und vollende die Figur zu einem Parallelepipedum. Zufolge der Formeln (d) und (e) ist alsdann $D =$ der vom Anfangspunkte aus gezogenen Diagonale dieses Parallelepipedums, und α, β, γ sind die Cosinus der Winkel, welche D mit den Axen der x, y, z macht. Man bezeichne die Richtung dieser Diagonale mit $\varDelta$ (Fig. 43.) und eben so die Richtung der Gleichgewichtsaxe mit $\varPhi$ und die anfängliche Richtung von $A_1 A_2$ mit A. Da nun $\varPhi$ und A eben so durch φ, χ, ψ und λ, μ, ν, wie $\varDelta$ durch α, β, γ bestimmt werden, so ist

$$x = \lambda\varphi + \mu\chi + \nu\psi = \cos A\varPhi,$$
$$\alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi = \cos \varDelta\varPhi,$$
$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = \cos \varDelta A.$$

Hiermit werden die Gleichungen (g) und (i):

$$\cos \varDelta A = 0 \text{ und } \sin A\varPhi^2 = \cos \varDelta\varPhi^2.$$

Denken wir uns daher sämmtliche drei Linien $\varDelta$, A und $\varPhi$ durch einen und denselben Punkt gehend, so schneiden sich $\varDelta$ und A unter rechten Winkeln, und hiermit kann die Gleichung (i) nicht anders bestehen, als wenn $\varPhi$ mit $\varDelta$ und A in einer Ebene liegt.

Mittelst der bekannten Linien $\varPhi$ und $\varDelta$ wird demnach A ganz einfach dadurch gefunden, dass man in der durch $\varPhi$ und $\varDelta$ bestimmten Ebene auf $\varDelta$ eine Normale errichtet. — Zieht man hierauf durch die Endpunkte des in $\varDelta$ liegenden Abschnitts D Parallelen mit A, so wird vermöge der Gleichung (h), welche jetzt in

$$Q = D \sec \Delta\Phi$$

übergeht, der zwischen diesen Parallelen enthaltene Theil von Φ, $= Q$ seyn.

c. Sobald der Körper um die Gleichgewichtsaxe gedreht zu werden anfängt, gehen die Kräfte P_1 und P_2, welche anfangs in die Linie $A_1 A_2$ fallen und sich das Gleichgewicht halten, in ein Paar über, und dieses Paar ist mit den gegebenen Kräften des Systems stets im Gleichgewichte, folglich das Paar $-P_1$, $-P_2$ mit den gegebenen Kräften gleichwirkend. Wir können daher das im Vorigen erhaltene Resultat auch folgendergestalt ausdrücken:

Wird ein Körper, auf welchen mehrere sich das Gleichgewicht haltende Kräfte wirken, um eine Axe gedreht, so hört das Gleichgewicht im Allgemeinen auf, und die Wirkung der Kräfte reducirt sich auf die eines Paares, dessen Kräfte man eben so, wie die erstern Kräfte, auf zwei bestimmte Punkte des Körpers mit unveränderter Richtung und Intensität wirkend setzen kann.

d. Dass sich das Gleichgewicht bei Verrückung des Körpers in die Wirkung eines Paares verwandelt, geht schon aus den ersten drei Bedingungen des Gleichgewichts: $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, hervor, als welche von den Angriffspunkten und mithin von der Verrückung unabhängig sind und auch dann noch statt finden, wenn sich das System auf ein Paar reducirt (§. 70.). Dass aber bei Drehung des Körpers um eine und dieselbe Axe die Angriffspunkte, Richtung und Intensität der Kräfte des Paares unveränderlich angenommen werden können, folgt erst aus der jetzt entwickelten Theorie.

e. Von den sieben Grössen x_1, y_1, z_1, r, P_2, $\lambda : \mu$, $\mu : \nu$, welche zur vollkommenen Bestimmung der

zwei hinzuzufügenden Kräfte P_1, P_2 und ihrer Angriffspunkte A_1, A_2 erforderlich sind, können durch die drei Bedingungsgleichungen für die Fortdauer des Gleichgewichts bei der Drehung um eine gegebene Axe nur drei, oder drei von den sieben abhängige, Grössen bestimmte Werthe erhalten. In der That fanden wir durch unsere Rechnung nur den Werth des Products rP_2 und die durch $\lambda : \mu$ und $\mu : \nu$ bestimmte Lage von r gegen die Coordinatenaxen. Vier Stücke, wofür wir die drei Coordinaten x_1, y_1, z_1 des einen Angriffspunktes A_1 und seinen Abstand r vom andern A_2 rechnen können, blieben der Willkühr überlassen.

Es ist nicht schwer, von der willkührlichen Beschaffenheit dieser vier Stücke aus der Natur der Sache selbst sich zu überzeugen. Denn sey s irgend eine mit r parallele und, eben so wie r, mit dem Körper fest verbundene Linie, auf deren Endpunkte zwei einander gleiche und einander direct entgegengesetzte Kräfte S_1 und S_2 wirken, so dass $sS_2 = Q$. Nachdem der Körper gedreht worden, mache die Linie r, und folglich auch die mit ihr parallel gebliebene s, mit den der anfänglichen Lage von r und s parallel gebliebenen Kräften P_1, P_2, S_1, S_2 den Winkel δ. Hiermit haben sich P_1 und P_2 in ein Paar verwandelt, dessen Moment $= rP_2 \sin\delta = Q \sin\delta$, und eben so sind S_1 und S_2 in ein Paar übergegangen, dessen Moment $= sS_2 \sin\delta = Q \sin\delta$. Beide Paare haben mithin einander gleiche Momente, und da sie überdies, wie leicht einzusehen, in parallelen Ebenen liegen, so haben sie auch gleiche Wirkung, und es kann folglich das eine für das andere gesetzt werden.

jeder fünften. — Uebrigens ist dann, wie man l findet, jede der sechs Grössen F, G, H, f, g, h einzeln

§. 135.

Ein im Gleichgewichte befindlicher Körper hat Allgemeinen keine Axe des Gleichgewichts, da Vorhandenseyn einer solchen Axe die Erfüllung Bedingungsgleichung (16) erfordert wird. Indessen es doch immer möglich, zu den sie anfangs das Gl gewicht haltenden Kräften zwei neue das Gleichgev nicht störende Kräfte hinzufügen, welche eben so, die schon vorhandenen, auf bestimmte Punkte des l pers, mit parallel bleibenden Richtungen wirken, wodurch es geschieht, dass der Körper eine Glei wichtsaxe von gegebener Richtung erhält.

Denn seyen P_1 und P_2, oder wenn wir sie den drei Coordinatenaxen zerlegen, (X_1, Y_1, Z_1) (X_2, Y_2, Z_2) die zwei neuen Kräfte; A_1 und A_2, $(x_1\ y_1, z_1)$ und (x_2, y_2, z_2) ihre Angriffspunkte. das anfängliche Gleichgewicht des Körpers durch zufügung dieser zwei Kräfte nicht aufgehoben wer soll, so müssen letztere zu Anfange einander eben das Gleichgewicht halten. Mithin muss seyn (§. 4

$$X_1 + X_2 = 0,\ Y_1 + Y_2 = 0,\ Z_1 + Z_2 = 0,$$
$$y_1 Z_1 + y_2 Z_2 = z_1 Y_1 + z_2 Y_2, \text{ etc.}$$

und wenn wir X_1, Y_1, Z_1 hieraus eliminiren:

$$(y_2 - y_1) Z_2 = (z_2 - z_1) Y_2,$$
$$(z_2 - z_1) X_2 = (x_2 - x_1) Z_2, \text{ etc.}$$

folglich, wenn wir noch die von A_1 bis A_2 gezog Geräde $= r$, die Cosinus der Winkel dieser Gera mit den Coordinatenaxen $= \lambda, \mu, \nu$, und daher

$$x_2 - x_1 = r\lambda,\ y_2 - y_1 = r\mu,\ z_2 - z_1 = r\nu$$

setzen:

$$X_2 : Y_2 : Z_2 = \lambda : \mu : \nu.$$

Mithin wirkt P_2 in der Linie r, wie schon aus dem VIII. Grundsatze in §. 14. fliesst, und es ist, wenn wir diese Kraft positiv annehmen, sobald sie nach der Richtung $A_1 A_2$ wirkt, also den Punkt A_2 von A_1 zu entfernen strebt:

$$X_2 = P_2\lambda,\ Y_2 = P_2\mu,\ Z_2 = P_2\nu.$$

Hiermit haben wir in unserm Systeme von Kräften über sieben neue Grössen: x_1, y_1, z_1, r, P_2 und die zwei Verhältnisse zwischen λ, μ, ν, zu verfügen, und werden diese Grössen auf unendlich viele Arten so bestimmen können, dass den drei Gleichungen (8), in denen φ, χ, ψ als gegeben anzusehen sind, Genüge geschieht. Die Rechnung hierzu, deren Ergebniss uns im nächsten Capitel von besonderem Nutzen seyn wird, ist folgende.

Heissen $F', G', H', f', g'\ h'$ die Werthe, welche $F, G, \ldots h$ erhalten, sobald noch die Kräfte P_1 und P_2 zu dem gegebenen Systeme hinzugefügt werden, und es ist zufolge der Gleichungen (4):

$$F' = F + y_1 Z_1 + y_2 Z_2$$
$$= F + (y_2 - y_1) Z_2 = F + rP_2\mu\nu,$$

und wenn noch der Kürze willen

$$(a) \ldots rP_2 = Q$$

gesetzt wird:

$$F' = F + Q\mu\nu, \text{ und eben so}$$
$$G' = G + Q\nu\lambda,\ H' = H + Q\lambda\mu.$$
$$f' = f + y_1 Y_1 + y_2 Y_2 + z_1 Z_1 + z_2 Z_2$$
$$= f + (y_2 - y_1) Y_2 + (z_2 - z_1) Z_2,$$

d. i. $f' = f + Q(\mu^2 + \nu^2)$, und eben so

$$g' = g + Q(\nu^2 + \lambda^2),\ h' = h + Q(\lambda^2 + \mu^2).$$

Soll nun das jetzt um P_1 und P_2 vermehrte und durch $F', G', \ldots h'$ bestimmte System eine durch

φ, χ, ψ gegebene Axe des Gleichgewichts haben, so muss seyn (8):

$$G'\psi + H'\chi - f'\varphi = 0,$$
$$H'\varphi + F'\psi - g'\chi = 0,$$
$$F'\chi + G'\varphi - h'\psi = 0.$$

Substituirt man hierin die für $F', \ldots h'$ erhaltenen Werthe, so wird die erste dieser Gleichungen:

$$G\psi + H\chi - f\varphi = Q\,[\varphi\,(\mu^2 + \nu^2) - \lambda\,(\mu\chi + \nu\psi)]$$
$$= Q\,(\varphi - x\lambda),$$

weil (b) $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ ist, und wenn man

(c) $\lambda\varphi + \mu\chi + \nu\psi = x$ setzt.

Eben so verwandeln sich die beiden andern Gleichungen in:

$$H\varphi + F\psi - g\chi = Q\,(\chi - x\mu),$$
$$F\chi + G\varphi - h\psi = Q\,(\psi - x\nu),$$

Um diese Formeln und die nachfolgende Rechnung noch mehr abzukürzen, setze man die als bekannt anzusehenden Grössen

$$(d)\quad \begin{cases} G\psi + H\chi - f\varphi = D\alpha, \\ H\varphi + F\psi - g\chi = D\beta, \\ F\chi + G\varphi - h\psi = D\gamma, \text{ und} \end{cases}$$

$$(e)\quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

wobei aus (d) die Verhältnisse zwischen α, β, γ, und hieraus in Verbindung mit (e) diese Grössen selbst, so wie auch D, sich finden lassen.

Die drei Bedingungsgleichungen werden damit:

$$(f)\quad \begin{cases} D\alpha = Q\,(\varphi - x\lambda), \\ D\beta = Q\,(\chi - x\mu), \\ D\gamma = Q\,(\psi - x\nu). \end{cases}$$

Aus den fünf Gleichungen (b), (c), (f) muss man nun die Werthe der eben so viel Unbekannten λ, μ, ν, x, Q zu bestimmen suchen. Zu dem Ende multiplicire man die

drei Gleichungen (f) resp. mit φ, χ, ψ und addire die hierauf, so kommt mit Berücksichtigung von (11) und (δ):

$$D(\alpha\varphi+\beta\chi+\gamma\psi)=Q(1-x^2).$$

Eben so folgt mit Rücksicht auf (b) und (e), wenn man die Gleichungen (f), nach vorausgegangener Multiplication mit λ, μ, ν, addirt, und D nicht $=0$ annimmt, indem sonst die drei Grössen $G\psi+H\chi-f\varphi$, etc. in (d) null wären, mithin das System die durch φ, χ, ψ gegebene Axe zur Gleichgewichtsaxe schon hätte und keine neuen Kräfte deshalb hinzuzufügen nöthig wären:

$$(g) \quad \alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu=0.$$

Addirt man endlich die Gleichungen (f), nachdem man sie mit α, β, γ multiplicirt hat, so kommt mit Rücksicht auf (e) und (g):

$$D=Q(\alpha\varphi+\beta\chi+\gamma\psi).$$

Hieraus fliesst sogleich:

$$(h) \quad Q=\frac{D}{\alpha\varphi+\beta\chi+\gamma\psi},$$

$$(i) \quad 1-x^2=(\alpha\varphi+\beta\chi+\gamma\psi)^2,$$

oder, weil $1=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\varphi^2+\chi^2+\psi^2)$ ist:

$$(i') \quad x^2=(\beta\psi-\gamma\chi)^2+(\gamma\varphi-\alpha\psi)^2+(\alpha\chi-\beta\varphi)^2.$$

Die Werthe von λ, μ, ν ergeben sich dann aus (f), nämlich

$$(k) \quad \lambda=\frac{Q\varphi-D\alpha}{Qx}=\frac{\varphi-\alpha(\alpha\varphi+\beta\chi+\gamma\psi)}{x}, \text{ u. s. w.}$$

Somit ist unsere Aufgabe: Zu einem durch $F, \ldots h$ gegebenen Systeme von Kräften, welche sich das Gleichgewicht halten, zwei neue Kräfte hinzuzufügen, wodurch das System eine durch φ, χ, ψ ihrer Richtung nach gegebene Axe des Gleichgewichts erhält, als gelöst zu betrachten.

Aus $F, \ldots h$, φ, χ, ψ berechne man nämlich mittelst der Formeln (d) und (e) die Werthe von D, α, β, γ,

und hieraus mit Hülfe der Formeln (h), (i) oder (i^*), und mit (k) die Werthe von Q, x und λ, μ, ν. In einer Geraden, parallel mit der durch λ, μ, ν bestimmten Richtung, nehme man hierauf beliebig zwei Punkte A_1 und A_2 und lasse resp. auf sie zwei einander gleiche Kräfte P_1 und P_2 nach entgegengesetzten Richtungen in der Geraden wirken, dergestalt, dass, vermöge (a), $A_1A_2 . P_2 = Q$ ist, und P_2 die Richtung A_1A_2 oder A_2A_1 hat, also die Kräfte P_1, P_2 die Linie A_1A_2 aus einander zu ziehen oder zusammenzudrücken streben, nachdem Q positiv oder negativ ist; und es wird das um diese zwei Kräfte vermehrte System bei Drehung des Körpers um die durch φ, χ, ψ gegebene Axe im Gleichgewichte beharren.

§. 136.

Zusätze und Erläuterungen. *a.* Von x wird unmittelbar nur das Quadrat gefunden. Dieses ist vermöge (i^*) positiv, und daher x, folglich die Lösung der Aufgabe überhaupt, immer möglich. Ob man von den daraus entspringenden zwei Vorzeichen für x das positive oder negative nimmt, ist gleichgültig. Denn mit Aenderung des Zeichens von x ändern sich auch die Zeichen der Cosinus λ, μ, ν. Eine durch $-\lambda, -\mu, -\nu$ bestimmte Gerade aber hat dieselbe Lage gegen das Coordinatensystem, als eine durch λ, μ, ν bestimmte, nur die entgegengesetzte Richtung der letztern; und die Seite, nach welcher man die Richtung positiv nimmt, hat auf das Endresultat keinen Einfluss.

b. Mit nur einiger Aufmerksamkeit auf die Formeln des vorigen §. wird man wahrnehmen, dass die zwei Hauptstücke, welche zur Lösung unserer Aufgabe erforderlich sind: die anfängliche Lage der Linie A_1A_2

und die Grösse Q, auch durch eine sehr einfache Construction aus den gegebenen $F, \ldots h$, φ, χ, ψ gefunden werden können.

Man drücke die drei Grössen $G\psi + H\chi - f\varphi$, etc. in (d) durch Linien aus, trage dieselben vom Anfangspunkte der Coordinaten aus auf die Axen der x, y, z und vollende die Figur zu einem Parallelepipedum. Zufolge der Formeln (d) und (e) ist alsdann $D =$ der vom Anfangspunkte aus gezogenen Diagonale dieses Parallelepipedums, und α, β, γ sind die Cosinus der Winkel, welche D mit den Axen der x, y, z macht. Man bezeichne die Richtung dieser Diagonale mit Δ (Fig. 43.) und eben so die Richtung der Gleichgewichtsaxe mit Φ und die anfängliche Richtung von A_1A_2 mit A. Da nun Φ und A eben so durch φ, χ, ψ und λ, μ, ν, wie Δ durch α, β, γ bestimmt werden, so ist

$$x = \lambda\varphi + \mu\chi + \nu\psi = \cos A\Phi,$$
$$\alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi = \cos \Delta\Phi,$$
$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = \cos \Delta A.$$

Hiermit werden die Gleichungen (g) und (i):

$$\cos \Delta A = 0 \text{ und } \sin A\Phi^2 = \cos \Delta\Phi^2.$$

Denken wir uns daher sämmtliche drei Linien Δ, A und Φ durch einen und denselben Punkt gehend, so schneiden sich Δ und A unter rechten Winkeln, und hiermit kann die Gleichung (i) nicht anders bestehen, als wenn Φ mit Δ und A in einer Ebene liegt.

Mittelst der bekannten Linien Φ und Δ wird demnach A ganz einfach dadurch gefunden, dass man in der durch Φ und Δ bestimmten Ebene auf Δ eine Normale errichtet. — Zieht man hierauf durch die Endpunkte des in Δ liegenden Abschnitts D Parallelen mit A, so wird vermöge der Gleichung (h), welche jetzt in

$$Q = D \sec \Delta\Phi$$

übergeht, der zwischen diesen Parallelen enthaltene Theil von $\Phi_2 = Q$ seyn.

c. Sobald der Körper um die Gleichgewichtsaxe gedreht zu werden anfängt, gehen die Kräfte P_1 und P_2, welche anfangs in die Linie A_1A_2 fallen und sich das Gleichgewicht halten, in ein Paar über, und dieses Paar ist mit den gegebenen Kräften des Systems stets im Gleichgewichte, folglich das Paar $-P_1, -P_2$ mit den gegebenen Kräften gleichwirkend. Wir können daher das im Vorigen erhaltene Resultat auch folgendergestalt ausdrücken:

Wird ein Körper, auf welchen mehrere sich das Gleichgewicht haltende Kräfte wirken, um eine Axe gedreht, so hört das Gleichgewicht im Allgemeinen auf, und die Wirkung der Kräfte reducirt sich auf die eines Paares, dessen Kräfte man eben so, wie die erstern Kräfte, auf zwei bestimmte Punkte des Körpers mit unveränderter Richtung und Intensität wirkend setzen kann.

d. Dass sich das Gleichgewicht bei Verrückung des Körpers in die Wirkung eines Paares verwandelt, geht schon aus den ersten drei Bedingungen des Gleichgewichts: $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, hervor, als welche von den Angriffspunkten und mithin von der Verrückung unabhängig sind und auch dann noch statt finden, wenn sich das System auf ein Paar reducirt (§. 70.). Dass aber bei Drehung des Körpers um eine und dieselbe Axe die Angriffspunkte, Richtung und Intensität der Kräfte des Paares unveränderlich angenommen werden können, folgt erst aus der jetzt entwickelten Theorie.

e. Von den sieben Grössen x_1, y_1, z_1, r, P_2, $\lambda : \mu$, $\mu : \nu$, welche zur vollkommenen Bestimmung der

zwei hinzuzufügenden Kräfte P_1, P_2 und ihrer Angriffspunkte A_1, A_2 erforderlich sind, können durch die drei Bedingungsgleichungen für die Fortdauer des Gleichgewichts bei der Drehung um eine gegebene Axe nur drei, oder drei von den sieben abhängige, Grössen bestimmte Werthe erhalten. In der That fanden wir durch unsere Rechnung nur den Werth des Products rP_2 und die durch $\lambda : \mu$ und $\mu : \nu$ bestimmte Lage von r gegen die Coordinatenaxen. Vier Stücke, wofür wir die drei Coordinaten x_1, y_1, z_1 des einen Angriffspunktes A_1 und seinen Abstand r vom andern A_2 rechnen können, blieben der Willkühr überlassen.

Es ist nicht schwer, von der willkührlichen Beschaffenheit dieser vier Stücke aus der Natur der Sache selbst sich zu überzeugen. Denn sey s irgend eine mit r parallele und, eben so wie r, mit dem Körper fest verbundene Linie, auf deren Endpunkte zwei einander gleiche und einander direct entgegengesetzte Kräfte S_1 und S_2 wirken, so dass $sS_2 = Q$. Nachdem der Körper gedreht worden, mache die Linie r, und folglich auch die mit ihr parallel gebliebene s, mit den der anfänglichen Lage von r und s parallel gebliebenen Kräften P_1, P_2, S_1, S_2 den Winkel δ. Hiermit haben sich P_1 und P_2 in ein Paar verwandelt, dessen Moment $= r P_2 \sin\delta = Q \sin\delta$, und eben so sind S_1 und S_2 in ein Paar übergegangen, dessen Moment $= sS_2 \sin\delta = Q \sin\delta$. Beide Paare haben mithin einander gleiche Momente, und da sie überdies, wie leicht einzusehen, in parallelen Ebenen liegen, so haben sie auch gleiche Wirkung, und es kann folglich das eine für das andere gesetzt werden.

§. 137.

Ein System von Kräften, welche nicht im Gleichgewichte sind, kann, wo nicht schon durch eine, doch immer durch zwei neue Kräfte, und dieses auf unendlich viele Arten, in den Zustand des Gleichgewichts gebracht werden. So wie wir nun im Vorigen zu einem schon im Gleichgewichte befindlichen Systeme zwei neue Kräfte hinzufügten, wodurch das Gleichgewicht nicht nur nicht gestört wurde, sondern auch bei der darauf folgenden Drehung um eine gegebene Axe noch fortdauerte, so wollen wir jetzt bei einem Systeme von Kräften, welche nicht im Gleichgewichte sind, die zwei zum Gleichgewichte noch erforderlichen Kräfte so zu bestimmen suchen, dass das Gleichgewicht durch die Drehung um eine gegebene Axe nicht unterbrochen wird.

Indem wir die ursprünglichen Kräfte und die zwei hinzuzufügenden, so wie die Angriffspunkte ihrer aller mit denselben Charakteren, wie vorhin, ausdrücken und überdies

$$[1]\begin{cases} \Sigma X = A, & \Sigma yZ = F, & \Sigma zY = F', \\ \Sigma Y = B, & \Sigma zX = G, & \Sigma xZ = G', \\ \Sigma Z = C, & \Sigma xY = H, & \Sigma yX = H', \\ \Sigma(yY + zZ) = f, & \Sigma(zZ + xX) = g, & \text{etc.} \end{cases}$$

setzen, haben wir zuerst wegen des anfänglichen Gleichgewichts die sechs Gleichungen:

$$[2]\begin{cases} X_1 + X_2 + A = 0, \\ Y_1 + Y_2 + B = 0, \\ Z_1 + Z_2 + C = 0. \end{cases}$$

$$[3]\begin{cases} y_1 Z_1 + y_2 Z_2 + F = z_1 Y_1 + z_2 Y_2 + F' = F'', \\ z_1 X_1 + z_2 X_2 + G = x_1 Z_1 + x_2 Z_2 + G' = G'', \\ x_1 Y_1 + x_2 Y_2 + H = y_1 X_1 + y_2 X_2 + H' = H''. \end{cases}$$

Setzen wir ferner

$$[4]\begin{cases} y_1 Y_1 + y_2 Y_2 + z_1 Z_1 + z_2 Z_2 + f = f', \\ z_1 Z_1 + z_2 Z_2 + x_1 X_1 + x_2 X_2 + g = g', \\ x_1 X_1 + x_2 X_2 + y_1 Y_1 + y_2 Y_2 + h = h', \end{cases}$$

und wird, wie im Vorigen, die Richtung der Gleichgewichtsaxe durch φ, χ, ψ bestimmt, so kommen wegen der Fortdauer des Gleichgewichts zu den sechs Gleichungen [2] und [3] noch die drei hinzu

$$[5]\begin{cases} G''\psi + H''\chi = f'\varphi, \\ H''\varphi + F''\psi = g'\chi, \\ F''\chi + G''\varphi = h'\psi; \end{cases}$$

und man hat somit zur Bestimmung der zwölf gesuchten Grössen $X_1, \ldots Z_2, x_1, \ldots z_2$ nicht mehr als neun Gleichungen, so dass drei dieser Grössen oder drei von ihnen abhängige Functionen der Willkühr überlassen bleiben.

Den Anfang der hierzu nöthigen Rechnung mache man damit, dass man X_1, Y_1, Z_1 aus [3] und [4] mittelst [2] eliminirt. Setzt man dabei, wie im Obigen, die von (x_1, y_1, z_1) bis (x_2, y_2, z_2) gezogene Gerade $= r$, und die Cosinus der Winkel dieser Geraden mit den drei Coordinatenaxen $= \lambda, \mu, \nu$, also

$$[6]\begin{cases} x_2 - x_1 = r\lambda,\ y_2 - y_1 = r\mu,\ z_2 - z_1 = r\nu, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \end{cases}$$

so kommt nach vollzogener Elimination:

$$[7]\begin{cases} r\mu Z_2 - y_1 C + F = r\nu Y_2 - z_1 B + F' = F'', \\ r\nu X_2 - z_1 A + G = r\lambda Z_2 - x_1 C + G' = G'', \\ r\lambda Y_2 - x_1 B + H = r\mu X_2 - y_1 A + H' = H'', \end{cases}$$

$$[8]\begin{cases} r\mu Y_2 + r\nu Z_2 - y_1 B - z_1 C + f = f', \\ r\nu Z_2 + r\lambda X_2 - z_1 C - x_1 A + g = g', \\ r\lambda X_2 + r\mu Y_2 - x_1 A - y_1 B + h = h'. \end{cases}$$

Da die Substitution dieser Werthe von $F'', \ldots h'$ in [5] eine allzu complicirte Rechnung geben würde, so

wollen wir das Coordinatensystem so gelegt annehm dass die Axe der z mit der Axe, um welche der K per gedreht werden soll, zusammenfällt. Hierdu werden $\varphi = 0$, $\chi = 0$, $\psi = 1$, die Gleichungen [5] duciren sich damit auf

$$G'' = 0, \quad F'' = 0, \quad h' = 0,$$

und wir bekommen vermöge [7] und [8] folgende se die Lösung unsers Problems enthaltenden, Gleichung

$$[a]\begin{cases} r\mu Z_2 - y_1 C + F = 0, \\ r\nu Y_2 - z_1 B + F' = 0, \\ r\nu X_2 - z_1 A + G = 0, \\ r\lambda Z_2 - x_1 C + G' = 0, \\ r\lambda Y_2 - x_1 B + H = r\mu X_2 - y_1 A + H', \\ r\lambda X_2 + r\mu Y_2 - x_1 A - y_1 B + h = 0, \end{cases}$$

welche sich nach Elimination von X_2, Y_2, Z_2 auf d gende drei reduciren:

$$[b]\begin{cases} \lambda (F - y_1 C) - \mu (G' - x_1 C) = 0 \\ \lambda (F' - z_1 B) - \mu (G - z_1 A) + \nu (H' - H + x_1 B - y_1 A) = \\ \lambda (G - z_1 A) + \mu (F' - z_1 B) - \nu (h - x_1 A - y_1 B) = 0. \end{cases}$$

Hieraus kann man noch λ, μ, ν wegschaffen man erhält damit:

$$[c]\ 0 = [(F - y_1 C)(G - z_1 A) - (G' - x_1 C)(F' - z_1 B)](h - x_1 A - y_1 B)$$
$$- [(F - y_1 C)(F' - z_1 B) + (G' - x_1 C)(G - z_1 A)](H' - H + x_1 B - y_1$$

eine Gleichung, die, wie die weitere Entwickelung d selben zeigt, nur vom zweiten Grade ist.

Der Punkt (x_1, y_1, z_1) liegt demnach in ei Fläche der zweiten Ordnung; und in derselben Flä ist auch der Punkt (x_2, y_2, z_2) enthalten. Denn Gleichungen (b), und folglich auch die aus ihnen ab leitete [c], bleiben auch dann noch richtig, wenn m für x_1, y_1, z_1 resp. $x_1 + r\lambda$, $y_1 + r\mu$, $z_1 + r\nu$, als Werthe von x_2, y_2, z_2, substituirt. Da ferner bei d ser Substitution die Grösse r herausgeht, und da ganz willkührlich angenommen werden kann, so erhell

dass nicht nur die Punkte ($x_1, ..$) und ($x_2, ..$) selbst, sondern auch alle übrigen mit ihnen in einer Geraden liegenden Punkte in der Fläche enthalten sind, dass mithin diese Fläche der zweiten Ordnung durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden kann und folglich ein hyperbolisches Hyperboloid ist.

Hat man demnach ein System von Kräften, welche nicht im Gleichgewichte sind, so können zwei Kräfte hinzugefügt werden, wodurch ein auch bei der Drehung um eine gegebene Axe fortdauerndes Gleichgewicht entsteht; oder, was dasselbe ist: die zwei Kräfte, auf welche das System zurückgeführt werden kann, lassen sich so bestimmen, dass das System bei der Drehung um eine gegebene Axe auf sie reducirbar bleibt. Dabei lässt sich ein hyperbolisches Hyperboloid angeben, von dessen zwei die Fläche erzeugenden Geraden die eine die Eigenschaft besitzt, dass die Angriffspunkte der zwei Kräfte willkührlich in irgend einer der Lagen dieser Geraden genommen werden können.

Sind auf diese Weise die zwei Angriffspunkte bestimmt worden, so ergeben sich die zwei Kräfte selbst aus [α] und [2].

§. 138.

Die zwei Kräfte, auf welche ein System von Kräften im Allgemeinen immer zurückgeführt werden kann, wurden im vor. §. so bestimmt, dass, wenn der Körper, auf den die Kräfte wirken, um eine gegebene Axe gedreht wird, diese zwei Kräfte mit den Kräften des Systems immer gleichwirkend bleiben. Die Wirkung der zwei Kräfte, und mithin der Kräfte des Systems, auf die Axe wird während der Drehung im Allgemeinen veränderlich seyn, da die Angriffspunkte der zwei Kräfte

gegen die Axe eine immer andere Lage bei der
hung im Allgemeinen einnehmen. Nur in dem
werden die Kräfte des Systems auf die Axe fortwäl
dieselbe Wirkung ausüben, wenn von den zwei Kr
auf welche sie reducirt worden sind, die Angriffsp
in die Axe selbst fallen.

Eine solche Axe, welche die Eigenschaft be
dass, wenn der Körper um sie gedreht wird, die
ihn wirkenden Kräfte auf zwei die Axe selbst tref
Kräfte reducirbar bleiben, und dass mithin, wen
ihr die zwei Kräfte nach entgegengesetzter Ricl
angebracht werden, ein auch bei der Drehung da
des Gleichgewicht entsteht, eine solche Axe wolle
eine Hauptaxe der Drehung nennen.

Sie ist in gewissem Sinne dasselbe für ein Sy
von Kräften, die keine einfache Resultante haben,
für parallele Kräfte, die sich auf eine einzige l
reduciren lassen, der Mittelpunkt war. Denn so
der Mittelpunkt eines Systems paralleler Kräfte
Drehung des Körpers um denselben fortwährend
nämlichen auf ihn unmittelbar gerichteten Druck
det, so wird auch die Hauptaxe, wenn der Körpe
sie gedreht wird, von den Kräften des Systems
auf dieselbe Weise gedrückt und kann durch zwe
ihr selbst angebrachte Kräfte im Gleichgewichte e
ten werden.

§. 139.

Die Hauptaxe der Drehung, welche einem g
benen Systeme von Kräften zukommt, kann aus
Formeln des §. 137. ohne Schwierigkeit gefunden
den. Es wurde daselbst durch φ, χ, ψ die Richtung
Drehungsaxe überhaupt, und durch λ, μ, ν die Ricl

ler Geraden bestimmt, an welcher die zwei zur Erhaltung des Gleichgewichts nöthigen Kräfte angebracht würden. Ist nun die Axe der Drehung eine Hauptaxe, so sind beide Richtungen identisch, und es ist daher in diesem Falle:

$$\varphi = \lambda, \ \chi = \mu, \ \psi = \nu.$$

Hiermit werden die Gleichungen [5]:

$$[5^*] \begin{cases} H''\mu + G''\nu = f'\lambda, \\ F''\nu + H''\lambda = g'\mu, \\ G''\lambda + F''\mu = h'\nu. \end{cases}$$

Man substituire darin für f', g', h' ihre Werthe aus [8], und für F'', G'', H'' ihre Werthe aus [7], und zwar für jede der letztern Grössen ihren ersten oder zweiten Werth aus [7], je nachdem sie im ersten oder zweiten Gliede der linken Seite der Gleichungen [5*] sich befindet. Dies giebt nach leichter Reduction:

$$(H - x_1 B)\mu + (G' - x_1 C)\nu = (f - y_1 B - z_1 C)\lambda,$$
$$(F - y_1 C)\nu + (H' - y_1 A)\lambda = (g - z_1 C - x_1 A)\mu,$$
$$(G - z_1 A)\lambda + (F' - z_1 B)\mu = (h - x_1 A - y_1 B)\nu;$$

und wenn man noch die Gleichungen [7] resp. mit λ, μ, ν multiplicirt und dann addirt:

$$(F - F' - y_1 C + z_1 B)\lambda + (G - G' - z_1 A + x_1 C)\mu$$
$$+ (H - H' - x_1 B + y_1 A)\nu = 0.$$

Dies sind die Gleichungen, welche nach Wegschaffung von X_2, Y_2, Z_2 aus [5*] und [7] übrigbleiben, und aus denen die in ihnen noch vorkommenden Unbekannten $x_1, y_1, z_1, \lambda, \mu, \nu$ zu bestimmen sind.

Man setze der Kürze willen

$$[9] \begin{cases} f\lambda - H\mu - G'\nu = L, \\ g\mu - F\nu - H'\lambda = M, \\ h\nu - G\lambda - F'\mu = N, \\ (F - F')\lambda + (G - G')\mu + (H - H')\nu = 0. \end{cases}$$

[10] $x_1\mu - y_1\nu = \xi,\ x_1\nu - z_1\lambda = \eta,\ y_1\lambda - x_1\mu = \zeta,$
woraus [11] $\xi\lambda + \eta\mu + \zeta\nu = 0$ folgt;
und es werden die erhaltenen vier Gleichungen:

$$[12]\ \begin{cases} L = B\zeta - C\eta,\ M = C\xi - A\zeta,\ N = A\eta - B\xi, \\ O = A\xi + B\eta + C\zeta. \end{cases}$$

Hieraus fliesst:

$$[13]\ \begin{cases} M\nu - N\mu = -A(\eta\mu + \zeta\nu) + B\xi\mu + C\xi\nu \\ \qquad\qquad = (A\lambda + B\mu + C\nu)\xi \text{ wegen [11]}, \\ N\lambda - L\nu = (A\lambda + B\mu + C\nu)\eta, \\ L\mu - M\lambda = (A\lambda + B\mu + C\nu)\zeta; \end{cases}$$

und daraus in Verbindung mit der vierten der Gleichungen [12]:

$$[14]\ A(M\nu - N\mu) + B(N\lambda - L\nu) + C(L\mu - M\lambda) = (A\lambda + B\mu + C\nu)\,O,$$

wozu noch die aus den drei ersten Gleichungen von [12] unmittelbar folgende Gleichung kommt:

$$[15]\ AL + BM + CN = 0.$$

Somit haben wir noch ξ, η, ζ, also auch x_1, y_1, z_1, eliminirt und dadurch zwei Gleichungen zwischen λ, μ, ν erhalten, von denen, weil L, M, N, O selbst homogene lineare Functionen von λ, μ, ν sind [9], die Gleichung [14] eine homogene Gleichung vom zweiten, und [15] eine homogene Gleichung vom ersten Grade ist. Nehmen wir daher für den Augenblick an, dass die durch die Cosinus λ, μ, ν ihrer Richtung nach bestimmte Axe durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehe, so können wir λ, μ, ν als die Coordinaten eines Punktes der Axe betrachten, und alsdann ist [14] die Gleichung einer Kegelfläche, welche im Anfangspunkte ihre Spitze hat, [15] aber die Gleichung einer durch denselben Punkt, also durch die Spitze des Kegels, gehenden Ebene. Je nachdem nun jene Kegelfläche und diese Ebene sich schneiden, welches immer in zwei Geraden

geschieht, oder bloss den gedachten Punkt gemein haben, ist die Lösung unserer Aufgabe möglich, oder unmöglich, und im ersten Falle wird die Richtung jeder der beiden Durchschnittslinien die Richtung der gesuchten Axe seyn können, *so dass es daher entweder zwei Hauptaxen der Drehung, die auch zusammenfallen können, oder gar keine giebt.*

Hat man die im möglichen Falle doppelt vorhandenen Werthe der Verhältnisse zwischen λ, μ, ν bestimmt, so ergeben sich mittelst [13] die zugehörigen Werthe von ξ, η, ζ. Diese Werthe, zwischen denen die Gleichung [11] obwaltet, in [10] substituirt, erhält man zwischen x_1, y_1, z_1 drei Gleichungen, von denen aus je zweien die dritte folgt, also die Gleichungen für eine gerade Linie, in welcher der eine Angriffspunkt (x_1, y_1, z_1) und zufolge [6] auch der andere $[x_2, y_2, z_2]$ enthalten ist. Diese mit der Richtung (λ, μ, ν), wie gehörig, parallele Linie ist demnach die gesuchte Hauptaxe. In ihr können die zwei Angriffspunkte willkührlich genommen werden, da zur Bestimmung ihrer Coordinaten keine Gleichungen weiter vorhanden sind.

Die in den zwei Punkten anzubringenden Kräfte ergeben sich jetzt aus [7] und [2]. Erstere Gleichungen gehören, wenn man X_2, Y_2, Z_2 als Coordinaten betrachtet, einer geraden Linie an, welche die durch λ, μ, ν bestimmte Richtung hat. Construirt man daher diese Linie, indem man (x_2, y_2, z_2) zum Anfangspunkte der Coordinaten nimmt, so wird jede von (x_2, y_2, z_2) bis zu einem Punkte der Linie gezogene Gerade die Kraft (X_2, Y_2, Z_2) vorstellen können. — Die andere Kraft (X_1, Y_1, Z_1) ist hierauf durch die Gleichungen [2] vollkommen bestimmt.

§. 140.

Um die jetzt vorgetragene Theorie durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir sie auf den möglich einfachsten Fall anwenden und für ein nur aus zwei Kräften bestehendes System die zwei Hauptaxen zu bestimmen suchen.

Seyen demnach (X, Y, Z), (X', Y', Z') die beiden Kräfte des Systems und (x, y, z), (x', y', z') ihre Angriffspunkte. Zur möglichsten Abkürzung der Rechnung werde die Ebene der x, y so gelegt, dass die erstere Kraft in ihr enthalten und die letztere mit ihr parallel ist, und daher $z, Z, Z' = 0$ sind. Zum Anfangspunkte der Coordinaten nehme man den Angriffspunkt der ersten Kraft selbst und setze daher noch $x, y = 0$. Die noch willkührliche Ebene der x, z lege man durch den Angriffspunkt der zweiten Kraft, wodurch $y' = 0$ wird.

Hiermit ergeben sich nach [1] :

$$\begin{aligned} A &= X + X', & B &= Y + Y', & C &= 0, \\ F &= 0 & , G &= z'X' & , H &= x'Y', \\ F' &= z'Y' & , G' &= 0 & , H' &= 0, \\ f &= 0 & , g &= h = x'X'; \end{aligned}$$

und hieraus weiter nach [9]:

$$L = -H\mu, \quad M = h\mu, \quad N = h\nu - G\lambda - F'\mu,$$
$$O = -F'\lambda + G\mu + H\nu.$$

Wie man leicht findet, reduciren sich damit und wegen $C = 0$ die zwei aufzulösenden Gleichungen [14] und [15] zwischen λ, μ, ν auf:

$$(AF' - BG)(\lambda^2 + \mu^2) - (AH - Bh)\lambda\nu = 0,$$
$$(AH - Bh)\mu = 0;$$

und wenn man darin für A, B, G, H, F', h ihre Werthe, durch $X, \ldots z'$ ausgedrückt, setzt:

$$\text{I.} \quad (XY' - X'Y)\,[z'(\lambda^2 + \mu^2) - x'\lambda\nu] = 0,$$
$$\text{II.} \quad \ldots\ldots \quad (XY' - X'Y)\,x'\mu = 0.$$

Im Allgemeinen, d. h. ohne Voraussetzung einer besondern Beschaffenheit des Systems, ist daher zufolge II.:

$$\mu = 0.$$

Hiermit wird I. im Allgemeinen:

$$x'\lambda^2 - x'\lambda\nu = 0, \text{ also}$$

$$\text{entweder } \lambda = 0, \text{ oder } x'\lambda - x'\nu = 0.$$

Für die eine der beiden Hauptaxen sind daher

$$\lambda = 0, \ \mu = 0, \text{ und mithin } \nu = 1;$$

für die andere aber verhalten sich

$$\lambda : \mu : \nu = x' : 0 : x'.$$

Die eine Hauptaxe steht daher auf der Ebene der x, y, d. i. auf einer mit den beiden Kräften parallelen Ebene, rechtwinklig, und die andere ist parallel mit der Geraden durch die Angriffspunkte $(0, 0, 0)$ und $(x', 0, x')$ der beiden Kräfte.

Die Gleichungen selbst, welche den Hauptaxen zugehören, lassen sich nun folgendergestalt finden. Mit Anwendung der Werthe $0, 0, 1$ für λ, μ, ν, reduciren sich die für gegenwärtiges System bereits bemerkten Werthe von $L, .. O$ auf:

$$L = 0, \ M = 0, \ N = h, \ O = H.$$

Hiermit, und weil $C = 0$, werden die Gleichungen [12]:

$$0 = \zeta, \ h = A\eta - B\xi, \ H = A\xi + B\eta.$$

Die Gleichungen [10] werden: $\xi = -y_1, \eta = x_1, \zeta = 0$, und man erhält damit:

$$h = Ax_1 + By_1, \ H = -Ay_1 + Bx_1,$$

als die Gleichungen der einen Hauptaxe. Sie gehören einer Geraden an, welche die Ebene der x, y rechtwinklig in dem Punkte schneidet, dessen Coordinaten

$$x_1 = \frac{Ah + BH}{A^2 + B^2}, \ y_1 = \frac{Bh - AH}{A^2 + B^2}$$

sind, und man erkennt bei Vergleichung derselben den Formeln in §. 125., dass dieser Punkt kein an rer, als der Mittelpunkt des auf die Ebene der projicirten Systems ist. Denn die dortigen A, B haben hier die nämliche Bedeutung, und das dort $N_{,}=\Sigma(xY-yX)$, ist einerlei mit dem hiesigen $H-$ $=H$, weil $H'=0$ ist.

Was die andere Hauptaxe anlangt, für wel $\mu=0$ ist, und sich $\lambda:\nu=x':z'$, also auch $=h$: verhalten, so werden damit:

$$L=0,\ M=0,\ N=0;$$

folglich nach [13]: $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$;
und hiermit nach [10]: $y_1=0$, $x_1z'-z_1x'=0$, welches die Gleichungen für eine Gerade sind, durch die Punkte $(0,0,0)$ und $(x',0,z')$, d. i. durch Angriffspunkte der beiden Kräfte, geht.

Ein nur aus zwei Kräften bestehendes Sys hat demnach im Allgemeinen zwei verschiedene Hau axen. Die eine derselben steht normal auf ei Ebene, welche mit den beiden Kräften parallel und trifft diese Ebene in dem Mittelpunkte der z auf die Ebene rechtwinklig projicirten Kräfte. andere Hauptaxe geht durch die Angriffspunkte beiden Kräfte.

Ausnahmen hiervon finden statt:

1) Wenn $x'=0$ ist, d. h. wenn die Gerade du die beiden Angriffspunkte auf jeder der beiden Kr normal steht. Denn damit wird die Gleichung II. ic tisch, und I. reducirt sich auf $\lambda^2+\mu^2=0$; folglich immer $\lambda=0$, $\mu=0$, $\nu=1$. In diesem Falle coincidi also die beiden Hauptaxen mit jener Geraden.

2) Wenn x' und z' zugleich $=0$ sind, d. h. w die zwei Kräfte einen gemeinschaftlichen Angriffspu

haben. Alsdann werden die Gleichungen I. und II. für alle Verhältnisse zwischen λ, μ, ν erfüllt, und jede durch den gemeinsamen Angriffspunkt gehende Gerade besitzt die Eigenschaft einer Hauptaxe.

3) Wenn $XY' = X'Y$, d. h. wenn die zwei Kräfte parallele Richtungen haben. Denn auch hier bleiben die Verhältnisse zwischen λ, μ, ν unbestimmt, und jede durch den Mittelpunkt der zwei parallelen Kräfte gelegte Gerade ist eine Hauptaxe.

Ist z' allein $= 0$, hat man also zwei einander nicht parallele auf zwei verschiedene Punkte in einer und derselben Ebene wirkende Kräfte, so reducirt sich I. auf $\lambda\nu = 0$, und es ist folglich entweder $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 1$, oder $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $\nu = 0$. In diesem Falle giebt es daher, wie im Allgemeinen, und wie auch zu erwarten stand, zwei Hauptaxen. Die eine derselben ist ein auf der Ebene der Kräfte in dem Mittelpunkte der letztern errichtetes Perpendikel; die andere ist die Verbindungslinie der beiden Angriffspunkte $(0, 0, 0)$ und $(x', 0, 0)$, und fällt daher jetzt mit der Axe der x zusammen.

§. 141.

Dass, wenn ein der Wirkung nur zweier Kräfte unterworfener Körper um eine der beiden im vorigen §. gefundenen Axen gedreht wird, die zwei Kräfte gleichwirkend mit zwei an der jedesmaligen Axe selbst angebrachten Kräften bleiben, die von unveränderlicher Lage und Intensität sind, dies ist für die Axe, welche durch die Angriffspunkte der zwei gegebenen Kräfte geht, von selbst klar. Dass aber dasselbe auch für die andere Axe gilt, welche auf der mit beiden Kräften parallelen Ebene normal steht, erhellet ohne Hülfe des Calculs auf folgende Weise.

Seyen PQ und $P'Q'$ (Fig. 44.) die beiden Kräfte, P und P' ihre Angriffspunkte, MN eine durch PQ gelegte und mit $P'Q'$ parallele Ebene. RS sey die rechtwinklige Projection von $P'Q'$ auf MN, und $RT = SR$ in der Verlängerung von SR. Von PQ und RS sey A der Mittelpunkt und AF die Resultante. Alsdann sind bei der Drehung um eine in A auf MN normal errichtete Axe AB die Kräfte PQ und $P'Q'$ gleichwirkend mit PQ, RS, $P'Q'$ und RT, also gleichwirkend mit der an der Axe selbst angebrachten Kraft AF und dem Paare $P'Q'$, RT. Da die Angriffspunkte P', R der Kräfte dieses Paares in einer Parallele mit der Axe AB liegen, so bleibt die Ebene des Paares bei der Drehung sich parallel, mithin seine Wirkung ungeändert und eben so gross als die Wirkung eines ihm parallelen Paares, welches dasselbe Moment hat, und von dessen Kräften die Angriffspunkte in AB fallen. Sind daher BC, AD die Kräfte dieses neuen Paares, so sind PQ und $P'Q'$ bei der Drehung des Körpers um AB fortwährend gleichwirkend mit den an AB selbst angebrachten Kräften AF, BC, AD, d. i. mit den zweien AG, BC, wenn AG die in A angebrachte Resultante von AF und AD ist.

Wiewohl nun hiermit auch synthetisch erwiesen worden, dass die zwei vorhin durch Analysis gefundenen Axen die den Hauptaxen zukommenden Eigenschaften besitzen, so erhellet doch aus diesen synthetischen Betrachtungen noch keineswegs, dass ausser diesen zwei Hauptaxen keine dritte existirt. Eben dieser Umstand aber wird uns sogleich zu neuen, für die Theorie der Hauptaxen überhaupt sehr fruchtreichen, Folgerungen hinleiten.

§. 142.

Auf den in den zwei vorigen §§. umständlich betrachteten Fall, wenn das System nur aus zwei Kräften besteht, lässt sich auch der zusammengesetztere Fall zurückführen, wenn alle auf den Körper wirkenden Kräfte $P, P', P'', \ldots$ einer und derselben Ebene parallel sind. — Man ziehe in dieser Ebene zwei unter beliebigem Winkel sich schneidende Gerade und zerlege parallel mit denselben jede Kraft in ihrem Angriffspunkte in zwei andere: P in X und Y; P' in X' und Y'; u. s. w. Von den parallelen Kräften $X, X', \ldots$ suche man den Mittelpunkt, welcher A heisse; eben so von den parallelen Kräften den Mittelpunkt B, und setze noch $X+X'+\ldots=X_1$ und $Y+Y'+\ldots=Y_1$. Alsdann sind, wie auch der Körper verrückt werden mag, die Kräfte $P, P', \ldots$ gleichwirkend mit den Kräften $X, X', \ldots$; $Y, Y', \ldots$, und diese immer gleichwirkend mit den Kräften X_1 und Y_1, deren Angriffspunkte resp. A und B sind. Dieselben zwei Hauptaxen, welche dem Systeme der zwei Kräfte X_1 und Y_1 zukommen, müssen folglich auch den Kräften $P, P', \ldots$ angehören. Die eine Hauptaxe der Kräfte $P, P', \ldots$ ist daher AB; die andere steht auf der Ebene, mit welcher die Kräfte parallel sind, normal und trifft diese Ebene in dem Mittelpunkte der auf sie projicirten Kräfte X_1 und Y_1, oder, was auf dasselbe hinauskommt, in dem Mittelpunkte der auf die Ebene projicirten Kräfte $P, P', \ldots$

Ausser diesen zwei Hauptaxen giebt es keine dritte. Wie daher auch in der Ebene, mit welcher $P, P', \ldots$ parallel sind, die zwei Geraden gezogen werden, mit denen parallel jede Kraft P in zwei andere, X und Y, zerlegt wird, so muss doch immer der Mittelpunkt A

der parallelen Kräfte X, X', ... und der Mittelpunkt der parallelen Kräfte Y, Y', ... in eine und dieselb Gerade fallen.

§. 143.

Wir sind hiermit unerwarteter Weise zu eine merkwürdigen Satze gelangt, der, unabhängig von de Begriffe der Gleichgewichtsaxen, sich auch ohne Zu hülfenahme der Theorie derselben beweisen lassen mü Wir wollen diesen Beweis zuerst für den einfachere Fall führen, wenn die Kräfte in einer Ebene enthalte sind, wo der Satz folgendergestalt lauten wird:

Hat man ein System von Kräften in einer Ebe und zerlegt jede Kraft an ihrem Angriffspunkt parallel mit zwei einander nicht parallelen Rich tungen in der Ebene in zwei andere, so ist die Ge rade, welche die zwei Mittelpunkte der mit der eine und der mit der andern Richtung parallelen Kräf verbindet, immer dieselbe, wie auch die zwei sic schneidenden Richtungen in der Ebene genomme seyn mögen; oder, wie dieser Satz auch noch ausge drückt werden kann:

Werden durch die Angriffspunkte in einer Ebe wirkender Kräfte Parallelen mit einer beliebige Richtung in der Ebene gezogen und auf diese Par allelen die Kräfte durch Parallelen mit einer ander Richtung in der Ebene projicirt, so ist der Ort d Mittelpunkts der projicirten Kräfte eine gera Linie.

Beweis. Zuerst ist klar, dass, wenn mehre parallele Kräfte X, X', ..., mögen sie in einer Ebe enthalten seyn, oder nicht, auf Linien projicirt werde die, mit irgend einer andern Richtung parallel, dur

die Angriffspunkte der Kräfte gelegt sind, die projicirten Kräfte $\Xi, \Xi', \ldots$ denselben Mittelpunkt A, als die erstern Kräfte, haben. Dies folgt sogleich daraus, dass, um den Mittelpunkt eines Systems paralleler Kräfte zu finden, es schon hinreicht, die Angriffspunkte der Kräfte und die Verhältnisse ihrer Intensitäten zu einander zu kennen. Die Kräfte $X, X', \ldots$ haben aber mit resp. $\Xi, \Xi', \ldots$ einerlei Angriffspunkte, und vermöge der Natur der Projectionen stehen letztere Kräfte in denselben Verhältnissen zu einander, wie die erstern; folglich u. s. w.

Seyen nun $P, P', \ldots$ mehrere Kräfte in einer Ebene von beliebigen Richtungen. Man zerlege jede derselben in ihrem Angriffspunkte parallel mit zwei unter beliebigem Winkel sich schneidenden Richtungen in zwei: P in X und Y, P' in X' und Y', etc. und sey von den parallelen Kräften $X, X', \ldots$ der Mittelpunkt A, von $Y, Y', \ldots$ der Mittelpunkt B.

Man ziehe durch die Angriffspunkte Parallelen mit einer willkührlichen dritten Richtung in der Ebene und projicire auf sie sämmtliche Kräfte $P, P', \ldots$; $X, X', \ldots$; $Y, Y', \ldots$ durch Parallelen mit irgend einer vierten Richtung. Heissen diese Projectionen resp. $\Pi, \Pi', \ldots$; $\Xi, \Xi', \ldots$; $H, H', \ldots$ Alsdann fallen Π, Ξ, H in dieselbe Gerade, haben mit P einerlei Angriffspunkt und es ist, weil X und Y, P zur Resultante haben, Π die Resultante von Ξ und H (§. 40.), folglich $\Pi = \Xi + H$. Dasselbe gilt auch von den Projectionen der übrigen Kräfte $P', \ldots$ Das System der Kräfte $\Pi, \Pi', \ldots$ ist daher ganz identisch mit dem System $\Xi, H, \Xi', H', \ldots$ und hat mit ihm einerlei Mittelpunkt. Nach dem vorhin Bemerkten ist aber der Mittelpunkt von $\Xi, \Xi', \ldots$ einerlei mit dem Mittelpunkte A von $X, X', \ldots$, und

der Mittelpunkt von H, H' ... einerlei mit dem Mittelpunkte B von Y, Y',... Der Mittelpunkt von Ξ, Ξ', ... H, H',... in Vereinigung, d. i. der Mittelpunkt von Π, Π',..., fällt folglich immer in die Gerade AB, welches auch die Richtung seyn mag, mit welcher Π, Π',... parallel laufen.

§. 144.

Es lässt sich schon voraussehen, dass der Satz des vorigen §. auch auf ein System von Kräften im Raume sich ausdehnen lassen und hier also lauten wird:

Zieht man durch die Angriffspunkte nach beliebigen Richtungen im Raume wirkender Kräfte Parallelen mit irgend einer Richtung (p) *und projicirt darauf die Kräfte durch Linien, welche einer und derselben Ebene parallel sind, so ist der Ort des Mittelpunkts der projicirten Kräfte einer Ebene.*

Der Beweis hiervon ist dem vorigen ganz ähnlich. Sey P eine der Kräfte des Systems. Man zerlege sie in ihrem Angriffspunkte parallel mit drei beliebigen Axen in X, Y, Z, und verfahre eben so mit jeder der übrigen Kräfte. Seyen resp. A, B und C die Mittelpunkte der parallelen Kräfte X, der parallelen Y und der Z.

Die Projectionen von P, X, Y, Z auf die durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt dieser vier Kräfte mit der Richtung p gezogene Parallele seyen Π, Ξ, H, Ψ, so ist $\Pi = \Xi + H + \Psi$, und daher der Mittelpunkt aller Π einerlei mit dem Mittelpunkte aller Ξ, Y und Ψ. Zufolge des Satzes, welcher gleich zu Anfange des Beweises im vorigen §. aufgestellt wurde, haben aber die Kräfte Ξ denselben Mittelpunkt A, welcher den Kräften X zukommt, und eben so sind B und C die

Mittelpunkte der Kräfte H und der Kräfte Ψ. Folglich muss der Mittelpunkt der parallelen Projectionen Π mit A, B, C in einer Ebene liegen.

§. 145.

Den in den zwei vorigen §§. bewiesenen Sätzen gemäss, wollen wir bei einem Systeme von Kräften in einer Ebene die Gerade der Ebene, in welche der Mittelpunkt der mit irgend einer Richtung parallelen Projectionen der Kräfte immer zu liegen kommt, die Centrallinie, und bei Kräften im Raume die Ebene, in welche der Mittelpunkt der parallelen Projectionen stets fällt, die Centralebene des Systems nennen.

Jedes System von Kräften, — nur darf es weder im Gleichgewichte seyn, noch sich auf ein Paar reduciren, — hat daher, je nachdem es in einer Ebene oder im Raume enthalten ist, eine Centrallinie oder eine Centralebene. Doch kann es auch geschehen, dass bei einem Systeme in einer Ebene die Mittelpunkte A und B von den X und den Y, also auch die damit identischen von den Ξ und den H, zusammenfallen, und daher der Mittelpunkt der parallelen Projectionen Π immer derselbe Punkt ist, und dass bei einem System im Raume die Punkte A, B, C wo nicht coincidiren, doch in eine Gerade zu liegen kommen, und folglich der Mittelpunkt der parallelen Projectionen immer in dieselbe Gerade fällt.

Letzteres geschieht unter andern, wenn, wie in §. 142., die Kräfte des Systems einer und derselben Ebene parallel sind. Denn hier kann jede Kraft nach zwei mit der Ebene parallelen Richtungen in zwei andere, folglich das ganze System in zwei Systeme paralleler

Kräfte zerlegt werden, und es zeigt sich dann wie i
Vorigen, dass mit den Mittelpunkten dieser zwei S
steme der Mittelpunkt der nach irgend einer ande
Richtung projicirten Kräfte des ursprünglichen Syste
immer in einer Geraden liegt.

Bei einem Systeme mit einer Ebene parallel Kräfte, desgleichen bei Kräften, die in einer u derselben Ebene wirken, ist demnach die Centrallin des Systems die eine Hauptaxe.

§. 146.

Bei einem Systeme von Kräften im Raume ist der Centralebene des Systems eine Linie noch besonde zu beachten. Zerlegt man nämlich jede Kraft P X, Y, Z parallel mit drei Axen x, y, z, von denen auf der Centralebene normal ist, x und y aber in d Ebene selbst liegen, und sind A und B die Mittelpunk aller X und aller Y, so werden diese Punkte imm in dieselbe Gerade der Ebene fallen, wie auch die Ax x und y in der Ebene genommen seyn mögen, in d Centrallinie nämlich der mit derselben Ebene parallel Kräfte $(X, Y, 0)$, $(X', Y', 0)$, etc. Heisse diese G rade die Centrallinie der Centralebene.

Auf gleiche Art wollen wir auch, wenn von d mit der Centralebene parallelen Kräften X, X',... u Y, Y',... die einen auf der Centrallinie normal, d andern mit ihr parallel genommen werden, den Mitte punkt der mit der Centrallinie parallelen Kräfte de Centralpunkt der Centrallinie nennen.

§. 147.

Um hiervon eine Anwendung zunächst auf ein S stem von Kräften P, P',... in einer Ebene zu mache

setze man, nachdem jede Kraft P parallel mit zwei rechtwinklichen Coordinatenaxen in X und Y zerlegt worden, die Coordinaten des Mittelpunktes der X, $= p, q$, und die Coordinaten des Mittelpunktes der Y, $= p', q'$. Alsdann ist (§. 108.)

$$p = \frac{\Sigma xX}{\Sigma X},\ q = \frac{\Sigma yX}{\Sigma X},\ p' = \frac{\Sigma xY}{\Sigma Y},\ q' = \frac{\Sigma yY}{\Sigma Y}.$$

Die Gerade durch die Punkte (p, q) und (p', q') ist die Centrallinie des Systems. Nehmen wir sie zur Axe der x, so werden q und $q' = 0$, also $\Sigma yX = 0$ und $\Sigma yY = 0$, und der Centralpunkt des Systems ist der Mittelpunkt $(p, 0)$ der jetzt mit der Centrallinie parallel laufenden X. Wir wollen ihn zum Anfangspunkte der Coordinaten wählen, und daher noch $p = 0$, also $\Sigma xX = 0$ setzen. Hiermit wird $h = \Sigma(xX + yY) = 0$, und die Ausdrücke in §. 125. für die Coordinaten des Mittelpunkts der Kräfte $P, P', \ldots$ reduciren sich auf

$$x_1 = \frac{BN}{A^2 + B^2},\ y_1 = \frac{-AN}{A^2 + B^2},$$

wo $A = \Sigma X$, $B = \Sigma Y$ und $N = \Sigma xY$. Es folgt hieraus:

$$Ax_1 + By_1 = 0,$$

woraus wir ersehen, *dass bei einem Systeme von Kräften in einer Ebene, die durch den Centralpunkt* (0, 0) *und* den Mittelpunkt (x_1, y_1) der Kräfte d. i. *den Durchschnitt der einen Hauptaxe mit der Ebene geführte Gerade die Resultante* (A, B) *der Kräfte rechtwinklig schneidet.* Die andere Hauptaxe ist, wie schon bemerkt worden, die Centrallinie selbst.

§. 148.

So wie bei einem Systeme von Kräften in einer Ebene die beiden Hauptaxen mit der Centrallinie und

dem Centralpunkte in genauer Verbindung stehen, so lässt sich erwarten, dass auch bei einem Systeme von Kräften im Raume eine solche Verbindung statt finden und sich daher unsere Rechnung sehr vereinfachen werde, wenn wir bei der Wahl der Coordinatenaxen die Centralebene, die Centrallinie und den Centralpunkt zum Grunde legen.

Sey, wie im Vorigen, jede Kraft P des Systems in ihrem Angriffspunkte (x, y, z) in drei Kräfte X, Y, Z nach den Richtungen dreier sich rechtwinklig schneidenden Coordinatenaxen zerlegt, und seyen in Bezug auf dieses Coordinatensystem (p, q, r), (p', q', r') und (p'', q'', r'') die resp. Mittelpunkte der einander parallelen Kräfte X, der Kräfte Y und der Kräfte Z. Alsdann ist mit Anwendung der Bezeichnungen [1]:

$$p = \frac{\Sigma x X}{\Sigma X} = \frac{g+h-f}{2A},$$

$$q = \frac{\Sigma y X}{\Sigma X} = \frac{H'}{A}, \quad r = \frac{\Sigma z X}{\Sigma X} = \frac{G}{A};$$

und eben so findet sich:

$$p' = \frac{H}{B}, \quad q' = \frac{h+f-g}{2B}, \quad r' = \frac{F'}{B},$$

$$p'' = \frac{G'}{C}, \quad q'' = \frac{F}{C}, \quad r'' = \frac{f+g-h}{2C}.$$

Wir wollen nun das Coordinatensystem so gelegt annehmen, dass erstlich die Ebene der x, y mit der Centralebene zusammenfällt, und dass daher $r, r', r'' = 0$ sind. Da hiermit die Kräfte Z auf der Centralebene normal stehen, so ist die Gerade durch $(p, q, 0)$ und $(p', q', 0)$ die Centrallinie; sie werde zur Axe der x genommen und daher $q, q' = 0$ gesetzt. Endlich werde der Centralpunkt, der jetzt $(p, 0, 0)$ zum Ausdrucke hat,

zum Anfangspunkte der Coordinaten gewählt, wodurch noch $p=0$ wird.

Bei dieser im Allgemeinen immer möglichen Annahme des Coordinatensystems sind also p, q, r, q', r', r'' insgesammt $=0$. Es folgt aber aus der Nullität von r', r, q:

$$F'=0,\ G=0,\ H'=0,$$

und daraus, dass $p, q', r''=0$ sind:

$$f=0,\ g=0,\ h=0.$$

Hiermit ziehen sich die Werthe [9] der vier Hülfsgrössen $L, \dots O$ zusammen in:

$$L=-H\mu-G'\nu,\ M=-F\nu,\ N=0,$$
$$O=F\lambda-G'\mu+H\nu,$$

und die zwei Gleichungen [14] und [15] für die Verhältnisse zwischen λ, μ, ν werden nach Substitution dieser Werthe:

$$[14^*]\quad AF\lambda^2-(BG'-CH)\mu^2+(AF-BG'+CH)\nu^2$$
$$+AH\nu\lambda-(AG'-BF)\lambda\mu=0,$$

$$[15^*]\quad AH\mu+(AG'+BF)\nu=0.$$

Letztere Gleichung kann als eine Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten λ, μ, ν für die Ebene angesehen werden, welche, durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegt, mit den beiden Hauptaxen parallel ist (§. 139.). Da in dieser Gleichung der Coefficient von $\lambda=0$, und folglich die Axe der x, d. i. die Centrallinie, in dieser Ebene enthalten ist, so schliessen wir:

Bei einem Systeme von Kräften im Raume sind die zwei Hauptaxen der Drehung und die Centrallinie einer und derselben Ebene parallel.

Aus der Gleichung $N=0$ folgt noch in Verbindung mit [12]: $A\eta-B\xi=0$. Für den Durchschnitt einer

der beiden Hauptaxen mit der Ebene der x, y od der Centralebene ist $x_1 = 0$, und daher nach [1 $\xi = -y_1 \nu$, $\eta = x_1 \nu$. Hiermit wird jene Gleichung:

$$Ax_1 + By_1 = 0.$$

Die Linie durch den Centralpunkt (0, 0, 0) und d gedachten Durchschnitt $(x_1, y_1, 0)$ macht folglich m der Projection von (A, B, C) auf die Centralebene, al auch mit (A, B, C) selbst, einen rechten Winkel; u da dasselbe auch von der andern Hauptaxe gilt, folgern wir:

Die Punkte, in denen die beiden Hauptaxen d Centralebene schneiden, liegen mit dem Centralpunk in einer Geraden, und diese Gerade ist normal a der Resultante aller Kräfte des Systems, wenn di parallel mit ihren Richtungen an einen und denselb Punkt verlegt werden.

Man sieht ohne Mühe, dass dieser Satz die Erwe terung von der in §. 147 für ein System in einer Ebe gefundenen Eigenschaft ist.

§. 149.

Ohne uns bei der nähern Bestimmung der Lag der beiden Hauptaxen länger zu verweilen, wollen w noch den speciellen Fall in Untersuchung ziehen, wen die Kräfte des Systems eine einzige Kraft zur Resu tante haben. Die Bedingungsgleichung dafür (§. 71 in den jetzigen Zeichen ausgedrückt, ist:

$$A(F-F') + B(G-G') + C(H-H') = 0,$$

die sich bei der jetzt angenommenen Lage des Coord natensystems, wo $F', G, H' = 0$ sind, in

$$AF - BG' + CH = 0$$

zusammenzieht. Hiermit wird die Gleichung [14*]:

$$AF(\lambda^2-\mu^2)+AH\nu\lambda-(AG'-BF)\lambda\mu=0.$$

Eliminirt man daraus ν mittelst der unverändert bleibenden Gleichung [15*], so kommt:

$$[16]\quad \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2+\frac{A^2H^2+A^2G'^2-B^2F^2}{AF(AG'+BF)}\cdot\frac{\mu}{\lambda}-1=0.$$

Diese Gleichung, nach $\frac{\mu}{\lambda}$ aufgelöst, hat immer zwei reelle Wurzeln, daher denn bei einem Systeme von Kräften, welche eine einfache Resultante haben, es immer zwei reelle Hauptaxen der Drehung giebt.

Nach §. 139. ist aber die Gleichung $y_1\lambda-x_1\mu=\zeta$ in [16], wenn man darin für ζ seinen Werth aus [13] substituirt, die Gleichung der Projection einer Hauptaxe auf die Ebene der x, y, und folglich $\frac{\mu}{\lambda}=$ der Tangente des Winkels dieser Projection mit der Axe der x. In der für $\frac{\mu}{\lambda}$ erhaltenen quadratischen Gleichung ist nun das Product aus ihren beiden Wurzeln, also das Produkt aus den Tangenten der Winkel, welche die Projectionen der einen und andern Hauptaxe mit der Axe der x machen, $=-1$, und daher die Differenz beider Winkel einem Rechten gleich, d. h. die rechtwinkligen Projectionen der beiden Hauptaxen auf die Centralebene schneiden sich unter rechten Winkeln.

§. 150.

Um noch andere Eigenschaften der beiden Hauptaxen eines Systems, welches eine einfache Resultante hat, kennen zu lernen, wollen wir die Resultante zu einer der Coordinatenaxen, zur Axe der x z. B., wählen. Hiernach müssen

$$F'-F=0,\quad G'-G=0,\quad H'-H=0,\quad A=0,\quad B=0$$

seyn, indem erstere drei Gleichungen die Bedingungen ausdrücken, unter denen die Resultante durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht (§. 71.), letztere zwei aber die Bedingungen, unter denen die Resultante die Richtung der Axe der x hat. Hiermit werden [9]:

$$L = f\lambda - H\mu - G\nu,\ M = g\mu - F\nu - H\lambda,$$
$$N = h\nu - G\lambda - F\mu,\ O = 0,$$

und damit [14] und [15]: $L\mu - M\lambda = 0$ und $N = 0$, d. i.

$$H(\lambda^2 - \mu^2) - G\mu\nu + F\lambda\nu + (f - g)\lambda\mu = 0,$$
$$h\nu - G\lambda - F\mu = 0.$$

Die Elimination von ν aus diesen zwei Gleichungen giebt:

$$[16^*]\ \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 - \frac{F^2 - G^2 + fh - gh}{FG + Hh} \cdot \frac{\mu}{\lambda} - 1 = 0,$$

eine Gleichung, woraus ähnlicher Weise, wie aus [16], zu schliessen, dass ein System mit einer einfachen Resultante immer zwei Hauptaxen hat, und dass die Projectionen dieser Axen auf eine die Resultante normal treffende Ebene (als die jetzige Ebene der x, y) sich unter rechten Winkeln schneiden.

Die Gleichungen [12], welche die Lage der Hauptaxen näher bestimmen, werden jetzt:

$$L = -C\eta,\ M = C\xi,\ 0 = \zeta,$$

von denen die dritte: $\zeta = 0$, d. i. $y_1\lambda - x_1\mu = 0$, zu erkennen giebt, dass jede der beiden Hauptaxen die Axe der x, d. i. die Resultante, schneidet, wie auch schon ohnedies einleuchtet. Denn die zwei Kräfte (X_1, Y_1, Z_1) und (X_2, Y_2, Z_2), die, an den Punkten (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Hauptaxe angebracht, zur Herstellung des Gleichgewichts und zu seiner Erhaltung während der Drehung um die Hauptaxe erforderlich sind, müssen

der einfachen Resultante des Systems das Gleichgewicht halten, und dieses ist nicht anders möglich, als wenn sie beide, und folglich auch die von ihnen getroffene Hauptaxe, mit der Resultante in einer Ebene liegen.

Da übrigens die zwei Kräfte bei der Drehung des Körpers um die Hauptaxe ihre Lage nicht ändern, so wird auch die Resultante ihre anfängliche Lage unverändert behalten und mithin die Hauptaxe fortwährend in demselben Punkte schneiden.

Zur bessern Uebersicht wollen wir noch die Ergebnisse dieses und des vorigen §. in folgendem Satze vereinigt darstellen.

Wenn ein auf einen freien Körper wirkendes System von Kräften eine einfache Kraft zur Resultante hat, so lassen sich in der Richtung dieser Kraft zwei Punkte und zwei durch diese Punkte gehende Axen angeben von der Beschaffenheit, dass, wenn der Körper um die eine oder die andere Axe gedreht wird, während die Kräfte auf ihre Angriffspunkte mit unveränderter Richtung und Intensität zu wirken fortfahren, das System mit einer einzigen Kraft, die mit der anfänglichen Resultante der Lage und Intensität nach identisch ist, gleichwirkend bleibt; dass folglich, wenn der Körper in dem einen oder dem andern jener Punkte befestigt wird, ein Gleichgewicht entsteht, welches durch Drehung des Körpers um die dem Punkte zugehörige Axe nicht aufgehoben wird.

Diese zwei Axen haben übrigens eine solche Lage, dass e r s t e n s *ihre Projectionen auf eine die Resultante normal treffende Ebene, so wie* z w e i t e n s *ihre Projectionen auf die Centralebene, sich recht-*

winklig schneiden, dass drittens eine mit den beiden Axen parallele Ebene zugleich mit der Centrallinie parallel ist, und dass viertens die zwei Punkte, in denen die Centralebene von den Axen getroffen wird, mit dem Centralpunkte in einer Geraden liegen, welche mit der Resultante rechte Winkel bildet.

---

§. 151.

So wie es demnach bei einem Systeme paralleler Kräfte in der im Allgemeinen ihm zukommenden einfachen Resultante einen Mittelpunkt, d. h. einen solchen Punkt giebt, dass, wenn er fest gemacht wird, das dadurch entstehende Gleichgewicht bei beliebiger Drehung des Körpers um diesen Punkt nicht aufhört, so giebt es ähnlicher Weise bei einem Systeme nicht paralleler Kräfte, welche sich auf eine einzige Kraft reduciren lassen, in dieser Resultante zwei solcher Mittelpunkte, nur mit dem Unterschiede, dass jedem derselben eine bestimmte Axe zukommt, um welche der Körper gedreht werden muss, wenn das durch Festmachung des einen oder des andern Punktes erzeugte Gleichgewicht durch die Drehung nicht aufgehoben werden soll.

Ist das System nicht anders als auf zwei Kräfte reducirbar, so reicht es zur Herstellung des Gleichgewichts nicht mehr hin, einen einzigen Punkt fest zu machen, sondern es müssen dann zwei in den zwei Resultanten genommene Punkte, oder die durch diese Punkte gehende Gerade, unbeweglich gemacht werden, und solcher Geraden, welche zugleich die Eigenschaft besitzen, dass, wenn der Körper um sie gedreht wird, das Gleichgewicht fortdauert, und dass die Drückungen, welche sie erleiden, ihrer Richtung und Stärke nach

unverändert bleiben, solcher Axen giebt es nach §. 139. entweder zwei oder gar keine.

Wenn dagegen, was ausdrücklich noch bemerkt werden muss, bloss dieses gefordert wird, dass durch Befestigung einer Axe des Körpers Gleichgewicht entsteht, und dieses Gleichgewicht bei Drehung um die Axe fortdauert, und wenn nicht zugleich Unveränderlichkeit der Richtung und Stärke des während der Drehung von den Kräften auf die Axe ausgeübten Druckes verlangt wird, so kann die Axe jeder beliebigen Richtung parallel seyn.

Sey nämlich *MN* (Fig. 42.) eine beliebig gegebene Ebene, auf welcher die Axe normal seyn soll. Nach §. 132. kann dann für jede Kraft *PQ* des Systems substituirt werden: ihre Projection *TU* auf *MN*, ihre Projection *PS* auf eine durch *P* mit der Axe gezogene Parallele, und das Paar *PR*, *TO*, von dessen Kräften die Angriffspunkte *P*, *T* in einer Parallele mit der Axe liegen. Ist nun die Axe fest, so können die Kraft *PS* und das Paar *PR*, *TO* auch während der Drehung des Körpers um die Axe keine Bewegung hervorbringen. Denn die Ebene des Paares bleibt immer der Axe parallel, und das Paar ist daher stets gleichwirkend mit einem Paare, dessen Kräfte an der Axe selbst angebracht sind. Ist ferner *AB* die Axe selbst, und nimmt man darin $FG = PS$, so ist das Paar *PS*, *GF* gleichwirkend mit dem Paare *SG*, *FP* (§. 20.), folglich *PS* gleichwirkend mit *FG* und dem Paare *SG*, *FP*. Die Kraft *PS* kann mithin keine Bewegung erzeugen, da *FG* in der Axe selbst wirkt, und die Kräfte *SG*, *FP* des Paares sowohl anfänglich, als bei der nachherigen Drehung, die Axe immer treffen.

Bei Drehung des Körpers um die feste Axe *AB* ist daher die in *P* angebrachte Kraft *PQ* von gleicher Wirkung mit der auf *T* wirkenden Kraft *TU*, d. h. mit ihrer Projection auf irgend eine die Axe rechtwinklig schneidende Ebene *MN*.

Soll demnach bei Drehung des Körpers um eine feste Axe, welche auf der gegebenen Ebene *MN* normal steht, immer Gleichgewicht herrschen, ohne Rücksicht darauf, ob der Druck, der auf die Axe während der Drehung ausgeübt wird, stets derselbe bleibt, oder nicht, so projicire man sämmtliche Kräfte mit ihren Angriffspunkten auf die Ebene *MN* und suche von diesen Projectionen den Mittelpunkt *A*; und es wird zufolge der Eigenschaft dieses Punktes eine in ihm auf *MN* errichtete Normale *AB* die gesuchte Axe seyn.

§. 152.

Zusätze. *a*. Dass die somit bestimmte Axe bei der Drehung im Allgemeinen einen veränderlichen Druck erleidet, ist leicht einzusehen. Denn dieser Druck wird hervorgebracht von den Resultanten 1) der Kräfte *TU*, 2) der Paare *PR*, *TO*, 3) der Kräfte *FG* und 4) der Paare *SG*, *FP*. Nun bleiben die drei erstern Resultanten, und folglich auch der von ihnen auf die Axe ausgeübte Druck, unverändert. Denn der Hypothese zufolge geht die Resultante aller *TU* fortwährend durch *A* selbst und ändert weder ihre Richtung noch Intensität. Die Paare *PR*, *TO* bleiben, bei der Drehung, der Axe und sich selbst parallel und wirken daher auf die Axe unausgesetzt auf dieselbe Weise. Eben so wenig können die längs der Axe selbst gerichteten Kräfte *FG* ihre Wirkung ändern. Dagegen werden die Paare *SG*, *FP*, und folglich auch ihre Resultante,

bei der Drehung des Körpers um einen eben so grossen Winkel mit gedreht und drücken daher die Axe nach immer andern Richtungen. — Nur dann also, wenn letztere Paare *SG*, *FP* sich das Gleichgewicht halten, ist die Axe fortwährend demselben Druck unterworfen; sie ist dann eine Hauptaxe der Drehung.

b. Unter allen Richtungen, mit denen die feste Axe parallel seyn kann, ist allein die Richtung der Hauptlinie des Systems (§. 82.) ausgenommen. Denn die Projectionen der Kräfte auf eine die Hauptlinie rechtwinklig schneidende Ebene reduciren sich im Allgemeinen auf ein Paar, und es ist daher unmöglich, durch Befestigung der Hauptlinie oder einer mit ihr parallelen Axe Gleichgewicht zu erhalten.

Ist ein solches Paar nicht vorhanden, sondern halten sich die Projectionen das Gleichgewicht, so hat das System eine einfache Resultante, deren Richtung die der Hauptlinie ist. Alsdann wird zwar durch Befestigung einer mit der Hauptlinie parallelen Axe ein anfängliches Gleichgewicht hervorgebracht; dasselbe geht aber sogleich bei der nachherigen Drehung verloren, — es müsste denn von den sich das Gleichgewicht haltenden Projectionen der Angriffspunkt einer jeden der Mittelpunkt der jedesmal übrigen seyn. Denn in diesem speciellen Falle hat jede mit der Hauptlinie parallele Axe die Eigenschaft, dass, wenn sie unbeweglich gemacht wird, ein auch bei der Drehung dauerndes Gleichgewicht entsteht.

---

§. 153.

Der Vollständigkeit wegen ist noch zu untersuchen übrig, ob und wenn sich bei einem Systeme, welches

mit einem Paare gleichwirkend ist, Hauptaxen der Drehung angeben lassen. Alsdann sind $A, B, C=0$, und die Gleichungen [12] reduciren sich hiermit auf: $L, M, N, O=0$, d. i. wegen [9]:

$$[17]\quad \begin{cases} f\lambda - H\mu - G'\nu = 0, \\ g\mu - F\nu - H'\lambda = 0, \\ h\nu - G\lambda - F'\mu = 0, \\ (F - F')\lambda + (G - G')\mu + (H - H')\nu = 0. \end{cases}$$

Hiermit haben wir vier Gleichungen zwischen den zwei die Richtung der Hauptaxe bestimmenden Verhältnissen $\lambda:\mu$ und $\mu:\nu$, jede vom ersten Grade, erhalten; die Coordinaten der Angriffspunkte der zwei hinzuzufügenden Kräfte sind aber ganz herausgegangen. Dies führt uns zu der Folgerung, *dass bei einem Systeme, welches sich auf ein Paar reducirt, nur dann Hauptaxen der Drehung vorhanden sind, wenn die zwei Gleichungen erfüllt werden, welche nach Elimination von λ, μ, ν aus den vier Gleichungen* [17] *hervorgehen; und dass, wenn diesen zwei Gleichungen Genüge geschieht, jede Gerade, welche mit der durch λ, μ, ν aus zweien der vier Gleichungen bestimmten Richtung parallel ist, als Hauptaxe dienen kann.*

Die hierzu nöthige Rechnung lässt sich dadurch noch sehr vereinfachen, dass man die Ebene des mit dem Systeme gleichwirkenden Paares zu einer der Coordinatenebenen wählt. Nach §. 70. hat die Ebene des resultirenden Paares, wenn sie durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegt wird, die Gleichung:

$$(F-F')x + (G-G')y + (H-H')z = 0.$$

Nehmen wir daher diese Ebene zur Ebene der x, z, deren Gleichung $y=0$ ist, so wird $F=F'$ und $H=H'$.

Hiermit reducirt sich von den Gleichungen [17] die vierte auf

$$\mu = 0,$$

d. h. *die Hauptaxen sind* mit der Ebene der x, z, also *mit der Ebene des resultirenden Paares, parallel;* die drei ersten Gleichungen aber werden:

$$f\lambda - G'\nu = 0,\ F\nu + H\lambda = 0,\ h\nu - G\lambda = 0,$$

und es müssen die drei hieraus folgenden Werthe des Verhältnisses $\lambda : \nu$ einander gleich seyn, also

$$G' : f = F : -H = h : G,$$

wenn Hauptaxen vorhanden seyn sollen.

Beispiel. Bestehe das System nur aus zwei Kräften, welche daher für sich ein Paar bilden müssen. Die Ebene dieses Paares nehme man zur Ebene der x, z, und setze hiernach die Kräfte: $(X, 0, Z)$, $(-X, 0, -Z)$, und ihre Angriffspunkte: $(x, 0, z)$, $(x', 0, z')$. Dies giebt nach [1]:

$$G' = (x - x')Z,\ f = (z - z')Z,\ F = 0,\ H = 0,$$
$$h = (x - x')X,\ G = (z - z')X.$$

Da diese Werthe von $G', \ldots G$ der vorigen Doppelproportion Genüge leisten, so hat gegenwärtiges System Hauptaxen; und da

$$\lambda : \nu = x - x' : z - z',$$

so sind sie parallel mit der die Angriffspunkte beider Kräfte verbindenden Geraden.

§. 154.

Soll ein System, welches auf ein Paar reducirbar ist, Hauptaxen des Gleichgewichts haben, und sollen diese parallel mit einer durch λ, μ, ν gegebenen Richtung seyn, so sind die vier Gleichungen [17] die Be-

dingungen, unter denen dieses möglich ist. Sollen daher die Hauptaxen parallel mit der Axe der x seyn, als für welche λ und $\mu = 0$ sind, so hat man als Bedingungen:

$$G' = 0,\ F = 0,\ h = 0,\ H - H' = 0, \text{ d. i.}$$
$$\Sigma xZ = 0,\ \Sigma yZ = 0,\ \Sigma(xX + yY) = 0,\ \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Wegen der zwei erstern, und weil zugleich $\Sigma Z = 0$, müssen die Projectionen der Kräfte auf Linien, die durch die Angriffspunkte der Kräfte gelegt und mit der Axe der x, also mit den Hauptaxen, parallel sind, für sich im Gleichgewichte seyn. Aus den zwei letztern Gleichungen aber folgt in Verbindung mit $\Sigma X = 0$ und $\Sigma Y = 0$, dass die Projectionen der Kräfte auf eine die Hauptaxen rechtwinklig schneidende Ebene einander das Gleichgewicht halten müssen, und dass dieses Gleichgewicht bei Drehung der Ebene in sich selbst, also auch bei Drehung des Körpers um eine der Hauptaxen, nicht verloren gehen darf (§. 122.).

Wir haben hiermit dieselben zwei Bedingungen erhalten, welche im Obigen (§. 132.) zur Fortdauer des schon anfänglich bestehenden Gleichgewichts bei der Axendrehung nöthig waren, und es erhellet leicht, wie diese Bedingungen für den jetzigen Fall, eben so wie für den früheren, auch durch die in §. 133 angewendete Construction hätten gefunden werden können. Auf ähnliche Art endlich, wie in §. 151., zeigt sich auch hier, dass, wenn die Axe, um welche der Körper gedreht werden soll, fest ist, und es nicht darauf ankömmt, dass sie einen der Richtung und Stärke nach unveränderlichen Druck erfahre, schon die Erfüllung der zweiten Bedingung, oder das fortdauernde Gleich-

gewicht zwischen den auf die normale Ebene projicirten Kräften, hinreichend ist.

Neuntes Kapitel.

Von der Sicherheit des Gleichgewichts.

§. 155.

Wenn mehrere auf einen frei beweglichen Körper wirkende Kräfte im Gleichgewichte sind, und der Körper um so wenig, als es auch sey, aus seiner Lage gebracht wird, während die Kräfte parallel mit ihren anfänglichen Richtungen und mit unveränderter Intensität auf ihre Angriffspunkte zu wirken fortfahren, so hört das Gleichgewicht im Allgemeinen auf und die Kräfte suchen den Körper entweder in seine anfängliche Lage zurückzubringen, oder sie streben ihn noch mehr davon zu entfernen. Im erstern Falle wird das Gleichgewicht sicher, stabil, genannt, im letztern unsicher, nicht stabil.

Die Lehre von der Sicherheit des Gleichgewichts, in ihrer ganzen Ausdehnung genommen, gehört nicht sowohl der Statik, als vielmehr der Mechanik an. Letztere Wissenschaft zeigt, dass, wenn das Gleichgewicht sicher ist, und wenn der aus der Lage des Gleichgewichts verrückte Körper durch die Kräfte in diese Lage zurückgebracht ist, er gleichwohl nicht darin verharrt, sondern vermöge der erlangten Geschwindigkeit sich eben so weit nach der entgegengesetzten Seite entfernt, aus der er dann abermals zurückgetrieben wird und somit, gleich einem Pendel, um die Lage

des Gleichgewichts hin und her Schwingungen macht. In der Natur werden diese Schwingungen wegen der Reibungen, denen die Bewegung des Körpers stets ausgesetzt ist, immer kleiner, hören zuletzt ganz auf, und der Körper kommt in der Lage des Gleichgewichts wieder zur Ruhe.

So wenig nun auch diese Bewegungen ein Gegenstand der Statik seyn können, so vermag doch diese Wissenschaft Regeln anzugeben, mittelst deren sich in jedem besondern Falle erkennen lässt, ob das Gleichgewicht im Zustande der Sicherheit oder der Unsicherheit ist.

§. 156.

Um uns die Sache zuerst an dem einfachsten Beispiele deutlich zu machen, wollen wir auf einen Körper nur zwei Kräfte P_1, P_2 wirken lassen. Ihre Angriffspunkte denke man sich in einer Verticalen liegend; A_1 sey der tiefere, A_2 der höhere Punkt. Wegen des Gleichgewichts, das zwischen den zwei Kräften statt finden soll, müssen sie einander gleich, und ihre Richtungen ebenfalls vertical, aber einander entgegengesetzt seyn. Dieses ist auf doppelte Weise möglich, jenachdem nämlich entweder die im obern Punkte A_2 angebrachte Kraft P_2 nach oben und die im untern Punkte A_1 angebrachte P_1 nach unten, oder P_2 nach unten und P_1 nach oben wirkt, jenachdem also die zwei Kräfte ihre Angriffspunkte von einander zu entfernen, oder einander näher zu bringen streben.

Wird nun der Körper verrückt, und die Linie $A_1 A_2$ dadurch aus der verticalen Lage gebracht, z. B. von der Linken nach der Rechten gedreht, so bilden jetzt die zwei Kräfte ein Paar, welches im erstern Falle

einen Sinn von der Rechten nach der Linken hat, also die Linie $A_1 A_2$ in die verticale Lage zurückzubringen strebt (Fig. 45. *a.*), im letztern Falle aber einen Sinn von der Linken nach der Rechten hat und mithin die Linie von der verticalen Lage noch mehr zu entfernen sucht (Fig. 45. *b.*). Im erstern Falle ist mithin das anfängliche Gleichgewicht sicher, im letztern unsicher, und wir erhalten damit den Satz:

Das Gleichgewicht zwischen zwei Kräften ist sicher oder unsicher, jenachdem die Kräfte ihre Angriffspunkte von einander zu entfernen oder einander zu nähern streben.

§. 157.

Zusätze. *a.* Zu noch mehrere Erläuterung des voranstehenden Satzes kann folgende Betrachtung dienen. — Wie auch die verticale Linie $A_1 A_2$ aus der verticalen Lage gebracht werden mag, so wird dadurch der gegenseitige Abstand ihrer Endpunkte, wenn man ihn nach verticaler Richtung schätzt, immer verkleinert. Wenn demnach die zwei nach verticalen Richtungen wirkenden Kräfte den Abstand der Endpunkte zu vergrössern streben, so werden sie den durch die Verrückung kleiner gewordenen Abstand auf seinen anfänglichen grössten Werth und die Linie $A_1 A_2$ in ihre anfängliche Lage zurückzubringen suchen; ihn aber noch mehr zu verkleinern und dadurch die Linie noch mehr von der verticalen Lage zu entfernen suchen, wenn schon vor der Verrückung das Streben der Kräfte auf Verkleinerung des Abstandes gerichtet war.

b. Die Bedingung für die Sicherheit des Gleichgewichts zwischen zwei Kräften kann man auch dadurch ausdrücken, dass die Richtung von dem einen Angriffs-

punkte A_1 zum andern A_2 mit der Richtung der auf den letztern wirkenden Kraft P_2, also auch die Richtung von A_2 nach A_1 mit der Richtung von P_1, einerlei seyn muss. Sind diese zwei Richtungen einander entgegengesetzt, so ist das Gleichgewicht unsicher. Oder kürzer, indem wir diese Bedingungen analytisch ausdrücken: das Gleichgewicht ist sicher oder unsicher, nachdem das Product $A_1 A_2 . P_2 = A_2 A_1 . P_1$ einen positiven oder negativen Werth hat.

c. Das zwischen zwei Kräften bestehende Gleichgewicht hört nur bei einer solchen Verrückung des Körpers auf, wodurch die Richtung der die Angriffspunkte der beiden Kräfte verbindenden Geraden geändert wird. Dreht man dagegen den Körper um diese Linie als um eine Axe, oder bewegt ihn parallel mit sich fort, so streben die zwei Kräfte den also verrückten Körper weder in seine anfängliche Lage zurückzuführen, noch von derselben noch mehr zu entfernen; das Gleichgewicht bleibt unverändert.

d. Wenn die zwei Angriffspunkte zusammenfallen, also die zwei Kräfte auf einen und denselben Punkt des Körpers wirken, so wird ihr Gleichgewicht durch keinerlei Verrückung aufgehoben; ein solches Gleichgewicht wollen wir ein dauerndes nennen.

§. 158.

Das in den zwei vorigen §§. behandelte Beispiel von der Sicherheit des Gleichgewichts, das einfachste, welches sich aufstellen lässt, wird uns zugleich als Grundlage für alle andern Fälle dienen, indem wir mit Hülfe der in den vorhergehenden Kapiteln vorgetragenen Theorieen von dem Mittelpunkte der Kräfte und den Axen des Gleichgewichts jedes zusammengesetztere

System auf ein System von nur zwei Kräften zurückführen werden. Wir wollen auch hier dieselbe Ordnung befolgen, in welcher jene Theorieen entwickelt worden sind, und daher zuerst die Sicherheit eines Systems paralleler Kräfte in Untersuchung nehmen.

Seyen $P, P', P'', \ldots$ mehrere mit einander parallel auf einen Körper wirkende und sich das Gleichgewicht haltende Kräfte; $A, A', A'', \ldots$ ihre Angriffspunkte. Man suche von allen Kräften, die eine P ausgenommen, den Mittelpunkt, welcher A_2 sey, so sind, wie auch der Körper verrückt werden mag, die Kräfte $P', P'', \ldots$ immer gleichwirkend mit einer einzigen in A_2 angebrachten Kraft $P_2 = P' + P'' + \ldots = -P$; folglich alle Kräfte des Systems $P, P', P'', \ldots$ bei jeder Verrückung gleichwirkend mit den zwei Kräften P und P_2, deren Angriffspunkte A und A_2 sind. Mithin wird auch das Gleichgewicht zwischen $P, P', P'', \ldots$ sicher oder unsicher seyn, jenachdem es das Gleichgewicht zwischen P und P_2 ist, jenachdem also die Richtung von A_2 nach A mit der Richtung von P einerlei oder ihr entgegengesetzt ist.

Denken wir uns z. B. unter $P', P'', \ldots$ die Wirkungen der Schwerkraft auf die einzelnen Theile eines Körpers, und ist daher A_2 der Schwerpunkt und P_2 das Gewicht des Körpers (§. 110.), P aber die der Schwerkraft direct entgegen, also nach oben zu, wirkende und den Körper vor dem Fallen schützende Kraft, so muss A_2A nach oben gerichtet seyn, und folglich der Angriffspunkt von P über dem Schwerpunkte liegen, wenn das Gleichgewicht sicher seyn und sich bei einer Verrückung des Körpers von selbst wieder herstellen soll.

§. 159.

Um einen mehr symmetrischen Ausdruck für die Bedingung der Sicherheit des Gleichgewichts zwischen parallelen Kräften zu erhalten, wollen wir die Kräfte parallel mit der Axe der z eines beliebigen recht- oder schiefwinkligen Coordinatensystems nehmen und daher durch $(0, 0, Z)$, $(0, 0, Z')$, $(0, 0, Z'')$, etc. ausdrücken. Ihre Angriffspunkte seyen (x, y, z), (x', y', z') etc. Alsdann ist erstens wegen des Gleichgewichts (§. 78. Zus.):

$$\Sigma Z = 0,\ \Sigma x Z = 0,\ \Sigma y Z = 0, \text{ oder}$$
$$Z + \Sigma Z' = 0,\ xZ + \Sigma x'Z' = 0,\ yZ + \Sigma y'Z' = 0.$$

Sodann ist von den Kräften Z', Z'', ... die Resultante:

$$P_2 = \Sigma Z' = -Z$$

und die Coordinaten ihres Mittelpunktes A_2 sind (§. 106.)

$$x_2 = \frac{\Sigma x'Z'}{\Sigma Z'},\ y_2 = \frac{\Sigma y'Z'}{\Sigma Z'},\ z_2 = \frac{\Sigma z'Z'}{\Sigma Z'},$$

von denen sich, mittelst der vorhergehenden Gleichungen, x_2 und y_2 resp. $= x$ und y finden. A_2 liegt daher, wie gehörig, mit dem Punkte A oder (x, y, z) in einer den Kräften parallelen Geraden, und es ist

$$AA_2 = z_2 - z = -\frac{\Sigma z'Z'}{Z} - z = -\frac{\Sigma zZ}{Z},$$

folglich $AA_2.P_2 = -AA_2.Z = \Sigma zZ$.
Das Gleichgewicht ist demnach sicher, dauernd, oder unsicher, jenachdem ΣzZ positiv, null, oder negativ ist.

Da das Product $AA_2.P_2$ unabhängig von der Lage der Ebene der x, y ist, und mithin auch die Summe ΣzZ sich nicht ändert, wie auch diese Ebene gelegt werden mag, so können wir das erhaltene Resultat folgendergestalt in Worte fassen:

Wenn man bei einem Systeme von parallelen Kräften, welche im Gleichgewichte sind, die Richtungen der Kräfte durch eine Ebene schneidet und jede Kraft in den von dem Durchschnitte mit der Ebene bis zu ihrem Angriffspunkte genommenen Theil ihrer Richtung multiplicirt, so ist die algebraische Summe dieser Producte für jede Lage der Ebene von einerlei Grösse, und jenachdem sich diese Summe positiv, null, oder negativ findet, ist das Gleichgewicht sicher, dauernd, oder unsicher.

§. 160.

Ein System von Kräften, welche in einer Ebene nach beliebigen Richtungen wirken und sich das Gleichgewicht halten, wird bei Drehung der Ebene in sich selbst gleichwirkend mit einem Paare von Kräften P_1 und P_2, deren Angriffspunkte A_1 und A_2 willkührlich in der Ebene genommen werden können, deren Richtungen und Intensitäten aber dadurch bestimmt werden, dass P_1 und P_2 vor der Drehung einander ebenfalls das Gleichgewicht halten, und dass $A_1A_2.P_2$ und $h_3 = \Sigma(xX+yY)$, d. i. die Momente des Paares und des Systems nach einer Drehung der Ebene um 270° oder —90°, einander gleich sind (§. 124.). Wegen der stets gleichen Wirkung des Paares und des Systems ist nun auch das Gleichgewicht des Systems einerlei Beschaffenheit mit dem Gleichgewichte von P_1 und P_2, und es ist daher das Gleichgewicht des Systems in Bezug auf eine solche Verrückung des Körpers, bei welcher die Ebene, in der die Kräfte wirken, sich parallel bleibt, sicher, dauernd, oder unsicher, jenachdem $A_1A_2.P_2$, d. i. $\Sigma(xX+yY)$, positiv, null, oder negativ ist.

Zusatz. Der Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen des Productes $A_1A_2.P_2$ und der Beschaffenheit des Gleichgewichts von P_1 und P_2 lässt sich noch folgendergestalt nachweisen.

Nach einer Drehung der Ebene um 90° verwandeln sich die zwei auf A_1 und A_2 wirkenden und sich anfangs das Gleichgewicht haltenden Kräfte P_1 und P_2 in ein Paar, dessen Moment $= -A_1A_2.P_2$ ist. Es ist nämlich A_1A_2 die Breite des Paares, und wenn P_2 anfangs die Richtung A_1A_2, also mit der Linie A_1A_2 einerlei Zeichen hat, so ist, wie die Anschauung lehrt, der Sinn des durch Drehung der Ebene entstandenen Paares dem Sinne der Drehung selbst entgegengesetzt, mithin das Moment des Paares negativ. In diesem Falle, wo das Product $A_1A_2.P_2$ positiv ist, suchen die Kräfte die Ebene zurückzudrehen, und das anfängliche Gleichgewicht war folglich sicher.

Auf gleiche Weise zeigt sich, dass bei einem negativen Werthe dieses Products das Gleichgewicht unsicher ist.

§. 161.

Die Summe $h_1 = \Sigma(xX + yY)$, lässt sich auch sehr einfach geometrisch darstellen. Sie ist das Moment des Systems, nachdem die Ebene in sich um $-90°$ gedreht worden, und zwar das Moment für einen beliebigen Punkt der Ebene, da das System nach der Drehung mit einem Paare gleiche Wirkung hat. Nach §. 115. ist aber dieses Moment einerlei mit dem Momente des Systems, welches entsteht, wenn man die Ebene unbewegt lässt, und jede Kraft, wie AB (Fig. 46.) um ihren Angriffspunkt A um $+90°$ dreht. Sey AC die Lage, in welche AB hierdurch gebracht wird. In Bezug auf den Punkt M der Ebene ist das Moment

von $AC, = 2.MAC = 2.DAC$, wenn MD ein von M auf AB gefälltes Perpendikel ist (§. 45. 4.). Nun verhält sich

$$DAC : ABC = DA : AB \text{ (§. 45. 1.)},$$

und es ist der Dreiecksausdruck ABC positiv, weil der Sinn, nach welchem sich die Seite AB um A drehen muss, um in die Lage AC zu kommen und damit die Fläche des Dreiecks zu beschreiben, einerlei mit dem vorhin bei der Drehung um 90° als positiv angenommenen Sinne ist (§. 34. zu Ende). Das Dreieck DAC ist daher positiv oder negativ, nachdem DA und AB einerlei oder entgegengesetzte Richtungen haben, und es ist folglich auch dem Zeichen nach das Moment von $AC, = 2.DAC = DA.AB$. Fällt man daher auf die Kräfte AB, $A'B'$, ... des Systems von einem beliebigen Punkte M der Ebene Perpendikel MD, MD', ..., so ist $\Sigma DA.AB =$ dem Momente des Systems, nachdem jede Kraft um 90° gedreht worden, $= h$.

Man ziehe noch von M an die Richtungen AB, $A'B'$, ... gerade Linien, welche sie resp. in E, E', ... treffen und daselbst mit ihnen nach einerlei Seite einander gleiche Winkel $= \alpha$ machen, so dass, wenn man diese Winkel um den gemeinschaftlichen Punkt M ihrer Schenkel ME, ME', ... dreht, bis diese Schenkel in eine Gerade fallen, die andern Schenkel $AB, A'B'$, ... einander parallel werden. Demzufolge sind die Dreiecke $MED, ME'D'$, ... einander ähnlich, und es verhalten sich die ED zu den entsprechenden DM, also auch die Producte $ED.AB$ zu den $DM.AB$, wie 1 zu tang α, folglich auch

$$\Sigma ED.AB : \Sigma DM.AB = 1 : \text{tang } \alpha.$$

Dadurch wird $\Sigma EA.AB = \Sigma ED.AB + \Sigma DA.AB$
$= \text{cotang}\, \alpha.\Sigma DM.AB + \Sigma DA.AB$
$= 2\, \text{cotang}\, \alpha.\Sigma MAB + h.$

Ist nun das System anfänglich im Gleichgewichte, so ist für jeden Ort von M, $\Sigma MAB = 0$, folglich die Summe $\Sigma EA.AB = h$, also von α unabhängig. Findet aber kein Gleichgewicht statt, so ist ΣMAB nicht $= 0$, wenigstens nicht für jeden Ort von M, also $\Sigma EA.AB$ von α abhängig. Hiermit noch die Eigenschaften der Summe h in Verbindung gesetzt, erhalten wir folgenden mit dem für parallele Kräfte in §. 159. gefundenen ganz analogen Satz:

Hat man ein System von Kräften in einer Ebene, und zieht man von einem Punkte M der Ebene an die Richtungen der Kräfte gerade Linien, welche die Richtungen nach einerlei Seite zu unter einander gleichen Winkeln $= \alpha$ schneiden, so ist, wenn sich die Kräfte das Gleichgewicht halten, und nur dann, die Summe der Producte aus jeder Kraft in den Theil ihrer Richtung, welcher sich vom Durchschnitte mit der an sie gezogenen Geraden bis zum Angriffspunkte der Kraft erstreckt, eine bei jeder Lage von M und bei jedem Werthe von α sich gleichbleibende Grösse, und nachdem diese Grösse positiv, null, oder negativ ist, ist das Gleichgewicht sicher, dauernd, oder unsicher.

---

§. 162.

Bei der jetzt angestellten Untersuchung über die Sicherheit des Gleichgewichts zwischen Kräften, die in einer Ebene enthalten sind, berücksichtigten wir bloss solche Verrückungen des Körpers, wodurch die Lage

dieser Ebene nicht geändert wurde, also Drehungen des Körpers um eine auf der Ebene normale Axe. Die in Bezug auf eine solche Axe statt findende Beschaffenheit gilt aber im Allgemeinen nicht auch für jede andere auf der Ebene nicht normale Axe, so dass von zwei Axen, welche einen Winkel mit einander machen, das Gleichgewicht rücksichtlich der einen sicher seyn kann, während es in Bezug auf die andere unsicher ist.

Bestehe das System z. B. aus 4 Kräften P, P', Q, Q', welche, in einer Ebene wirkend, im Gleichgewichte sind. Dabei seyen P und P' für sich im Gleichgewichte, folglich auch Q und Q'; ersteres Gleichgewicht, für sich betrachtet, sey sicher, letzteres unsicher. Sind nun resp. A, A', B, B' die Angriffspunkte dieser 4 Kräfte, und wird der Körper um AA', als um eine Axe, gedreht, so bleibt das Gleichgewicht zwischen den Kräften P, P', welche in der Linie AA' wirken, unverändert, und die Kräfte Q, Q' verwandeln sich in ein Paar, welches den Körper noch mehr aus seiner anfänglichen Lage zu bringen strebt. Dreht man dagegen den Körper um BB', so dauert das Gleichgewicht zwischen Q, Q' fort, die Kräfte P, P' aber bemühen sich, den Körper in seine erste Lage wieder zurückzuführen. Das Gleichgewicht zwischen den 4 Kräften ist daher in Bezug auf die erstere Drehung unsicher, in Bezug auf die letztere sicher. Uebrigens sieht man von selbst, dass die hierbei gemachte Bedingung, dass sämmtliche 4 Kräfte in einer Ebene wirken, keine wesentliche ist.

So wie dem jetzt betrachteten Systeme von Kräften nach der Verschiedenheit der Verrückung des Körpers Sicherheit und Unsicherheit zugleich zukommen kann,

so gilt dieses, wenige specielle Fälle ausgenommen, unter denen ein System paralleler Kräfte der merkwürdigste ist, auch von jedem andern Systeme. Den Inhalt der nächstfolgenden §§. soll daher eine ganz allgemeine Untersuchung der Merkmale ausmachen, aus denen bei Kräften, die nach beliebigen Richtungen auf einen frei beweglichen Körper wirken und im Gleichgewichte sind, die Sicherheit oder Unsicherheit dieses Gleichgewichts für eine gegebene Verrückung des Körpers erkannt werden kann, — eine Untersuchung, die durch die §§. 135. und 136. im vorigen Kapitel vollkommen eingeleitet ist.

§. 163.

Jede Verrückung eines Körpers lässt sich in eine parallele Fortbewegung und eine Drehung desselben um eine gewisse Axe zerlegen (§. 130.). Durch die parallele Bewegung wird das Gleichgewicht nicht gestört, wohl aber im Allgemeinen durch die Drehung, und wir haben daher auch gegenwärtig, wo die Sicherheit untersucht werden soll, nur den zweiten Theil der Verrückung oder die Drehung in Betracht zu ziehen.

Nun sahen wir in §. 136. *c.*, dass, sobald der Körper um eine Axe gedreht wird, die vorher im Gleichgewichte befindlichen Kräfte gleichwirkend mit einem Paare werden, dessen Kräfte $-P_1$ und $-P_2$ man, eben so wie die Kräfte des Systems, auf zwei bestimmte Punkte A_1 und A_2 des Körpers mit sich gleichbleibender Richtung und Stärke wirkend setzen kann. Jenachdem folglich das anfängliche Gleichgewicht zwischen diesen zwei Kräften sicher oder unsicher ist, jenachdem also $-P_2 . A_1 A_2$ eine positive oder negative

Grösse ist, wird auch dem Gleichgewichte des Systems Sicherheit oder Unsicherheit beizulegen seyn.

Es ist aber nach den Formeln (*a*), (*k*), (*d*), (*e*) in §. 135:

$$-P_2.A_1A_2 = -rP_2 = -Q$$
$$= \frac{D^2}{-D(\alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi)},$$

von welchem Bruche der Zähler

$$= (f\varphi - G\psi - H\chi)^2 + (g\chi - H\varphi - F\psi)^2$$
$$+ (h\psi - F\chi - G\varphi)^2,$$

also immer positiv, und nur dann $= 0$ ist, wenn $f\varphi = G\psi + H\chi$, $g\chi = H\varphi + F\psi$, $h\psi = F\chi + G\varphi$ ist, also nur in dem speciellen Falle, wenn das System eine Axe des Gleichgewichts hat und um diese gedreht wird. Der Nenner des Bruches findet sich

$$= (f\varphi - G\psi - H\chi)\varphi + (g\chi - H\varphi - F\psi)\chi$$
$$+ (h\psi - F\chi - G\varphi)\psi$$

und werde mit S bezeichnet. Das Gleichgewicht eines durch F, G, H, f, g, h (§. 127. (4) und (7)) gegebenen Systems ist demnach bei der Drehung um eine durch φ, χ, ψ ihrer Richtung nach gegebene Axe sicher oder unsicher, jenachdem die mit S bezeichnete Function dieser Grössen einen positiven oder negativen Werth hat.

§. 164.

Lassen wir die Drehungsaxe parallel mit der Axe der z seyn, so werden $\varphi = 0$, $\chi = 0$, $\psi = 1$, und damit $S = h = \Sigma(xX + yY)$, welches uns in Verbindung mit §. 160. folgenden Satz giebt:

Das Gleichgewicht zwischen Kräften, die nach beliebigen Richtungen auf einen frei beweglichen Kör-

per wirken, ist bei Drehung des Körpers um eine Axe sicher oder unsicher, jenachdem es bei der Drehung um dieselbe Axe das Gleichgewicht zwischen den Projectionen der Kräfte auf eine die Axe rechtwinklig schneidende Ebene ist.

Es dürfte der Mühe nicht unwerth seyn, zu untersuchen, wie dieses einfache Resultat auch ohne Hülfe des obigen zusammengesetzten Ausdrucks für S aus einfachen geometrischen Betrachtungen hergeleitet werden kann.

1) Sey AB (Fig. 42.), wie in §. 133., die Axe der Drehung, welche man sich, wie dort, vertical denke, MN eine horizontale, die Axe in A schneidende Ebene und PQ eine der Kräfte des Systems, welche sich das Gleichgewicht halten. Für PQ, und eben so für jede andere Kraft des Systems, substituire man ihre horizontale Projection TU, das in einer verticalen Ebene gelegene Paar horizontaler Kräfte PR, TO und die verticale Kraft PS.

2) Da die Angriffspunkte P, T der Kräfte jedes Paares PR, TO in einer Verticalen liegen, so kann man nach §. 136. *e.* für jedes dieser Paare ein anderes setzen, dessen Kräfte ebenfalls horizontal sind und ihre Angriffspunkte in zwei beliebigen Stellen, z. B. in A und B, der verticalen Axe haben. Sind demnach die horizontalen AC, BD (Fig. 42.*) die Resultanten dieser auf A und B wirkenden Kräfte, so bilden diese Resultanten ein Paar, welches mit sämmtlichen Paaren PR, TO gleichwirkend ist.

3) Die Kräfte TU in der horizontalen Ebene sind vor der Drehung für sich im Gleichgewichte (§. 133), und man kann daher, wenn der Körper um AB gedreht werden soll, statt aller dieser Kräfte zwei einander

gleiche und direct entgegengesetzte in der Ebene substituiren, wobei nur erfordert wird, dass das Product aus der einen in den Abstand ihres Angriffspunktes von dem der andern = dem Moment der Kräfte TU ist, nachdem jede der letztern um ihren Angriffspunkt um 90° in der Ebene gedreht worden (§. 124. u. 161.). Da hiernach von den zwei für TU zu setzenden Kräften die eine nebst ihrem Angriffspunkte willkührlich genommen werden kann, so sey A der Angriffspunkt der einen und sie selbst, durch AE vorgestellt, sey der AC gleich und entgegengesetzt; hiermit finde sich A_1, als der Angriffspunkt der andern Kraft A_1E_1, $= AC$. Anfangs und auch während der Drehung sind daher AE und AC im Gleichgewichte und können folglich weggelassen werden. Die Paare PR, TO und die Kräfte TU sind demnach fortwährend gleichwirkend mit dem Paare A_1E_1, BD.

4) Was noch die verticalen Kräfte PS anlangt, so müssen sie zu ihrer Resultante ein Paar haben, welches mit dem vorigen A_1E_1, BD anfänglich das Gleichgewicht hält. Ist daher von allen verticalen Kräften, die eine PS selbst ausgenommen, der Mittelpunkt P_1 und die Resultante P_1S_1, so bilden PS und P_1S_1 dieses resultirende Paar. Die Ebene desselben ist wegen des Gleichgewichts anfänglich mit der Ebene ABC parallel, und es hat, wie auch der Körper verrückt werden mag, mit den verticalen Kräften immer gleiche Wirkung.

Statt dieses Paares kann aber jedes andere gesezt werden, das mit ihm anfänglich gleichwirkend ist, und dessen Kräfte ebenfalls vertical sind. Denn wenn zwei Paare, aus verticalen Kräften bestehend, einander gleiche Wirkung haben, und wenn der Körper, an wel-

chem sie angebracht sind, um eine verticale Axe gedreht wird, so bleiben sie gleichwirkend, da durch eine solche Drehung die gegenseitige Lage ihrer Kräfte nicht geändert wird.

Für das Paar PS, P_1S_1, dessen Kräfte in einer mit ABC parallelen Ebene vertical wirken, kann man daher ein anderes setzen, dessen Kräfte in A_1 und B selbst angebracht sind. Seyen A_1H und BK diese Kräfte, und sey von A_1E_1, AH die Resultante A_1I, und von BD, BK die Resultante BL, so sind sämmtliche Kräfte des Systems bei der Drehung um AB stets gleichwirkend mit A_1I und BL. Wegen des anfänglichen Gleichgewichts müssen aber letztere Kräfte anfangs einander direct entgegengesetzt seyn, daher man die zu ihrer Bestimmung dienenden Punkte auch geradezu findet, indem man durch E_1 und D Verticalen legt, welche A_1B in I und L schneiden werden.

5) Nachdem somit die Kräfte des Systems rücksichtlich einer Drehung um AB auf A_1I und BL reducirt worden, ist nun das Gleichgewicht des Systems in Bezug auf dieselbe Drehung sicher oder unsicher, nachdem es das Gleichgewicht zwischen A_1I und BL ist, also nachdem $A_1B.BL$ positiv oder negativ, folglich auch, weil A, E die Projectionen von B, L auf die horizontale Ebene sind, nachdem $A_1A.AE$ positiv oder negativ ist, d. h. nachdem das Gleichgewicht zwischen den Projectionen TU der Kräfte des Systems auf eine die Drehungsaxe rechtwinklig schneidende Ebene sicher oder unsicher ist.

§. 165.

Zusätze. *a.* Dass die Sicherheit des Gleichgewichts des Systems bloss von der Sicherheit des Gleich-

gewichts zwischen AE und A_1E_1, oder des Gleichgewichts zwischen den Projectionen der Kräfte auf die Ebene MN abhängt, erhellet auch folgendergestalt. — Die Kräfte des Systems wurden in die horizontalen Kräfte TU, in die Paare PR, TO und in die verticalen Kräfte PS zerlegt, und diese drei einzelnen Systeme waren resp. gleichwirkend mit den drei Paaren AE, A_1E_1; AC, BD; A_1H, BK. Von diesen streben das zweite und dritte, sowohl anfangs, als auch während der Drehung um AB, die Axe AB selbst aus ihrer Lage zu bringen, nicht aber den um die Axe aus seiner anfänglichen Lage gedrehten Körper noch weiter vorwärts oder zurück zu drehen. Eine solche Drehung um die Axe können bloss die Kräfte AE, A_1E_1 bewirken, und diese sind es daher auch allein, von denen die Sicherheit des Gleichgewichts des ganzen Systems abhängt.

b. Wenn demnach das Gleichgewicht zwischen den horizontalen Kräften TU sich dauernd findet, und daher diese Kräfte ganz weggelassen werden können, mithin die Kräfte des Systems sich nur auf die zwei Paare AC, BD und A_1H, BK reduciren, so kann man das Gleichgewicht des Systems weder sicher noch unsicher nennen. Es ist aber auch nicht dauernd, da jene zwei Paare bei der Drehung die Axe selbst aus ihrer Lage zu bringen streben. Dieser specielle Fall begründet daher eine neue Art von Gleichgewicht, welches ich, um doch einen Ausdruck dafür zu haben, neutrales Gleichgewicht nennen will.

Wollte man bei einem solchen Gleichgewichte für alle Kräfte des Systems nur zwei substituiren, so müssten diese unendlich gross und mit der Axe der Drehung selbst parallel seyn. Denn jemehr sich das Gleichge-

wicht zwischen den TU dem dauernden Zustande nähert, und wenn immer, wie vorhin, $A_1 E_1 = -AE = AC$ genommen wird, desto näher rückt A_1 dem A. Desto mehr nähert sich folglich $A_1 B$ der verticalen Lage, und $BL = -A_1 I = \frac{A_1 B}{A_1 A} . BD$ wächst ohne Ende.

Aendert sich das System allmählig so, dass der Punkt A_1 in der Linie AC durch A von der einen auf die andere Seite von A geht, so verwandelt sich das Gleichgewicht in ein unsicheres, wenn es vorher sicher war, und umgekehrt. So wie man daher von dem Positiven zum Negativen auf doppeltem Wege gelangen kann, das einemal durch Null und das anderemal durch das unendlich Grosse, so giebt es auch zwei Uebergänge vom sichern zum unsichern Gleichgewichte. Der eine ist das dauernde Gleichgewicht, wo gar keine Kräfte, und der andere das neutrale Gleichgewicht, wo zwei unendlich grosse Kräfte hinzuzufügen nöthig sind, wenn das Gleichgewicht bei Drehung des Körpers nicht verloren gehen soll.

c. Bei einer Drehung um eine überhaupt durch φ, χ, ψ gegebene Axe wird das Gleichgewicht des Systems neutral seyn, wenn die in §. 162. 3. mit S bezeichnete Function $= 0$, und nicht zugleich $D = 0$ ist, d. h. wenn nicht zugleich das System eine Axe des Gleichgewichts hat, und um diese der Körper gedreht wird. Denn hiermit wird $Q = P_2 . A_1 A_2 = \infty$, also jede der beiden mit dem Systeme bei der Drehung gleichwirkenden Kräfte unendlich gross, und vermöge der aus (h) und (i) in §. 135. fliessenden Formel: $D^2 = Q^2 (1 - x^2)$, $x = 1$, also der Winkel, dessen Cosinus x ist, $= 0$, d. h. die Linie, in welcher diese zwei Kräfte anzubringen sind, wird mit der Axe der Drehung

parallel (§. 136. *b.*); — übereinstimmend mit dem Vorigen.

§. 166.

Wie schon im §. 162. vorläufig bemerkt worden, kann das Gleichgewicht eines und desselben Systems von Kräften nach der verschiedenen Lage der Axe, um welche der Körper gedreht wird, bald sicher, bald unsicher seyn. Dasselbe giebt auch die den jedesmaligen Zustand des Gleichgewichts bestimmende Function

$$S = f\varphi^2 + g\chi^2 + h\psi^2 - 2F\chi\psi - 2G\psi\varphi - 2H\varphi\chi$$

zu erkennen, die nach den verschiedenen Werthen, welche man den die Richtung der Axe bestimmenden Grössen φ, χ, ψ beilegt, während F, G, ... h unverändert bleiben, im Allgemeinen bald positiv, bald negativ ist. Um uns darüber näher zu unterrichten, wollen wir diese Function zuvor auf eine einfachere Form bringen. — Es ist

$$f\varphi^2 - 2G\psi\varphi - 2H\varphi\chi = f(\varphi^2 - 2\frac{G\psi + H\chi}{f}\varphi)$$
$$= f\varphi'^2 - \frac{(G\psi + H\chi)^2}{f}$$

wenn man

$$f\varphi - G\psi - H\chi = f\varphi' \text{ setzt. Hiermit wird}$$
$$fS = f^2\varphi'^2 - g'\psi^2 - h'\chi^2 - 2F'\chi\psi,$$

wo zur Abkürzung

$$G^2 - hf = g',\ H^2 - fg = h',\ Ff + GH = F'$$

gesetzt sind. — Ferner ist

$$h'\chi^2 + 2F'\chi\psi = h'\,(\chi + \frac{F'}{h'}\psi)^2 - \frac{F'^2}{h'}\psi^2.$$

Sey daher noch

$h'\chi + F'\psi = h'\chi'$ und $F'^2 - g'h' = f''$, so wird

$$S = f\varphi'^2 - \frac{h'}{f}\chi'^2 + \frac{f''}{fh'}\psi^2,$$

und es ist somit S durch Einführung der Veränderlichen φ', χ' statt φ, χ, als ein Aggregat von drei Quadraten dargestellt.

Da nun nach der verschiedenen Lage der Drehungsaxe die Werthe von φ, χ, ψ, und daher auch die von φ', χ', ψ, in allen möglichen Verhältnissen zu einander stehen können, so ist S immer positiv, und folglich das Gleichgewicht für jede Drehungsaxe sicher, wenn f, $-h'$ und $-f''$ zugleich positiv sind. Dagegen ist S immer negativ, und das Gleichgewicht für jede Axe unsicher, wenn f, h', f'' negativ sind. Das Gleichgewicht ist demnach für jede Axe von einerlei Beschaffenheit, wenn h' und f'' negativ sind, und zwar ist es sicher oder unsicher, nachdem f positiv oder negativ ist.

§. 167.

Auf analoge Art, wie g', h', F', f'' aus $f, \ldots H$ abgeleitet worden sind, bilde man noch f', G', H', g'', h'', so dass überhaupt

(1) $f' = F^2 - gh$, (4) $F' = Ff + GH$, (7) $f'' = F'^2 - g'h'$,
(2) $g' = G^2 - hf$, (5) $G' = Gg + HF$, (8) $g'' = G'^2 - h'f'$,
(3) $h' = H^2 - fg$, (6) $H' = Hh + FG$, (9) $h'' = H'^2 - f'g'$.

Substituirt man in 7) für g', h', F' ihre Werthe aus 2), 3), 4), so kommt:

$$(10)\ f'' = Rf, \text{ wo}$$
$$R = F^2f + G^2g + H^2h + 2FGH - fgh$$

die symmetrische Function von $f, \ldots H$ ist, welche, $= 0$ gesetzt, die Bedingung für das Vorhandenseyn einer Gleichgewichtsaxe ausdrückt (§. 131.).

Eben so erhält man:

$$(11)\ g'' = Rg,\quad (12)\ h'' = Rh.$$

Sind nun h' und f'' negativ (vor. §.), so ist nach (7) auch g' negativ, und daraus, dass g', h' negativ sind, folgt nach (2) und (3), dass den f, g, h einerlei Zeichen zukommen. Nach (10), (11), (12) müssen daher auch g'', h'' mit f'' einerlei Zeichen, also das negative, haben, woraus wegen (8) oder (9) noch folgt, dass eben so, wie g', h', auch f' negativ ist.

Hiernach und wegen der Symmetrie in der Bildung der Grössen $f'' \ldots h'$ schliessen wir:

Wenn von den sechs Grössen f', g', h', f'', g'', h'' eine der drei erstern (z. B. h') und eine ihr nicht entsprechende der drei letztern (z. B. f'') negativ sind, so sind es auch die vier übrigen, und f, g, h haben einerlei Zeichen. Das Gleichgewicht ist alsdann bei jeder Verrückung des Körpers von einerlei Beschaffenheit, und zwar sicher oder unsicher, jenachdem das gemeinschaftliche Zeichen von f, g, h das positive oder negative ist.

§. 168.

Zusatz. Zwischen den Grössen F, ... H' und f, ... h'' finden noch einige andere bemerkenswerthe Relationen statt. Um sie zu erhalten, wollen wir zu den Gleichungen (d) in §. 135.

$$(d)\begin{cases} -f\varphi + H\chi + G\psi = D\alpha, \\ H\varphi - g\chi + F\psi = D\beta, \\ G\varphi + F\chi - h\psi = D\gamma \end{cases}$$

zurückkehren, welche α, β, γ durch φ, χ, ψ ausdrücken, und daraus umgekehrt φ, χ, ψ durch α, β, γ auszudrücken suchen. In der That folgt aus diesen Gleichun-

gen, wenn man sie, um χ und ψ zu eliminiren, mit a, b, c multiplicirt, hierauf addirt und zur Bestimmung von $a:b:c$

$$aH - bg + cF = 0,$$
$$aG + bF - ch = 0 \text{ setzt:}$$
$$(-af + bH + cG)\varphi = D(a\alpha + b\beta + c\gamma).$$

Es fliesst aber aus den zwei ersten dieser Gleichungen:

$$a : b : c = -f' : H' : G',$$

folglich wenn man diese Verhältnisswerthe von a, b, c in der dritten substituirt:

$$(A)\quad (ff' + HH' + GG')\varphi = D(-f'\alpha + H'\beta + G'\gamma).$$

Substituirt man sie in den zwei ersten selbst, so kommen die identischen Gleichungen:

$$-Hf' - gH' + FG' = 0, \quad -Gf' + FH' - hG' = 0.$$

und ähnliche identische Gleichungen erhält man bei der Elimination von ψ, φ und φ, χ aus (d).

Nun wird, vermöge (A), $ff' + GG' + HH' = 0$, wenn α, β, γ null sind. Unter derselben Voraussetzung ist daher die Function $ff' + \ldots, = 0$ gesetzt, das Resultat der Elimination von φ, χ, ψ aus (d), d. i. aus den Gleichungen (8) in §. 127. Sie muss daher, bis auf das Zeichen wenigstens, einerlei mit der in §. 131. (16) gefundenen und vorhin mit R bezeichneten symmetrischen Function von $F, \ldots h$ seyn. In der That findet sie sich auch dem Zeichen nach von R nicht verschieden, also

$$ff' + GG' + HH' = R, \text{ und eben so wegen der Symmetrie}$$
$$gg' + HH' + FF' = R,$$
$$hh' + FF' + GG' = R.$$

Hiernach wird:

$$(d^*)\begin{cases}-f'\alpha+H'\beta+G'\gamma=R\varphi:D,\\ H'\alpha-g'\beta+F'\gamma=R\chi:D,\\ G'\alpha+F'\beta-h'\gamma=R\psi:D,\end{cases}$$ und eben so kommt:

nach Elimination von ψ, φ und von φ, χ aus (d).

Diese Gleichungen lassen sich aber aus den vorigen (d) unmittelbar bilden, wenn man α, β, γ mit φ, χ, ψ gegenseitig vertauscht, $F, \ldots h$ in $F', \ldots h'$ und D in $R:D$ verwandelt. Es muss daher auch seyn, indem man auf dieselbe Weise mit den Gleichungen (d^*) verfährt und die eben so aus $F', \ldots h'$ gebildete Function, welche R von $F, \ldots h$ war, $=R'$ setzt, also für $R:D$, $R':(R:D)$ schreibt, und wenn $F'', \ldots h''$ dieselben Functionen von $F', \ldots h'$ bedeuten, welche $F', \ldots h'$ von $F, \ldots h$ sind:

$$(d^{**})\begin{cases}-f''\varphi+H''\chi+G''\psi=R'D\alpha:R,\\ H''\varphi-g''\chi+F''\psi=R'D\beta:R,\\ G''\varphi+F''\chi-h''\psi=R'D\gamma:R.\end{cases}$$

Wegen der Unabhängigkeit je zweier der drei Grössen φ, χ, ψ von einander müssen nun die Coefficienten derselben und der davon abhängigen α, β, γ in den Gleichungen (d^{**}) in denselben Verhältnissen zu einander stehen, als wie in (d), folglich:

$$f'':f=H'':H=G'':G=\text{etc.}=R':R.$$

Durch Elimination von f' aus den zwei Gleichungen:

$$R=ff'+HH'+GG'$$
$$0=-Hf'-gH'+FG'$$

folgt aber: $RH=h'H'+F'G'=H''$.

Es ist daher:

$$R'=R^2 \text{ und } f''=Rf, \text{ etc. } F''=RF, \text{ etc.}$$

§. 169.

Wenn die in §. 167. zu Ende bemerkten Bedingungen nicht erfüllt werden, so kann S (§. 166.) nach der verschiedenen Annahme von φ, χ, ψ bald positiv, bald negativ, und folglich auch null werden. Alsdann bilden die durch die Gleichung $S=0$ bestimmten Axen, sobald sie durch einen und denselben Punkt, z. B. den Anfangspunkt der Coordinaten, gelegt werden, eine Kegelfläche des zweiten Grades, deren Spitze dieser Punkt ist, und deren Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten man erhält, wenn man in der Gleichung $S=0$ diese Coordinaten für die ihnen proportionalen φ, χ, ψ substituirt.

Indem wir nun jetzt, und so auch in den folgenden §§., nur die durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Axen in Betracht ziehen, — denn für je zwei einander parallele Axen ist das Gleichgewicht von einerlei Beschaffenheit (§. 163.), — so ist für jede Axe, welche in die Fläche des Kegels selbst fällt, $S=0$, mithin $Q=\infty$ und das Gleichgewicht neutral (§. 165. *c.*). Für alle innerhalb des Kegels fallende Axen hat S einerlei Zeichen, und das entgegengesetzte für alle Axen, welche ausserhalb des Kegels liegen. Für die einen Axen ist folglich das Gleichgewicht sicher und für die andern unsicher.

So werden demnach in dem allgemeinen Falle, wo das Gleichgewicht bald sicher, bald unsicher ist, die Axen des einen von denen des andern durch eine Kegelfläche gesondert. Ob aber die innerhalb dieser Fläche liegenden Axen, oder ob die ausserhalb liegenden es sind, denen das sichere Gleichgewicht zukommt, lässt sich ohne weiteres nicht entscheiden. Denn behält man die Angriffspunkte und Intensitäten der Kräfte

bei, verändert aber ihre Richtungen in die entgegengesetzten, als wodurch abermals Gleichgewicht entsteht, so gehen die Werthe von $F, \dots h$ in die eben so grossen, entgegengesetzten über, mithin auch der Werth von S, als einer linearen Function dieser Grössen. Die Gleichung $S = 0$ bleibt daher ungeändert, und folglich auch die Kegelfläche. Bei solchen Werthen von φ, χ, ψ aber, bei welchen S vorher einen positiven Werth hatte, erhält es jetzt einen negativen, und umgekehrt. Wenn folglich beim erstern Gleichgewichte den innerhalb des Kegels fallenden Axen Sicherheit zukam, so gehört sie beim letztern den ausserhalb fallenden, und umgekehrt.

§. 170.

Die Function S, welche hinsichtlich φ, χ, ψ vom zweiten Grade ist, und welche sich nach dem Vorigen im Allgemeinen als ein Aggregat dreier Quadrate darstellen lässt, kann in besondern Fällen auch schon in zwei Quadrate auflösbar seyn. Alsdann muss auch die gleichgeltende Form

$$f\varphi'^2 - \frac{h'}{f}\chi'^2 + \frac{R}{h'}\psi^2,$$

wo die ganze rationale Function R statt des vorigen $f'':f$ geschrieben worden, in zwei Quadrate sich zerlegen lassen. Dieses ist aber wegen der gegenseitigen Unabhängigkeit von φ'^2, χ'^2, ψ^2 nicht anders möglich, als wenn einer der drei Coefficienten $f, -h':f, R:h'$ dieser Quadrate null ist. Nun kann nicht der erste $=0$ seyn, indem sonst der zweite $=\infty$ würde, und eben so wenig kann es der zweite seyn, indem damit der dritte $=\infty$ würde. Mithin bleibt nur übrig, den dritten $=0$ zu setzen. Die Bedingung, unter welcher S als ein Aggregat zweier Quadrate ausgedrückt werden kann, ist demnach:

$$R = 0,$$

d. h. das System muss eine Axe des Gleichgewi
haben.

Bei dem jetzt nur aus zwei Quadraten zusamm
gesetzten Ausdrucke für S

$$S = f\varphi'^2 - \frac{k'}{f}\chi'^2 = \frac{1}{f}(f^2\varphi'^2 - k'\chi'^2)$$

sind nun drei Fälle zu unterscheiden, nachdem näm
die Coefficienten der zwei Quadrate entweder 1) b
das positive, oder 2) beide das negative, oder 3)
ander entgegengesetzte Zeichen haben.

Im ersten Falle ist f positiv und k' negativ; da, wegen $R = 0$, nach (10) und (11) in §. 167. und g'' null sind, folglich nach (7) und (8), $F'^2 =$ und $G'^2 = k'f'$ ist; so sind auch g' und f' negativ, nach (2) und (3), h und g positiv. Alsdann ist für j Axe das Gleichgewicht sicher, ausgenommen für jenige, für welche φ' und $\chi' = 0$, d. i.

$$f\varphi - H\chi - G\psi = 0 \text{ und } k'\chi + F'\psi = 0$$

sind. Es ist aber die erste dieser zwei Gleichun die erste der drei Bedingungsgleichungen (8) in §. 1 wenn die durch φ, χ, ψ bestimmte Axe eine Gleic wichtsaxe ist; und die zweite, für welche man, jetzt $R = 0$, folglich $H'' = H'k' + F'G' = 0$ ist, $G'\chi - H'\psi = 0$ setzen kann, entspringt durch Elim tion von φ aus der zweiten und dritten jener drei G chungen. Die aus $\varphi' = 0$ und $\chi' = 0$ hervorgehen Verhältnisse zwischen φ, χ, ψ gehören daher der Gle gewichtsaxe an, die dem Systeme gegenwärtig zukom Wird aber die Gleichgewichtsaxe zur Axe der Dreh genommen, so ist das Gleichgewicht dauernd.

Im zweiten Falle sind f und k' zugleich nega

womit sich auf ähnliche Art, wie vorhin, auch g, h, f', g' negativ finden. Das Gleichgewicht ist dann für jede Axe unsicher, ausgenommen, wenn φ' und χ' zugleich $=0$ sind, d. i. für die Gleichgewichtsaxe, wo das Gleichgewicht Dauer hat.

Wenn endlich drittens h' positiv ist, und daher, wegen $G'^2 = h'f'$ und $F'^2 = g'h'$, auch f' und g' positiv sind, so lässt sich S in zwei Factoren auflösen:

$$S = \frac{1}{f}(f\varphi' + \sqrt{h'}.\chi')(f\varphi' - \sqrt{h'}.\chi').$$

Setzt man jeden dieser Factoren für sich $=0$, drückt in ihm φ' und χ' durch φ, χ, ψ aus und substituirt x, y, z für φ, χ, ψ, so erhält man die Gleichungen zweier durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Ebenen. Für die Durchschnittslinie derselben sind beide Factoren zugleich $=0$, also $\varphi' = 0$ und $\chi' = 0$; mithin ist diese Linie die Gleichgewichtsaxe.

Durch die zwei Ebenen wird nun der Raum in vier Theile getheilt, welche paarweise einander gegenüber liegen, und jenachdem die Axe der Drehung in dem einen oder andern dieser Paare enthalten ist, ist das Gleichgewicht sicher oder unsicher. Für Axen, welche in eine der beiden Ebenen selbst fallen, ist das Gleichgewicht neutral, ausgenommen für die mit der Durchschnittslinie der Ebenen zusammenfallende Axe, für welche es Dauer hat.

§. 171.

Es ist jetzt der noch speciellere Fall zu untersuchen übrig, in welchem S sich auf ein einziges Quadrat reducirt. Dies geschieht aber bei dem im vor. §. bereits auf zwei Quadrate zurückgebrachten Ausdrucke für S

nur dann, wenn, nächst der für jenen Ausdruck g
tenden Gleichung $R=0$, noch $h'=0$ ist, wodurch

$$S=f\varphi'^2=\frac{1}{f}(f\varphi-H\chi-G\psi)^2$$

wird. Mit $R=0$ werden aber $F'', \ldots h''$ zugleich =
woraus, wenn noch $h'=0$, mittelst der Form
in §. 167. und 168. leicht zu schliessen, dass au
F', G', H', f', g' null sind. Nach (4) in §. 167. ist a
dann $f=-GH:F$, und S erhält damit den symm
trischen Ausdruck:

$$S=-FGH\left(\frac{\varphi}{F}+\frac{\chi}{G}+\frac{\psi}{H}\right)^2.$$

Gegenwärtig ist also das Gleichgewicht für a
Axen von einerlei Art, und zwar sicher oder unsich
nachdem das Product FGH negativ oder positiv i
oder, was auf dasselbe hinauskommt, nachdem $f, g,$
die jetzt einerlei Zeichen haben, positiv oder nega
sind. Doch machen hiervon diejenigen Axen eine A
nahme, für welche $S=0$ ist, und welche daher in d
Ebene liegen, deren Gleichung

$$\frac{x}{F}+\frac{y}{G}+\frac{z}{H}=0$$

ist. Denn nach §. 134. sind, unter den jetzt statt fi
denden Bedingungen $F', G', H'=0$, alle Axen dies
Ebene Axen des Gleichgewichts, und es ist mithin f
jede derselben das Gleichgewicht von Dauer.

Zehntes Kapitel.

Von den Maximis und Minimis beim Gleichgewichte.

§. 172.

Das Gleichgewicht zwischen mehrern auf einen frei weglichen Körper wirkenden Kräften besitzt, wie wir i vorigen Kapitel erkannt haben, die Eigenschaft, ss wenn der Körper um eine Axe, sey es nach der nen oder nach der andern Seite, gedreht wird, während die Kräfte auf ihre Angriffspunkte mit parallel ibenden Richtungen zu wirken fortfahren, die Kräfte ide Male den Körper entweder der Lage des Gleichwichts wieder zu nähern, oder beide Male ihn noch hr von dieser Lage zu entfernen streben. Die Anagie dieser Eigenschaft des Gleichgewichts mit den erkmalen der grössten und kleinsten Werthe einer verderlichen Grösse fällt in die Augen. Denn hat man B. eine ebene Curve und geht darin, nach welcher ite man will, von dem Punkte aus, welchem die grösste rdinate zugehört, so nähert man sich jedesmal der bscissenlinie, entfernt sich aber von ihr, wenn man n Punkt, dessen Ordinate die kleinste ist, zum Anngspunkte wählt. Es steht daher zu erwarten, dass ch beim Gleichgewichte eine gewisse Function der das ystem der Kräfte bestimmenden Grössen ein Maximum der Minimum seyn werde, und dass, wenn diese Funtion beim sichern Gleichgewichte z. B. ein Maximum ist, ie beim unsichern als Minimum sich zeigen werde.

§. 173.

In der That ist auch schon bemerkt worden (§. 157. *a.*), dass bei dem Gleichgewichte, welches zwischen zwei einander gleichen und entgegengesetzten Kräften P_1 und P_2 besteht, die Linie A_1A_2, welche die Angriffspunkte der Kräfte verbindet, eine solche Lage haben muss, dass sie, nach der Richtung der Kräfte geschätzt, ihren grösstmöglichen positiven oder negativen Werth hat. Wird nämlich die Richtung von P_2 für die positive genommen, so muss die hiernach geschätzte Linie A_1A_2, d. i. $A_1A_2 \cos(A_1A_2{}^\wedge P_2)$, beim sichern Gleichgewichte ein positives Maximum, beim unsichern ein negatives Maximum oder ein Minimum seyn.

Es ist aber, wenn in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem P_1, P_2 und A_1, A_2 durch (X_1, Y_1, Z_1), $(X_2, \ldots)$ und $(x_1, \ldots)$, $(x_2, \ldots)$ ausgedrückt werden:

$$A_1A_2.P_2.\cos(A_1A_2{}^\wedge P_2)$$
$$=(x_2-x_1)X_2+(y_2-y_1)Y_2+(z_2-z_1)Z_2$$
$$=x_1X_1+x_2X_2+y_1Y_1+\ldots+z_2Z_2.$$

Mithin ist auch dieser Ausdruck, wenn die Coordinaten der Angriffspunkte dergestalt veränderlich angenommen werden, dass die gegenseitige Entfernung dieser Punkte

$$=\sqrt{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]}$$

constant bleibt, beim sichern Gleichgewichte ein Maximum und beim unsichern ein Minimum.

Liegen die zwei Kräfte und ihre Angriffspunkte in der Ebene der x, y, und wird der Körper so verrückt, dass die Punkte in dieser Ebene bleiben, so ist es die Function

$$x_1X_1+x_2X_2+y_1Y_1+y_2Y_2,$$

welche beim Gleichgewichte ihren grössten oder kleinsten Werth hat.

§. 174.

So wie wir im vorigen Kapitel nach den Kennzeichen für die Sicherheit des Gleichgewichts eines nur aus zwei Kräften bestehenden Systems die Sicherheit jedes andern Systems beurtheilten, so können wir auch gegenwärtig aus der eben gefundenen Function, welche beim Gleichgewichte zwischen zwei Kräften ein Maximum oder Minimum ist, die entsprechende Function für jedes andere System herleiten.

Ist ein System von Kräften in einer Ebene im Gleichgewichte, und bleibt es darin, auch wenn der Körper um eine auf der Ebene normale Axe gedreht wird, so ist $\Sigma(xX+yY)=0$ (§. 122.). Diese Gleichung wird aber nicht allein anfangs, sondern auch während der Drehung selbst zwischen den auf ein festes Axensystem bezogenen und daher mit der Drehung sich ändernden Coordinaten der Angriffspunkte bestehen, da jede neue Lage, in welche das System dieser Punkte gegen die Kräfte versetzt wird, Gleichgewicht mit sich führt und daher als eine anfängliche betrachtet werden kann.

Im Allgemeinen aber geht das anfängliche Gleichgewicht verloren, und das System wird gleichwirkend mit zwei Kräften P_1 und P_2, welche nebst ihren Angriffspunkten A_1 und A_2 so zu bestimmen sind (§. 124.), dass sie anfangs einander ebenfalls das Gleichgewicht halten, und dass anfangs

$$h=h_1, \text{ wo } h=\Sigma(xX+yY)$$

und $h_1=A_1A_2.P_2=x_1X_1+y_1Y_1+x_2X_2+y_2Y_2$ (vor. §.).

Die Gleichung $h = h_1$ besteht nun aus demselben Grunde, wie vorhin, auch während der Drehung, oder allgemeiner ausgedrückt: wenn die Coordinaten sämmtlicher Angriffspunkte so geändert werden, dass die gegenseitigen Entfernungen dieser Punkte constant bleiben. Denn das neue System, welches man erhält, wenn man zu dem vorigen die Kräfte P_1 und P_2, nach entgegengesetzten Richtungen auf A_1 und A_2 wirkend hinzufügt, dauert auch während der Drehung fort.

Da also unausgesetzt $h = h_1$ ist, und da h_1 beim sichern Gleichgewichte von P_1 mit P_2, also auch beim sichern zwischen (X, Y), (X', Y'), ... ein Maximum, beim unsichern dagegen ein Minimum ist, so muss dasselbe auch von h gelten.

Beim Gleichgewichte zwischen Kräften in einer Ebene ist demnach die Function

$$\Sigma(xX + yY)$$

ein Maximum oder Minimum, und zwar ersteres beim sichern, letzteres beim unsichern Gleichgewichte.

§. 175.

Auf ganz ähnliche Weise lässt sich auch bei einem Systeme von Kräften im Raume eine Function ermitteln, die, wenn die Kräfte sich das Gleichgewicht halten, ein Maximum oder Minimum ist. Seyen P_1 und P_2 die beiden Kräfte, welche an den Punkten A_1 und A_2 angebracht, anfangs eben so, wie die Kräfte des Systems, mit einander im Gleichgewichte sind und bei der nachherigen Drehung um eine durch φ, χ, ψ bestimmte Axe mit dem Systeme gleichwirkend werden (§. 136. *c.*), Kräfte also, die in den entgegengesetzten Richtungen zu dem Systeme hinzugefügt, ein System hervorbringen, welches bei der Drehung um dieselbe

Axe sein Gleichgewicht nicht verliert. Alsdann muss seyn (§. 127. (8)):

$$\varphi\Sigma(yY+zZ)=\psi\Sigma xZ+\chi\Sigma xY,$$
$$\chi\Sigma(zZ+xX)=\varphi\Sigma yX+\psi\Sigma yZ,$$
$$\psi\Sigma(xX+yY)=\chi\Sigma zY+\varphi\Sigma zX,$$

Gleichungen, in denen sich das Summenzeichen ausser den Kräften des ursprünglichen Systems noch auf die Kräfte $-P_1$ und $-P_2$ erstreckt, und die, weil das Gleichgewicht zwischen $-P_1$, $-P_2$ und den Kräften des Systems fortdauert, nach demselben Schlusse, wie im vor. §., nicht allein bei den anfänglichen, sondern auch bei den durch die Drehung veränderten Werthen der Coordinaten ihre Gültigkeit haben.

Man multiplicire nun diese drei Gleichungen resp. mit φ, χ, ψ und addire sie, so kommt mit der Berücksichtigung, dass

$$\varphi^2 xX+\chi^2 yY+\psi^2 zZ$$
$$+\chi\psi(yZ+zY)+\psi\varphi(zX+xZ)+\varphi\chi(xY+yX)$$
$$=(\varphi x+\chi y+\psi z)(\varphi X+\chi Y+\psi Z)$$

und dass $\varphi^2+\chi^2+\psi^2=1$ ist:

$$\Sigma(xX+yY+zZ)=\Sigma[(\varphi x+\chi y+\psi z)(\varphi X+\chi Y+\psi Z)],$$

eine Gleichung, welche eben so, wie die drei vorigen, nicht bloss für den Anfang, sondern auch bei der nachherigen Drehung gilt.

Nun bleiben φ, χ, ψ und die Kräfte X, Y, Z; etc. während der Drehung unverändert. Eben so bleiben es auch die rechtwinkligen Projectionen der Angriffspunkte auf die Drehungsaxe, als die Mittelpunkte der von den Angriffspunkten um die Axe beschriebenen Kreise; mithin ändern sich auch nicht die Projectionen der vom Anfangspunkte der Coordinaten bis zu den Angriffspunkten gezogenen geraden Linien auf dieselbe

Axe, und diese Projectionen sind $=\varphi x+\chi y+\psi z$, etc. In Folge der zuletzt erhaltenen Gleichung bleibt daher auch die Summe $\Sigma(xX+\ldots)$ constant. Es ist aber diese Summe, wenn wir das Summenzeichen die Kräfte des ursprünglichen Systems allein umfassen lassen,

$$=\Sigma(xX+\ldots)-(x_1X_1+x_2X_2+\ldots+z_2Z_2),$$

und sie erhält somit die Form einer Differenz. Die zwei diese constante Differenz bildenden Summen müssen daher gleichzeitig ihre grössten und kleinsten Werthe erreichen.

Nun hat die Summe $x_1X_1+\ldots+z_2Z_2$ ihren grössten positiven Werth beim sichern Gleichgewichte, und ihren grössten, dem positiven absolut gleichen, negativen Werth beim unsichern Gleichgewichte zwischen P_1 und P_2 (§. 173.), folglich auch zwischen den Kräften des Systems.

Mithin ist auch die Summe

$$\Sigma(xX+yY+zZ)$$

beim sichern Gleichgewichte zwischen den Kräften des Systems ein Maximum und beim unsichern ein Minimum.

§. 176.

Auf noch kürzere Weise kann man zu diesem Resultate gelangen, wenn man die in §. 174. erhaltene Formel für das Maximum oder Minimum beim Gleichgewichte eines in einer Ebene enthaltenen Systems zu Hülfe nimmt. Sind nämlich die auf die Punkte (x, y, z), etc. wirkenden Kräfte (X, Y, Z), etc. im Gleichgewichte, so sind es auch die Projectionen derselben auf die Ebene der x, y, d. i. die auf die Punkte $(x, y, 0)$, etc. wirkenden Kräfte $(X, Y, 0)$, etc. (§. 68.), und es ist, wenn man den Körper um eine auf dieser Ebene normale, d. i. mit der Axe der z parallele, Axe dreht,

die Function $\Sigma(xX+yY)$ ein Maximum beim sichern und ein Minimum beim unsichern Gleichgewichte der Kräfte $(X, Y, 0)$ etc., folglich auch der Kräfte (X, Y, Z) etc. (§. 164.). Da ferner bei dieser Drehung die Coordinaten z, etc., mithin auch die Summe ΣzZ, ungeändert bleiben, so ist unter denselben Bedingungen auch $\Sigma(xX+yY+zZ)$ ein Maximum oder Minimum. Es ist aber diese Summe, wenn wir die Kräfte mit P, etc. ihre Angriffspunkte mit A, etc. und den Anfangspunkt der Coordinaten mit O bezeichnen, $=\Sigma OA.P \cos(OA^{\wedge}P)$, und daher unabhängig von dem durch O gelegten Systeme der Coordinatenaxen, also ein Maximum oder Minimum, auch wenn der Körper um eine andere, mit der Axe der x nicht parallele Axe gedreht wird.

Zusatz. Trifft ein von O auf die Richtung von P gefälltes Perpendikel dieselbe in M (Fig. 47.), so ist $MA = OA \cos(OA^{\wedge}P)$, und die vorige Summe wird $=\Sigma MA.P$. Wird hierauf der Körper verrückt, und geht damit A nach $A_{\prime}$ fort, und ist $M_{\prime}$ der Fusspunkt des von O auf die nunmehrige Richtung von P gefällten Perpendikels, so verwandelt sich die Summe in $\Sigma M_{\prime}A_{\prime}P$. Weil aber die Richtungen von P in der ersten und zweiten Lage des Körpers einander parallel sind, so ist $OMM_{\prime}$ eine auf der Richtung von P normale Ebene. Die Summe, welche beim Gleichgewichte ein Grösstes oder Kleinstes ist, wird daher auch erhalten, wenn man durch einen unbeweglichen Punkt O Ebenen legt, welche die Richtungen der Kräfte rechtwinklig schneiden, hierauf jede Kraft in den Theil ihrer Richtung vom Durchschnitte der letztern mit der auf ihr normalen Ebene bis zum Angriffspunkte der Kraft multiplicirt und diese Producte addirt.

Weil die Richtungen der Kräfte sich parallel l
ben, so sind die durch O gelegten Ebenen eben
wie O selbst, unbeweglich. Man sieht aber leicht, d
man statt der in O sich gemeinschaftlich schneiden
Ebenen irgend andere unbewegliche, auf den Rich
gen der Kräfte normale Ebenen setzen kann. D
wird die Richtung von P von einer auf ihr norm
und nicht durch O gehenden Ebene in N geschnit
so ist der Unterschied $MA.P - NA.P = MN.P$,
constant, weil es sowohl P, als der gegenseitige
stand MN der beiden unbeweglichen Ebenen ist.
hin ist auch der Unterschied der Summen $\Sigma MA.P$
$\Sigma NA.P$ constant, und daher die eine mit der an
gleichzeitig ein Grösstes oder Kleinstes; also:

*Halten sich mehrere auf einen frei beweglic
Körper wirkende Kräfte das Gleichgewicht, und de
man sich die Richtung jeder Kraft von einer un
weglichen Ebene normal geschnitten und multipli
jede Kraft in den Theil ihrer Richtung vom Du
schnitte der auf ihr normalen Ebene bis zu ih
Angriffspunkte, so ist, wenn der Körper um e
beliebige Axe, sey es nach der einen, oder nach
andern Seite, gedreht wird, die damit sich änder
Summe jener Producte beim anfänglichen Gleich
wichte selbst ein Maximum oder ein Minimum, u
zwar ersteres, wenn das Gleichgewicht in Be
auf diese Drehung sicher, letzteres, wenn es
sicher ist.*

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 177.

Jede Verrückung eines Körpers kann in eine Axendrehung und in eine parallele Fortbewegung zerlegt werden. Sind nun die auf einen Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewichte, und wird der Körper um eine Axe gedreht, so ist, wie eben gezeigt worden, die Summe $\Sigma(xX+yY+zZ)$ für die Lage im Gleichgewichte selbst ein Maximum oder Minimum. Wird aber der Körper parallel mit sich fortbewegt, und nimmt alsdann der Punkt, welcher anfangs mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfiel, den Ort (a, b, c) ein, so wird die gedachte Summe $=\Sigma((x+a)X + (y+b)Y+(z+c)Z)=\Sigma(xX+yY+zZ)$, wegen $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z=0$ (§. 66.), und bleibt daher ungeändert. Deshalb und zufolge der bekannten Natur der Grössten und Kleinsten wird daher die Summe überhaupt sich nicht ändern, wenn der Körper aus der Lage des Gleichgewichts um ein unendlich Weniges auf irgend eine Weise verrückt wird, d. h. es wird

$$\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz)=0$$

seyn, wofern nur die Differentiale dx, dy, dz, dx', etc. so genommen werden, dass die gegenseitigen Entfernungen der Punkte (x, y, z), (x', y', z'), etc. unverändert bleiben.

Es ist aber $Xdx+Ydy+Zdz=$ dem Product aus der Kraft (X, Y, Z) in den auf ihre Richtung projicirten Weg, den ihr Angriffspunkt (x, y, z) bei der unendlich kleinen Verrückung des Körpers genommen hat; und wir können daher auch sagen:

Ist ein System von Kräften, welche auf einen frei beweglichen Körper wirken, im Gleichgewichte,

und wird der Körper um ein unendlich Wenig verrückt, so ist die Summe der Producte aus jede Kraft in den nach ihrer Richtung geschätzten We ihres Angriffspunktes jederzeit null.

Die bei einem sich bewegenden Körper in eine unendlich kleinen Zeittheile durchlaufenen Wege sein Punkte sind den alsdann stattfindenden Geschwindigkeite der Punkte proportional. Diese Wege, geschätzt nac den Richtungen der Kräfte, welche an den die Weg beschreibenden Punkten angebracht sind, nennt ma daher die virtuellen Geschwindigkeiten de Punkte; und der Satz, welcher aussagt, dass die Summ der in die virtuellen Geschwindigkeiten ihrer Angriff punkte multiplicirten Kräfte beim Gleichgewichte nu ist, heisst hiernach das Princip der virtuelle Geschwindigkeiten.

§. 178.

Die Reihe der Schlüsse, durch welche wir un nach und nach zu diesem Princip erhoben haben, i ziemlich zusammengesetzt. Da nun gleichwohl die Ein fachheit des Princips einen derselben angemessene Beweis wünschenswerth macht, und es auch an sie interessant ist, zu sehen, wie das Princip in den ein fachsten Fällen sich bestätigt, so will ich noch folgen den möglichst kurzen und auf den ersten Gründen de Statik beruhenden Beweis desselben hinzufügen.

1) Seyen P und P' (Fig. 48.) zwei sich das Gleich gewicht haltende Kräfte, A und A' ihre Angriffs punkte, welche durch eine unendlich kleine Verrückun nach B und B' kommen, so dass B dem A und B' dem A' unendlich nahe liegt, und $BB' = AA'$ ist. Di Projectionen von B und B' auf AA' seyen C und C'

so ist wegen des unendlich kleinen Winkels von BB' mit AA', $CC' = BB' = AA'$, folglich $AC = A'C'$. Wegen des Gleichgewichts sind aber die Kräfte P und P' einander gleich, und ihre Richtungen in der Linie AA' einander direct entgegengesetzt, also AC und $A'C'$ die virtuellen Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte. Nimmt man daher jede Kraft positiv, und die virtuellen Geschwindigkeiten positiv oder negativ, nachdem sie mit den ihnen zugehörigen Kräften einerlei oder entgegengesetzte Richtungen haben, so ist

$$P.AC + P'.A'C' = 0,$$

und somit das Princip für den einfachsten Fall bewiesen.

2) Seyen $P, P', P'', \ldots$ (Fig. 49.) mehrere auf denselben Punkt A eines Körpers wirkende und sich das Gleichgewicht haltende Kräfte. Durch eine Verrückung des Körpers komme A nach B, und die Projectionen von B auf die anfänglichen Richtungen der Kräfte seyen $C, C', C'', \ldots$, also $AC, AC', AC'', \ldots$ die virtuellen Geschwindigkeiten von A. Wegen des Gleichgewichts ist nun die Summe der Projectionen der Kräfte auf die durch A und B zu legende Gerade $= 0$, wie ganz einfach aus dem Parallelepipedum der Kräfte fliesst (§. 67. 2.). Es ist daher $P \cos\varphi + P' \cos\varphi' + \ldots = 0$, wenn $\varphi, \varphi', \ldots$ die von $P, P', \ldots$ mit AB gebildeten Winkel bezeichnen. Zugleich ist aber $\cos\varphi = \frac{AC}{AB}$, $\cos\varphi' = \frac{AC'}{AB}$, etc.; folglich auch hier:

$$P.AC + P'.AC' + P''.AC'' + \ldots = 0.$$

3) Treffen sich die Richtungen der sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte $P, P', \ldots$ in einem Punkte A, wirken sie aber nicht unmittelbar auf diesen Punkt, sondern auf beliebige andere Punkte ihrer Richtungen, so bringe man in A die resp. den Kräften $P, P', \ldots$

gleichen und direct entgegengesetzten Kräfte $Q, Q', \ldots$ an, so dass Q mit P, Q' mit P', etc. und $Q, Q', \ldots$ untereinander, eben so wie $P, P' \ldots$ untereinander, i Gleichgewichte sind. Verrücken wir nun den Körpe um ein unendlich Weniges und bezeichnen dabei di virtuelle Geschwindigkeit des Angriffspunktes einer Kra mit dem Buchstaben aus dem kleinen Alphabete, we cher dem grossen Buchstaben entspricht, womit di Kraft ausgedrückt ist, so haben wir

nach 1): $Pp + Qq = 0$, $P'p' + Q'q' = 0$, etc.

und nach 2): $Qq + Q'q' + \ldots = 0$,

folglich wiederum: $Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0$.

4) Aus letzterer Gleichung folgt: $P'p' + P''p'' + \ldots = -Pp$, d. h.: Bei mehreren nach einem Punkt gerichteten und sich nicht das Gleichgewicht haltende Kräften ist die Summe der in die virtuellen Geschwi digkeiten ihrer Angriffspunkte multiplicirten Kräft gleich dem Producte aus der Resultante in die virtuell Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes.

5) Bei drei Kräften, welche im Gleichgewichte un einander nicht parallel sind, muss nach 3) das Princi der virtuellen Geschwindigkeiten immer Gültigkeit ha ben, weil dann die Richtungen der Kräfte sich imme in einem Punkte begegnen.

6) Sind drei sich das Gleichgewicht haltende Kräft P, Q, R einander parallel, so zerlege man die ein derselben, P, in der Ebene, worin sie alle drei ent halten seyn müssen, in zwei andere S und T, welch nicht mit einander, folglich auch nicht mit P, Q, R parallel sind. Von Q und S sey die Resultante U und von R und T sey die Resulsante V, so halte sich U und V das Gleichgewicht, und es ist nach 4) un 5) mit Anwendung der in 3) gewählten Bezeichnungsart

$$Pp = Ss + Tt,\ Qq + Ss = Uu,\ Rr + Tt = Vv$$
und nach 1) $Uu + Vv = 0$,

mithin, wenn man diese vier Gleichungen addirt:

$$Pp + Qq + Rr = 0;$$

das Princip ist folglich auch in diesem Falle gültig.

7) Betrachten wir jetzt ganz allgemein ein System von Kräften $P, P', P'', \ldots$, die, auf beliebige Punkte $A, A', A'', \ldots$ eines frei beweglichen Körpers wirkend, im Gleichgewichte sind. Seyen F, G, H irgend drei andere Punkte des Körpers, welche nicht in einer Geraden liegen. Vermittelst des Parallelepipedums der Kräfte zerlege man die Kraft P nach den Richtungen AF, AG, AH in drei andere Q, R, S; eben so die Kraft P' nach den Richtungen $A'F, A'G, A'H$ in die Kräfte Q', R', S'; die Kraft P'' nach $A''F, A''G, A''H$ in die Kräfte Q'', R'', S''; u. s. w. Man setze hierauf die nach F gerichteten Kräfte $Q, Q', Q'', \ldots$ zu einer einzigen Q_1 zusammen; auf gleiche Art bestimme man von den nach G gerichteten Kräften $R, R', \ldots$ die Resultante R_1, und von den nach H gerichteten $S, S', \ldots$ die Resultante S_1. Hiermit ist das ganze System auf die drei Kräfte Q_1, R_1, S_1 reducirt, welche sich daher ebenfalls das Gleichgewicht halten müssen. Wird nun der Körper um ein unendlich Weniges verrückt, so haben wir nach 4) die Gleichungen:

$$Pp = Qq + Rr + Ss,\ P'p' = Q'q' + R'r' + S's', \text{ etc.}$$
$$Qq + Q'q' + \ldots = Q_1 q_1,$$
$$Rr + R'r' + \ldots = R_1 r_1,$$
$$Ss + S's' + \ldots = S_1 s_1,$$

und nach 5), oder 6), nachdem die Kräfte Q_1, R_1, S_1 sich in einem Punkte treffen, oder einander parallel sind:

$$Q_1 q_1 + R_1 r_1 + S_1 s_1 = 0.$$

Die Addition aller dieser Gleichungen aber giel

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0,$$

wie zu erweisen war.

§. 179.

Der im vorigen §. bewiesene Satz lässt sich au umkehren, *so dass, wenn jederzeit, wie auch d Körper um ein unendlich Weniges verrückt werd mag, die Summe der virtuellen Geschwindigkeit $Pp + P'p' + \ldots$ null ist, die Kräfte P, P', ... si das Gleichgewicht halten.*

Denn wären sie nicht im Gleichgewichte, so mü ten sie durch Hinzufügung einer Kraft R, oder im a gemeinern Falle durch Hinzufügung zweier nicht einer Kraft vereinbaren Kräfte S und T, ins Glei gewicht gebracht werden können. Vermöge des vor. müsste daher seyn:

$$Rr + Pp + P'p' + \ldots = 0,$$

oder $Ss + Tt + Pp + P'p' + \ldots = 0$,

also entweder $Rr = 0$, oder $Ss + Tt = 0$,

weil jetzt $Pp + P'p' + \ldots = 0$ seyn soll.

Es ist aber nicht bei jeder Verrückung des Körp $r = 0$ und daher $Rr = 0$, sondern nur dann, wenn d Angriffspunkt von R entweder in Ruhe bleibt, od sein Weg auf der Richtung von R rechtwinklig ist.

Eben so wenig kann bei den zwei einander ni das Gleichgewicht haltenden und nicht auf eine Kr reducirbaren Kräften S und T jederzeit $Ss + Tt =$ seyn. Denn heissen S_0 und T_0 die Angriffspunkte v S und T, und wird der Körper um eine durch S_0 g hende Axe gedreht, so ist $s = 0$. Alsdann ist der W von T_0 nur in dem Falle null, wenn die Axe zugle durch T_0 geht, und nur in dem Falle auf T perp

dikular, wenn sie zugleich mit T' in einer Ebene liegt. Bei der Drehung um jede andere durch S_0 gehende Axe macht der Weg von T_0 mit T einen schiefen Winkel, und es ist daher nicht $t=0$, also auch nicht $Ss+Tt=0$. — Wird durch S_0 und T keine Ebene bestimmt, liegt also S_0 in T, so lassen sich S und T auf eine einzige Kraft reduciren, was gegen die Voraussetzung streitet.

Da also weder Rr noch $Ss+Tt$ stets $=0$ seyn können, wie doch, wenn zwischen $P, P', \ldots$ kein Gleichgewicht bestände, erforderlich wäre, so müssen $P, P', \ldots$ im Gleichgewichte seyn.

§. 180.

Auch bei jedem Systeme mehrerer auf irgend eine Art mit einander verbundener Körper, auf welche Kräfte wirken, lässt sich, wie wir späterhin sehen werden, darthun, dass, wenn die Kräfte sich das Gleichgewicht halten, bei jeder möglichen Verrückung des Systems die Summe der Kräfte, multiplicirt in die virtuellen Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte, null ist, und dass umgekehrt, wenn diese Summe bei jeder Verrückung, welche die Verbindung der Körper zulässt, sich null findet, Gleichgewicht herrscht. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in seiner umgekehrten Form schliesst daher die Bedingungen des Gleichgewichts für jeden möglichen Fall in sich, und es müssen sich durch dasselbe ohne weitere Zuhülfenahme von Sätzen der Statik alle Aufgaben dieser Wissenschaft in Rechnung setzen und lösen lassen.

Johann Bernoulli scheint der erste gewesen zu seyn, welcher das in Rede stehende Princip in seiner grossen Allgemeinheit aufgefasst und seinen Nutzen für

die Statik erkannt hat. Wie aber dasselbe zur l statischer Aufgaben wirklich angewendet werden und wie sich aus ihm analytische Formeln he lassen, welche die Lösungen aller das Gleichg betreffenden Probleme in sich fassen, dies hat Lagrange gezeigt.*) Sein Verfahren besteh Wesentlichen nach in Folgendem:

Bei jeder Aufgabe der Statik sind gewisse gungen gegeben, denen die Angriffspunkte der bei jeder möglichen Verrückung der Körper, auf die Kräfte wirken, unterworfen sind. Diese Be gen lassen sich immer durch eine gewisse Anza Gleichungen zwischen den Coordinaten der A punkte ausdrücken. Man differentiire diese Gleich wenn sie anders nicht schon ihrer Natur nach D tialgleichungen sind, und eliminire damit aus d Princip ausdrückenden Gleichung $\Sigma(Xdx + Ydy$ $=0$ so viele Differentiale, als möglich, und verw auf diese Weise die Gleichung in eine andere, bloss von einander unabhängige Differentiale Setzt man alsdann, wie gehörig, den Coefficiente dieser Differentiale für sich $=0$, so hat man el durch die zum Gleichgewichte nöthigen Bedin gefunden.

§. 181.

Zur Erläuterung dieser Methode wollen wir die schon aus §. 66. bekannten Bedingungen des gewichts für einen einzigen frei beweglichen herzuleiten suchen.

Ausser dem rechtwinkligen Coordinatens

*) Lagrange Mécanique analytique, Section I.

dessen Axen eine unveränderliche Lage im Raume haben, und rücksichtlich dessen die Kräfte und ihre Angriffspunkte durch (X, Y, Z) etc. und (x, y, z) etc. bezeichnet werden, beziehe man jeden Angriffspunkt noch auf ein zweites Coordinatensystem, dessen sich gleichfalls unter rechten Winkeln schneidende Axen mit dem Körper fest verbunden sind. Rücksichtlich dieses zweiten Systems seyen die Angriffspunkte: (x_1, y_1, z_1) etc. Sey ferner (a, b, c) der Anfangspunkt des zweiten Systems in Bezug auf das erste und $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots,$ wie in §. 127., die Cosinus der Winkel, welche die Axen des einen Systems mit denen des andern machen, so ist:

$$x = a + x_1\alpha + y_1\alpha' + z_1\alpha'',$$
$$y = b + x_1\beta + y_1\beta' + z_1\beta'',$$
$$z = c + x_1\gamma + y_1\gamma' + z_1\gamma'',$$

u. s. w. Hierin sind, der Natur des festen Körpers gemäss, x_1, y_1, z_1, etc. constant; dagegen sind $a, b, c, \alpha, \beta, \ldots \gamma''$ und damit x, y, z bei der Bewegung des Körpers veränderlich. Differentiirt man daher diese Gleichungen, so kommt:

$$(a) \begin{cases} dx = da + x_1 d\alpha + y_1 d\alpha' + z_1 d\alpha'', \\ dy = db + x_1 d\beta + y_1 d\beta' + z_1 d\beta'', \\ dz = dc + x_1 d\gamma + y_1 d\gamma' + z_1 d\gamma''; \end{cases}$$

und somit lassen sich die virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte, wie viel ihrer auch seyn mögen, durch die 12 Differentiale $da, db, dc, d\alpha, \ldots d\gamma''$ ausdrücken.

Es sind aber vermöge der Gleichungen (A), oder (B), und (C) in §. 127. von den 9 Cosinussen $\alpha, \ldots \gamma''$, und mithin auch von ihren Differentialen, nur 3 von einander unabhängig. Um dieses zu berücksichtigen

Weil die Richtungen der Kräfte sich parallel b
ben, so sind die durch O gelegten Ebenen eben
wie O selbst, unbeweglich. Man sieht aber leicht, d
man statt der in O sich gemeinschaftlich schneiden
Ebenen irgend andere unbewegliche, auf den Rich
gen der Kräfte normale Ebenen setzen kann. D
wird die Richtung von P von einer auf ihr norm
und nicht durch O gehenden Ebene in N geschnit
so ist der Unterschied $MA.P - NA.P = MN.P$,
constant, weil es sowohl P, als der gegenseitige
stand MN der beiden unbeweglichen Ebenen ist.
hin ist auch der Unterschied der Summen $\Sigma MA.P$
$\Sigma NA.P$ constant, und daher die eine mit der an
gleichzeitig ein Grösstes oder Kleinstes; also:

*Halten sich mehrere auf einen frei bewegli
Körper wirkende Kräfte das Gleichgewicht, und de
man sich die Richtung jeder Kraft von einer u
weglichen Ebene normal geschnitten und multipli
jede Kraft in den Theil ihrer Richtung vom Du
schnitte der auf ihr normalen Ebene bis zu ih
Angriffspunkte, so ist, wenn der Körper um e
beliebige Axe, sey es nach der einen, oder nach
andern Seite, gedreht wird, die damit sich ände
Summe jener Producte beim anfänglichen Gleich
wichte selbst ein Maximum oder ein Minimum, u
zwar ersteres, wenn das Gleichgewicht in Be
auf diese Drehung sicher, letzteres, wenn es
sicher ist.*

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 177.

Jede Verrückung eines Körpers kann in eine Axendrehung und in eine parallele Fortbewegung zerlegt werden. Sind nun die auf einen Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewichte, und wird der Körper um eine Axe gedreht, so ist, wie eben gezeigt worden, die Summe $\Sigma(xX+yY+zZ)$ für die Lage im Gleichgewichte selbst ein Maximum oder Minimum. Wird aber der Körper parallel mit sich fortbewegt, und nimmt alsdann der Punkt, welcher anfangs mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfiel, den Ort (a, b, c) ein, so wird die gedachte Summe $=\Sigma((x+a)X + (y+b)Y + (z+c)Z) = \Sigma(xX+yY+zZ)$, wegen $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z=0$ (§. 66.), und bleibt daher ungeändert. Deshalb und zufolge der bekannten Natur der Grössten und Kleinsten wird daher die Summe überhaupt sich nicht ändern, wenn der Körper aus der Lage des Gleichgewichts um ein unendlich Weniges auf irgend eine Weise verrückt wird, d. h. es wird

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = 0$$

seyn, wofern nur die Differentiale dx, dy, dz, dx', etc. so genommen werden, dass die gegenseitigen Entfernungen der Punkte (x, y, z), (x', y', z'), etc. unverändert bleiben.

Es ist aber $Xdx + Ydy + Zdz =$ dem Product aus der Kraft (X, Y, Z) in den auf ihre Richtung projicirten Weg, den ihr Angriffspunkt (x, y, z) bei der unendlich kleinen Verrückung des Körpers genommen hat; und wir können daher auch sagen:

Ist ein System von Kräften, welche auf einen frei beweglichen Körper wirken, im Gleichgewichte,

und wird der Körper um ein unendlich Wenig verrückt, so ist die Summe der Producte aus jed Kraft in den nach ihrer Richtung geschätzten We ihres Angriffspunktes jederzeit null.

Die bei einem sich bewegenden Körper in eine unendlich kleinen Zeittheile durchlaufenen Wege sein Punkte sind den alsdann stattfindenden Geschwindigkeit der Punkte proportional. Diese Wege, geschätzt nac den Richtungen der Kräfte, welche an den die Weg beschreibenden Punkten angebracht sind, nennt ma daher die virtuellen Geschwindigkeiten d Punkte; und der Satz, welcher aussagt, dass die Summ der in die virtuellen Geschwindigkeiten ihrer Angriff punkte multiplicirten Kräfte beim Gleichgewichte nu ist, heisst hiernach das Princip der virtuelle Geschwindigkeiten.

§. 178.

Die Reihe der Schlüsse, durch welche wir un nach und nach zu diesem Princip erhoben haben, i ziemlich zusammengesetzt. Da nun gleichwohl die Ein fachheit des Princips einen derselben angemessene Beweis wünschenswerth macht, und es auch an sic interessant ist, zu sehen, wie das Princip in den ei fachsten Fällen sich bestätigt, so will ich noch folge den möglichst kurzen und auf den ersten Gründen de Statik beruhenden Beweis desselben hinzufügen.

1) Seyen P und P' (Fig. 48.) zwei sich das Gleic gewicht haltende Kräfte, A und A' ihre Angriff punkte, welche durch eine unendlich kleine Verrückun nach B und B' kommen, so dass B dem A und B dem A' unendlich nahe liegt, und $BB' = AA'$ ist. Di Projectionen von B und B' auf AA' seyen C und C

so ist wegen des unendlich kleinen Winkels von BB' mit AA', $CC' = BB' = AA'$, folglich $AC = A'C'$. Wegen des Gleichgewichts sind aber die Kräfte P und P' einander gleich, und ihre Richtungen in der Linie AA' einander direct entgegengesetzt, also AC und $A'C'$ die virtuellen Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte. Nimmt man daher jede Kraft positiv, und die virtuellen Geschwindigkeiten positiv oder negativ, nachdem sie mit den ihnen zugehörigen Kräften einerlei oder entgegengesetzte Richtungen haben, so ist

$$P.AC + P'.A'C' = 0,$$

und somit das Princip für den einfachsten Fall bewiesen.

2) Seyen P, P', P'', ... (Fig. 49.) mehrere auf denselben Punkt A eines Körpers wirkende und sich das Gleichgewicht haltende Kräfte. Durch eine Verrückung des Körpers komme A nach B, und die Projectionen von B auf die anfänglichen Richtungen der Kräfte seyen C, C', C'', ..., also AC, AC', AC'', ... die virtuellen Geschwindigkeiten von A. Wegen des Gleichgewichts ist nun die Summe der Projectionen der Kräfte auf die durch A und B zu legende Gerade $= 0$, wie ganz einfach aus dem Parallelepipedum der Kräfte fliesst (§. 67. 2.). Es ist daher $P \cos\varphi + P' \cos\varphi' + \ldots = 0$, wenn φ, φ', ... die von P, P', ... mit AB gebildeten Winkel bezeichnen. Zugleich ist aber $\cos\varphi = \frac{AC}{AB}$, $\cos\varphi' = \frac{AC'}{AB}$, etc.; folglich auch hier:

$$P.AC + P'.AC' + P''.AC'' + \ldots = 0.$$

3) Treffen sich die Richtungen der sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte P, P', ... in einem Punkte A, wirken sie aber nicht unmittelbar auf diesen Punkt, sondern auf beliebige andere Punkte ihrer Richtungen, so bringe man in A die resp. den Kräften P, P', ...

gleichen und direct entgegengesetzten Kräfte $Q, Q', \ldots$ an, so dass Q mit P, Q' mit P', etc. und $Q, Q', \ldots$ untereinander, eben so wie $P, P' \ldots$ untereinander, im Gleichgewichte sind. Verrücken wir, nun den Körper um ein unendlich Weniges und bezeichnen dabei die virtuelle Geschwindigkeit des Angriffspunktes einer Kraf mit dem Buchstaben aus dem kleinen Alphabete, wel cher dem grossen Buchstaben entspricht, womit die Kraft ausgedrückt ist, so haben wir

nach 1): $Pp+Qq=0$, $P'p'+Q'q'=0$, etc.

und nach 2): $Qq+Q'q'+\ldots=0$,

folglich wiederum: $Pp+P'p'+P''p''+\ldots=0$.

4) Aus letzterer Gleichung folgt: $P'p'+P''p''+\ldots = -Pp$, d. h.: Bei mehreren nach einem Punkte gerichteten und sich nicht das Gleichgewicht haltenden Kräften ist die Summe der in die virtuellen Geschwin digkeiten ihrer Angriffspunkte multiplicirten Kräfte gleich dem Producte aus der Resultante in die virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes.

5) Bei drei Kräften, welche im Gleichgewichte und einander nicht parallel sind, muss nach 3) das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten immer Gültigkeit ha ben, weil dann die Richtungen der Kräfte sich immer in einem Punkte begegnen.

6) Sind drei sich das Gleichgewicht haltende Kräfte P, Q, R einander parallel, so zerlege man die eine derselben, P, in der Ebene, worin sie alle drei ent halten seyn müssen, in zwei andere S und T, welche nicht mit einander, folglich auch nicht mit P, Q, R parallel sind. Von Q und S sey die Resultante U, und von R und T sey die Resulsante V, so halten sich U und V das Gleichgewicht, und es ist nach 4) und 5) mit Anwendung der in 3) gewählten Bezeichnungsart:

$$Pp = Ss + Tt,\quad Qq + Ss = Uu,\quad Rr + Tt = Vv$$

und nach 1) $Uu + Vv = 0$,

mithin, wenn man diese vier Gleichungen addirt:

$$Pp + Qq + Rr = 0;$$

das Princip ist folglich auch in diesem Falle gültig.

7) Betrachten wir jetzt ganz allgemein ein System von Kräften P, P', P'', ..., die, auf beliebige Punkte A, A', A'', ... eines frei beweglichen Körpers wirkend, im Gleichgewichte sind. Seyen F, G, H irgend drei andere Punkte des Körpers, welche nicht in einer Geraden liegen. Vermittelst des Parallelepipedums der Kräfte zerlege man die Kraft P nach den Richtungen AF, AG, AH in drei andere Q, R, S; eben so die Kraft P' nach den Richtungen $A'F$, $A'G$, $A'H$ in die Kräfte Q', R', S'; die Kraft P'' nach $A''F$, $A''G$, $A''H$ in die Kräfte Q'', R'', S''; u. s. w. Man setze hierauf die nach F gerichteten Kräfte Q, Q', Q'', ... zu einer einzigen Q_1 zusammen; auf gleiche Art bestimme man von den nach G gerichteten Kräften R, R', ... die Resultante R_1, und von den nach H gerichteten S, S', ... die Resultante S_1. Hiermit ist das ganze System auf die drei Kräfte Q_1, R_1, S_1 reducirt, welche sich daher ebenfalls das Gleichgewicht halten müssen. Wird nun der Körper um ein unendlich Weniges verrückt, so haben wir nach 4) die Gleichungen:

$$Pp = Qq + Rr + Ss,\quad P'p' = Q'q' + R'r' + S's', \text{ etc.}$$

$$Qq + Q'q' + \ldots = Q_1 q_1,$$

$$Rr + R'r' + \ldots = R_1 r_1,$$

$$Ss + S's' + \ldots = S_1 s_1,$$

und nach 5), oder 6), nachdem die Kräfte Q_1, R_1, S_1 sich in einem Punkte treffen, oder einander parallel sind:

$$Q_1 q_1 + R_1 r_1 + S_1 s_1 = 0.$$

Die Addition aller dieser Gleichungen aber giebt:

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0,$$

wie zu erweisen war.

§. 179.

Der im vorigen §. bewiesene Satz lässt sich auch umkehren, *so dass, wenn jederzeit, wie auch der Körper um ein unendlich Weniges verrückt werden mag, die Summe der virtuellen Geschwindigkeiten $Pp + P'p' + \ldots$ null ist, die Kräfte P, P', ... sich das Gleichgewicht halten.*

Denn wären sie nicht im Gleichgewichte, so müssten sie durch Hinzufügung einer Kraft R, oder im allgemeinern Falle durch Hinzufügung zweier nicht zu einer Kraft vereinbaren Kräfte S und T, ins Gleichgewicht gebracht werden können. Vermöge des vor. §. müsste daher seyn:

$$Rr + Pp + P'p' + \ldots = 0,$$

$$\text{oder } Ss + Tt + Pp + P'p' + \ldots = 0,$$

$$\text{also entweder } Rr = 0, \text{ oder } Ss + Tt = 0,$$

weil jetzt $Pp + P'p' + \ldots = 0$ seyn soll.

Es ist aber nicht bei jeder Verrückung des Körpers $r = 0$ und daher $Rr = 0$, sondern nur dann, wenn der Angriffspunkt von R entweder in Ruhe bleibt, oder sein Weg auf der Richtung von R rechtwinklig ist.

Eben so wenig kann bei den zwei einander nicht das Gleichgewicht haltenden und nicht auf eine Kraft reducirbaren Kräften S und T jederzeit $Ss + Tt = 0$ seyn. Denn heissen S_0 und T_0 die Angriffspunkte von S und T, und wird der Körper um eine durch S_0 gehende Axe gedreht, so ist $s = 0$. Alsdann ist der Weg von T_0 nur in dem Falle null, wenn die Axe zugleich durch T_0 geht, und nur in dem Falle auf T perpen-

dikular, wenn sie zugleich mit T in einer Ebene liegt. Bei der Drehung um jede andere durch S_0 gehende Axe macht der Weg von T_0 mit T einen schiefen Winkel, und es ist daher nicht $t=0$, also auch nicht $Ss+Tt=0$. — Wird durch S_0 und T keine Ebene bestimmt, liegt also S_0 in T, so lassen sich S und T auf eine einzige Kraft reduciren, was gegen die Voraussetzung streitet.

Da also weder Rr noch $Ss+Tt$ stets $=0$ seyn können, wie doch, wenn zwischen $P, P', \ldots$ kein Gleichgewicht bestände, erforderlich wäre, so müssen $P, P', \ldots$ im Gleichgewichte seyn.

§. 180.

Auch bei jedem Systeme mehrerer auf irgend eine Art mit einander verbundener Körper, auf welche Kräfte wirken, lässt sich, wie wir späterhin sehen werden, darthun, dass, wenn die Kräfte sich das Gleichgewicht halten, bei jeder möglichen Verrückung des Systems die Summe der Kräfte, multiplicirt in die virtuellen Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte, null ist, und dass umgekehrt, wenn diese Summe bei jeder Verrückung, welche die Verbindung der Körper zulässt, sich null findet, Gleichgewicht herrscht. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in seiner umgekehrten Form schliesst daher die Bedingungen des Gleichgewichts für jeden möglichen Fall in sich, und es müssen sich durch dasselbe ohne weitere Zuhülfenahme von Sätzen der Statik alle Aufgaben dieser Wissenschaft in Rechnung setzen und lösen lassen.

Johann Bernoulli scheint der erste gewesen zu seyn, welcher das in Rede stehende Princip in seiner grossen Allgemeinheit aufgefasst und seinen Nutzen für

die Statik erkannt hat. Wie aber dasselbe zur statischer Aufgaben wirklich angewendet werde und wie sich aus ihm analytische Formeln h lassen, welche die Lösungen aller das Gleich betreffenden Probleme in sich fassen, dies hat Lagrange gezeigt.*) Sein Verfahren bestel Wesentlichen nach in Folgendem:

Bei jeder Aufgabe der Statik sind gewisse gungen gegeben, denen die Angriffspunkte der bei jeder möglichen Verrückung der Körper, auf die Kräfte wirken, unterworfen sind. Diese Be gen lassen sich immer durch eine gewisse Anz Gleichungen zwischen den Coordinaten der A punkte ausdrücken. Man differentiire diese Gleic wenn sie anders nicht schon ihrer Natur nach D tialgleichungen sind, und eliminire damit aus Princip ausdrückenden Gleichung $\Sigma(Xdx+Ydy$ $=0$ so viele Differentiale, als möglich, und ver auf diese Weise die Gleichung in eine andere, bloss von einander unabhängige Differentiale Setzt man alsdann, wie gehörig, den Coefficient dieser Differentiale für sich $=0$, so hat man e durch die zum Gleichgewichte nöthigen Bedin gefunden.

§. 181.

Zur Erläuterung dieser Methode wollen wi die schon aus §. 66. bekannten Bedingungen des gewichts für einen einzigen frei beweglichen herzuleiten suchen.

Ausser dem rechtwinkligen Coordinatens

---

*) Lagrange Mécanique analytique, Section I.

dessen Axen eine unveränderliche Lage im Raume haben, und rücksichtlich dessen die Kräfte und ihre Angriffspunkte durch (X, Y, Z) etc. und (x, y, z) etc. bezeichnet werden, beziehe man jeden Angriffspunkt noch auf ein zweites Coordinatensystem, dessen sich gleichfalls unter rechten Winkeln schneidende Axen mit dem Körper fest verbunden sind. Rücksichtlich dieses zweiten Systems seyen die Angriffspunkte: (x_1, y_1, z_1) etc. Sey ferner (a, b, c) der Anfangspunkt des zweiten Systems in Bezug auf das erste und $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots,$ wie in §. 127., die Cosinus der Winkel, welche die Axen des einen Systems mit denen des andern machen, so ist:

$$x = a + x_1\alpha + y_1\alpha' + z_1\alpha'',$$
$$y = b + x_1\beta + y_1\beta' + z_1\beta'',$$
$$z = c + x_1\gamma + y_1\gamma' + z_1\gamma'',$$

u. s. w. Hierin sind, der Natur des festen Körpers gemäss, $x_1, y_1, z_1,$ etc. constant; dagegen sind $a, b, c, \alpha, \beta, \ldots \gamma''$ und damit x, y, z bei der Bewegung des Körpers veränderlich. Differentiirt man daher diese Gleichungen, so kommt:

$$(a) \begin{cases} dx = da + x_1 d\alpha + y_1 d\alpha' + z_1 d\alpha'', \\ dy = db + x_1 d\beta + y_1 d\beta' + z_1 d\beta'', \\ dz = dc + x_1 d\gamma + y_1 d\gamma' + z_1 d\gamma''; \end{cases}$$

und somit lassen sich die virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte, wie viel ihrer auch seyn mögen, durch die 12 Differentiale $da, db, dc, d\alpha, \ldots d\gamma''$ ausdrücken.

Es sind aber vermöge der Gleichungen (A), oder (B), und (C) in §. 127. von den 9 Cosinussen $\alpha, \ldots \gamma''$, und mithin auch von ihren Differentialen, nur 3 von einander unabhängig. Um dieses zu berücksichtigen

und um zugleich die deshalb nöthige Rechnung mög-
lichst zu vereinfachen, wollen wir die Axen der x_1, y_1, z_1
mit denen der x, y, z anfänglich zusammenfallen lassen
und daher die anfänglichen Werthe von $a, b, c, \alpha', \alpha''$
$\beta'', \beta, \gamma, \gamma' = 0$ und von $\alpha, \beta', \gamma'' = 1$ setzen. Differen-
tiiren wir nun die Gleichungen (A) und (C) und setzen
alsdann für $\alpha, \ldots \gamma''$ die bemerkten Werthe, so fin-
det sich:

$$d\beta'' + d\gamma' = 0, \quad d\gamma + d\alpha'' = 0, \quad d\alpha' + d\beta = 0,$$
$$d\alpha = 0, \quad d\beta' = 0, \quad d\gamma'' = 0,$$

und es kommt, wenn wir damit $d\beta'', d\gamma, d\alpha', d\alpha, d\beta', d\gamma''$
aus (a) eliminiren und mehrerer Symmetrie willen
dp, dq, dr für $d\gamma'$, $d\alpha''$, $d\beta$ schreiben:

$$(b) \begin{cases} dx = da - ydr + zdq, \\ dy = db - zdp + xdr, \\ dz = dc - xdq + ydp, \end{cases}$$

wo noch x, y, z für x_1, y_1, z_1 gesetzt sind, da unter
der gemachten Annahme anfänglich $x_1 = x$, etc. ist.

Mit diesen Werthen für dx, dy, dz wird nun:

$$(c) \quad Xdx + Ydy + Zdz = Xda + Ydb + Zdc$$
$$+ (yZ - zY)dp + (zX - xZ)dq + (xY - yX)dr$$

Bilden wir eine ähnliche Gleichung für jede andere
Kraft des Systems und summiren dann alle diese Glei-
chungen, so kommt, weil nach dem Princip der virtuellen
Geschwindigkeiten beim Gleichgewichte $\Sigma(Xdx + \ldots) = 0$
ist, und weil da, db, dc, dp, dq, dr nicht von einander
und bloss von der willkührlichen Bewegung des Körpers
abhängen, mithin für alle Kräfte einerlei Werthe haben

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$
$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0$$

welches die gesuchten Bedingungen für das Gleichge-
wicht sind.

§. 182.

Zu der beim Gleichgewichte statt findenden Gleichung zwischen den virtuellen Geschwindigkeiten $\Sigma(Xdx+\ldots)=0$ gelangten wir in §. 177. durch die Betrachtung, dass die Function $\Sigma(Xx+\ldots)$ beim Gleichgewichte ein Maximum oder Minimum seyn müsse. Da wir uns hierauf (§§. 178. 179.) von der Richtigkeit dieser Gleichung noch auf andere Weise überzeugt haben, so können wir aus ihr nach der Theorie der Grössten und Kleinsten jetzt umgekehrt schliessen, dass die Function $\Sigma(Xx+\ldots)$ beim Gleichgewichte ihren grössten oder kleinsten Werth erreicht, und zwar erstern, wenn das zweite Differential $\Sigma(Xd^2x+\ldots)$ negativ, letzteren, wenn es positiv ist. Es giebt aber die Differentiation der Gleichung (c):

$$Xd^2x+\ldots=Xd^2a+\ldots+(yZ-zY)\,d^2p+\ldots$$
$$+(Zdy-Ydz)\,dp+\ldots$$

Setzen wir hierin für dx, dy, dz ihre Werthe aus (b), summiren dann, erwägen, dass beim Gleichgewichte ΣX, etc. und $\Sigma(yZ-zY)$ etc. null sind, und gebrauchen endlich die in §. 127. für $\Sigma yZ=\Sigma zY$, etc. und für $\Sigma(yY+zZ)$, etc. eingeführten Bezeichnungen F, G, H und f, g, h, so ergiebt sich:

$$(d)\quad \Sigma(Xd^2x+\ldots)=-f\,dp^2-g\,dq^2-h\,dr^2$$
$$+2F\,dq\,dr+2G\,dr\,dp+2H\,dp\,dq.$$

Nun ist nach den Gleichungen (b) für alle Punkte der durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Geraden, welcher die Gleichungen

$$\frac{dp}{x}=\frac{dq}{y}=\frac{dr}{z}$$

zukommen, und welche wir l nennen wollen, $dx=da$, $dy=db$, $dz=dc$. Alle Punkte dieser Geraden l be-

wegen sich daher bei der Verrückung des Körpers um gleiche Theile nach parallelen Richtungen fort, so dass, wenn man den ganzen Körper an dieser parallelen Bewegung der l theilnehmen lässt, er dann nur noch um einen gewissen Winkel um l' gedreht werden muss, um aus seiner anfänglichen in die neue durch da, db, dc, dp, dq, dr bestimmte Lage zu gelangen. Vergl. §. 130.

Setzen wir nun

$$dp = \varphi\, ds,\quad dq = \chi\, ds,\quad dr = \psi\, ds,$$

und $ds^2 = dp^2 + dq^2 + dr^2$, also $\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2 = 1$, so sind, den Gleichungen für l zufolge, φ, χ, ψ die Cosinus der Winkel der Drehungsaxe l mit den Axen der x, y, z, haben also dieselbe Bedeutung, wie oben (§. 128.), und es ist vermöge der Gleichung (d'), nachdem wir darin für dp, dq, dr ihre jetzigen Werthe substituirt haben, die Summe $\Sigma(Xx + \ldots)$ ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem die Function

$$f\varphi^2 + g\chi^2 + h\psi^2 - 2F\chi\psi - 2G\psi\varphi - 2H\varphi\chi$$

positiv oder negativ ist; — übereinstimmend mit den bereits im Vorigen erhaltenen Resultaten, dass, je nachdem diese Function einen positiven oder negativen Werth hat, das Gleichgewicht sicher oder unsicher ist, und dass beim sichern Gleichgewichte die Summe $\Sigma(Xx + \ldots)$ ein Grösstes, beim unsichern ein Kleinstes ist.

§. 183.

Zusätze. *a.* Wird der Körper nur gedreht, und dieses um die durch den Anfangspunkt O der Coordinaten gehende Axe l, nicht aber zugleich parallel mit sich fortgerückt, so sind da, db, $dc = 0$, und die Gleichungen (b) werden

(b*) $dx = z\,dq - y\,dr$, $dy = x\,dr - z\,dp$, $dz = y\,dp - x\,dq$.

Addirt man die Quadrate derselben, nachdem man in ihnen $\varphi\,ds, \ldots$ für $dp, \ldots$ gesetzt hat, so ergiebt sich:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (x^2+y^2+z^2)\,ds^2 - (x\varphi + y\chi + z\psi)^2\,ds^2$$
$$= r^2\,ds^2 - (r\,ds \cos r^\wedge l)^2$$
$$= (r\,ds \sin r^\wedge l)^2,$$

wenn man noch die von O bis zum Punkte (x, y, z) geführte Gerade r nennt. Es ist aber $r \sin r^\wedge l$ das von (x, y, z) auf die durch O gehende Axe l gefällte Perpendikel, und $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ der von (x, y, z) bei der Drehung beschriebene Weg. Da nun dieser Weg der Natur der Sache nach auf jenem Perpendikel und der Drehungsaxe normal ist, so ist $ds = \sqrt{(dx^2 + \ldots)} : r \sin r^\wedge l =$ dem unendlich kleinen Winkel selbst, um welchen der Körper gedreht worden.

b. Fällt die Axe der Drehung mit der Axe der x zusammen, so werden $\varphi = 1$, $\chi = 0$, $\psi = 0$, folglich $dp = ds =$ dem Drehungswinkel, und $dq, dr = 0$. Wenn daher der Körper um die Axe der x um einen Winkel $= dp$ gedreht wird, so sind nach (b*) die nach den Coordinatenaxen geschätzten Verrückungen des Punktes (x, y, z):

$$dx = 0,\ dy = -z\,dp,\ dz = y\,dp.$$

Auf gleiche Weise finden sich diese Verrückungen bei einer Drehung um die Axe der y um einen Winkel $= dq$:

$$dx = z\,dq,\ dy = 0,\ dz = -x\,dq,$$

und eben so bei einer Drehung um die Axe der z um einen Winkel $= dr$:

$$dx = -y\,dr,\ dy = x\,dr,\ dz = 0.$$

Wird folglich der Körper nach und nach um die

Axen der x, y, z resp. um die Winkel dp, dq, dr gedreht, so sind nach den Principien der Differentialrechnung die dadurch bewirkten Verrückungen des Punktes (x, y, z) die Summen der eben gefundenen, d. i.

$$dx = z\,dq - y\,dr, \quad dy = x\,dr - z\,dp, \text{ etc.},$$

also dieselben, wie in (b°), d. h. die drei Drehungen dp, dq, dr um die Axen der x, y, z sind gleichwirkend mit einer einzigen Drehung $ds = \sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}$ um eine durch O gehende Axe l, welche mit jenen Axen Winkel macht, deren Cosinus sich wie dp, dq, dr verhalten.

Unendlich kleine Drehungen um drei sich unter rechten Winkeln in einem Punkte schneidende Axen lassen sich daher ganz auf dieselbe Weise, wie Kräfte, zu einer einzigen Drehung zusammensetzen, indem man nämlich den Axen und Winkeln der Drehungen die Richtungen und Intensitäten der Kräfte entsprechen lässt.

c. Diese merkwürdige Analogie zwischen Drehungen und Kräften dehnt sich aber noch viel weiter aus. Denn so wie Kräfte, deren Richtungen in eine und dieselbe Gerade fallen, gleiche Wirkung mit einer einzigen nach derselben Geraden gerichteten Kraft haben, welche der algebraischen Summe der Kräfte gleich ist, oder sich das Gleichgewicht halten, wenn ihre Summe null ist, so sind auch Drehungen um eine und dieselbe Axe gleichwirkend mit einer ihrer Summe gleichen Drehung um die nämliche Axe, oder sie lassen den Körper unverrückt, wenn ihre Summe null ist. Da nun mit Hülfe des rechtwinkligen Parallelepipedums der Kräfte und des Satzes von Kräften, deren Richtungen in dieselbe Gerade fallen, sich alle Zusammensetzungen und Zerlegungen von Kräften, die auf einen und denselben Punkt gerichtet sind, ausführen lassen,

und da durch passende Verbindung dieser Operationen jedes System von Kräften überhaupt, wenn es nicht im Gleichgewichte ist, auf die geringste Anzahl von Kräften reducirt werden kann, so müssen sich auf dieselbe Weise, wie Kräfte, auch Drehungen um beliebig gerichtete Axen auf eine oder höchstens zwei Drehungen reduciren lassen und unter denselben Bedingungen keine Verrückung hervorbringen, unter welchen Kräfte mit einander im Gleichgewichte sind, d. h.

Unendlich kleine Drehungen heben sich stets gegen einander auf, wenn ihnen proportionale und nach ihren Axen gerichtete Kräfte sich das Gleichgewicht halten, und umgekehrt.

d. Die gegenseitige Beziehung zwischen Kräften und rein geometrischen Drehungen offenbart sich noch auf eine sehr bemerkenswerthe Art bei Paaren von Kräften und Drehungen. Ein Kräftepaar strebt den Körper, auf den es wirkt, um eine auf der Ebene der Kräfte normale Axe zu drehen, und die Grösse dieses Strebens wird durch das Moment des Paares, d. h. durch das Product aus der einen Kraft in ihre Entfernung von der andern, gemessen, da Paare in einer Ebene von gleichen Momenten auch gleiche Wirkungen haben. Dagegen wird der Körper durch zwei einander gleiche und entgegengesetzte Drehungen um zwei parallele Axen parallel mit einer Normallinie auf der Ebene der Axen fortgerückt, und dieses um eine Grösse, die dem Product aus dem Drehungswinkel in den gegenseitigen Abstand der beiden Axen gleich ist. Es leuchtet hieraus von selbst ein, dass das Axenpaar der Drehungen eben so, wie das Kräftepaar, ohne Aenderung seiner Wirkung beliebig in seiner Ebene und in jeder damit parallelen Ebene verlegt werden kann, und dass

eben so wenig, wie ein Kräftepaar sich auf eine einzige Kraft reduciren lässt, auch ein Paar von Drehungen mit einer einzigen Drehung gleiche Wirkung hat.

e. Das Moment einer Kraft in Bezug auf eine Axe des Körpers kann als die Grösse des Strebens betrachtet werden, mit welchem die Kraft den Körper um die Axe, falls diese unbeweglich gemacht wird, zu drehen sucht. Denn, wie schon aus dem Früheren leicht erhellet und späterhin besonders bewiesen werden wird, sind an einem Körper, der eine unbewegliche Axe hat, zwei Kräfte gleichwirkend, wenn sie in Bezug auf die Axe einander gleiche Momente haben. Zufolge der oben bemerkten Reciprocität zwischen drehender und fortrückender Bewegung wird daher umgekehrt durch eine unendlich kleine Drehung des Körpers um eine Axe ein gleichförmiges Fortrücken desselben in Bezug auf eine andere Gerade erzeugt werden, und die Grösse dieses Fortrückens wird auf ganz ähnliche Art, wie das Moment einer Kraft, von der Lage der Geraden gegen die Drehungsaxe und von der Grösse der Drehung abhängig seyn.

In der That folgt dies auch unmittelbar aus jeder der Gleichungen (b^*). Denn so ist z. B. dx, oder die nach der Axe der x geschätzte Verrückung des Punktes (x, y, z), $= y\,dp - x\,dq$, also unabhängig von z, d. h. jeder Punkt der die Ebene der x, y im Punkte (x, y) normal treffenden Geraden rückt längs derselben um gleichviel fort, wenn der Körper um die Axe l um ds gedreht wird. Die Fortrückung selbst aber ist, wenn für dp und dq ihre Werthe aus vor. §. substituirt werden, $= (y\varphi - x\chi)\,ds$, und auf gleiche Weise findet sich (§. 65.) in Bezug auf dieselbe Gerade das Moment einer Kraft P, welche die Axe l zur Richtung hat, also

durch den Anfangspunkt O geht und mit den Axen der x, y, z Winkel macht, deren Cosinus $= \varphi, \chi, \psi$ sind, $= (y\varphi - x\chi) P$. Die längs einer Geraden geschätzte Fortrückung ihrer Punkte, wenn der Körper um einen unendlich kleinen Winkel gedreht wird, ist daher nichts anderes, als das auf diese Gerade bezogene Moment der Drehung, also das Product aus der Drehung in den kürzesten Abstand ihrer Axe von der Geraden und in den Sinus des Winkels, den beide Linien mit einander machen (§. 59. Zus.).

Eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes gestattet der Raum nicht, und ich bemerke nur noch, dass zu Folge des jetzt Erörterten Alles, was bis zum Ende des sechsten Kapitels von Kräften und den Momenten derselben gelehrt worden ist, auch vollkommene Anwendung auf unendlich kleine Drehungen und deren Momente erleidet.

Das Princip der kleinsten Quadrate.

§. 184.

Ausser der Function $\Sigma(Xx + \ldots)$, die beim Gleichgewichte ein Maximum oder ein Minimum wird, giebt es noch eine andere Function, welche dieselbe Eigenschaft besitzt, und die sich ebenfalls aus der Gleichung zwischen den virtuellen Geschwindigkeiten durch Integration herleiten lässt. Zu dem Ende wollen wir uns jede Kraft, wie im Früheren, ihrer Richtung und Grösse nach durch eine von ihrem Angriffspunkte ausgehende gerade Linie ausgedrückt vorstellen. Für die Kraft (X, Y, Z) ist daher (x, y, z) der Anfangspunkt dieser Linie; der Endpunkt sey (ξ, η, ζ), also $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ proportional mit X, Y, Z. Nach dem Princip der

virtuellen Geschwindigkeiten muss daher beim Gleichgewichte seyn:

$$\Sigma[(\xi-x)dx+(\eta-y)dy+(\zeta-z)dz]=0.$$

Von der linken Seite dieser Gleichung ist aber, sobald wir die Coordinaten ξ, η, ζ der Endpunkte der Kräfte constant nehmen und die Gleichung noch mit -2 multipliciren, das Integral:

$$\Sigma[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]=M.$$

Dieser Ausdruck muss daher beim Gleichgewichte gleichfalls ein Maximum oder Minimum seyn.

Sind demnach auf einen frei beweglichen Körper wirkende Kräfte im Gleichgewichte, und werden sie ihrer Richtung und Intensität nach durch gerade von ihren Angriffspunkten A, A', ... aus gezogene Linien AF, $A'F'$, ... dargestellt, so ist, wenn man bei Verrückung des Körpers die Punkte F, F', ... unbeweglich annimmt, die Summe der Quadrate $AF^2+A'F'^2+$... bei der Lage des Körpers im Gleichgewichte ein Maximum oder Minimum.

Da das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten nach §. 179. umgekehrt werden kann, so muss dieses auch mit dem voranstehenden Satze geschehen können, und wir erhalten damit folgenden:

Hat man ein bewegliches System in unveränderlichen Entfernungen von einander liegender Punkte A, A', ... und ein unbewegliches System von eben so vielen Punkten F, F', ..., und bringt man das erstere System gegen das letztere in eine solche Lage, dass die Summe der Quadrate $AF^2+A'F'^2+$... rücksichtlich je zweier einander entgegengesetzten Verrückungen ein Maximum oder ein Minimum ist, so halten sich in dieser Lage in A, A', ... nach den Richtungen

AF, A'F', ... angebrachte und denselben Linien AF, ... ihrer Intensität nach proportionale Kräfte das Gleichgewicht.

§. 185.

Ob bei einem gegebenen Systeme im Gleichgewichte befindlicher Kräfte, nachdem diese durch Linien ausgedrückt worden sind, die Summe M der Quadrate dieser Linien in Bezug auf eine gegebene Verrückung ein Maximum oder Minimum sey, ist aus dem zweiten Differentiale von M zu beurtheilen. Dieses findet sich:

$$d^2 M = 2\Sigma(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\Sigma(Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z),$$

nachdem zuletzt für $\xi - x, \ldots$ wieder $X, \ldots$ gesetzt worden.

Es folgt hieraus zunächst, dass wenn der Körper, auf welchen die Kräfte wirken, nicht gedreht, sondern nur parallel mit sich verrückt wird, die Summe M stets ein Minimum ist. Denn wegen der Beständigkeit der von einander unabhängigen Differentiale da, db, dc, de werden, wenn der Drehungswinkel $de = 0$ gesetzt wird, auch d^2x, d^2y, d^2z, d^2x', ... $= 0$, folglich $d^2M = 2\Sigma(dx^2 + \ldots) =$ einer positiven Grösse, folglich u. s. w.

Eben so ist M rücksichtlich jeder Bewegung des Körpers ein Minimum, wenn das Gleichgewicht Sicherheit hat. Denn in diesem Falle ist $\Sigma(Xd^2x + \ldots)$ negativ (§. 182. zu Ende) und daher d^2M positiv.

Ist dagegen das Gleichgewicht unsicher, so kann nach Beschaffenheit der übrigen Umstände d^2M bald positiv, bald negativ, und daher die Summe M bald ein Grösstes, bald ein Kleinstes seyn.

Immer aber können die die Kräfte vorstellenden Linien so klein genommen werden, dass auch bei jedem unsichern Gleichgewichte die Summe ihrer Quadrate

stets ein Kleinstes ist. Denn lässt man $X, Y, Z, X', \ldots$ unendlich klein seyn, so wird das Glied $2\Sigma(Xd^2x + \ldots)$ von der dritten Ordnung und verschwindet damit gegen das Glied $2\Sigma(dx^2 + \ldots)$, welches von der zweiten Ordnung und immer positiv ist.

Wird demnach zu dem beweglichen Systeme der Angriffspunkte A, A', ... mehrerer sich das Gleichgewicht haltender Kräfte ein zweites System von eben so viel den erstern resp. unendlich nahe liegenden unbeweglichen Punkten F, F', ... hinzugefügt, so dass die Entfernungen AF, $A'F'$, ... der letztern Punkte von den ihnen entsprechenden Angriffspunkten ihrer Richtung und Grösse nach die Kräfte ausdrücken, so wird die Summe der Quadrate dieser Entfernungen bei jeder Verrückung des Systems der Angriffspunkte aus der Lage des Gleichgewichts stets grösser werden.

Diese Eigenschaft des Gleichgewichts ist es, welche ich in der Ueberschrift dieses Abschnitts das Princip der kleinsten Quadrate genannt habe. Es ist dieses Princip zuerst von Gauss aufgestellt worden, und zwar als ein specieller Fall eines weit allgemeineren von ihm entdeckten Princips, auf welches die ganze Mechanik gegründet werden kann.*)

§. 186.

Zum Schlusse wollen wir noch untersuchen, um wie viel die Summe der unendlich kleinen Quadrate wächst, wenn der Körper von der Lage des Gleichgewichts um ein unendlich Weniges entfernt wird.

---

*) Crelle's Journal IV. Band, S. 232.

Seyen ΔM, Δx, Δy, Δz die Incremente, welche M, x, y, z bei irgend einer Verrückung des Körpers erhalten, so ist (§. 184.):

$$\Delta M = -2\Sigma[(\xi - x)\Delta x + (\eta - y)\Delta y + (\zeta - z)\Delta z] + \Sigma(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2).$$

Werden nun die Incremente Δx, Δy, Δz unendlich klein genommen, so wird $\Sigma(\Delta x^2 + \ldots)$ ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung, und wegen des vor der Verrückung angenommenen Gleichgewichts, $\Sigma[(\xi - x)\Delta x + \ldots] = \Sigma(X\Delta x + \ldots) = 0$, d. h. = einem unendlich Kleinen von einer höhern Ordnung, als der ersten, so lange X, Y, Z endliche Grössen sind. Lässt man folglich auch X, Y, Z,... unendlich klein seyn, so wird $\Sigma(X\Delta x + \ldots)$ von einer höhern Ordnung, als der zweiten, und verschwindet damit gegen $\Sigma(\Delta x^2 + \ldots)$, und die vorige Gleichung reducirt sich auf:

$$\Delta M = \Sigma(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2).$$

Bezeichnen daher A, A',... die Oerter der Angriffspunkte beim Gleichgewichte und B, B',... die Oerter derselben nach einer unendlich kleinen Verrückung, so hat man

$$\Sigma(BF^2) - \Sigma(AF^2) = \Sigma(AB^2),$$

d. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen der Punkte des beweglichen Systems von den entsprechenden unbeweglichen Punkten wächst bei einer unendlich kleinen Verrückung des beweglichen Systems um die Summe der Quadrate der von den Punkten dieses Systems beschriebenen Wege.

§. 187.

Zusätze. *a.* Wirken alle Kräfte auf einen einzigen Punkt A, fallen also A', A'',... mit A, und da-

her auch B', B'',... mit B zusammen, so wird die vorige Gleichung

$$\Sigma(BF^2) - \Sigma(AF^2) = n \,.\, AB^2,$$

wo n die Anzahl der Kräfte ist. Da hierbei alle Entfernungen zwischen den noch vorhandenen Punkten A, B, F, F',... unendlich klein sind, mithin das unendlich Kleine mit dem Endlichen nicht mehr in Vergleichung kommt, so wird diese Gleichung auch noch gelten, wenn wir die Punkte in endliche Entfernungen von einander gestellt, also die Kräfte durch endliche Linien ausgedrückt und die Verrückung AB ebenfalls endlich annehmen. Wir kommen hiermit auf einen andern schon seit lange bekannten Satz zurück. Sind nämlich auf den Punkt A wirkende und durch die Linien AF, AF',... vorgestellte Kräfte im Gleichgewichte, so ist die Summe der Projectionen dieser Linien auf jede durch A gelegte Gerade $=0$ (§. 67. Zus.), und daher A der Mittelpunkt von einander gleichen und parallelen auf F, F',... wirkenden Kräften (§. 109. *b.*), also auch der Schwerpunkt von einander gleichen in F, F',... angebrachten Massen oder der sogenannte Punkt der mittlern Entfernungen von F, F',.... Die obige Formel drückt demnach folgenden Satz aus:

Hat man ein System von n Punkten, so ist die Summe der Quadrate ihrer Abstände von einem beliebigen andern Punkte B stets grösser, als die Summe der Quadrate ihrer Abstände von dem Punkte A der mittlern Entfernungen, und zwar grösser um das nfache Quadrat des Abstandes dieses letztern Punktes von jenem willkührlich genommenen *).

*) Unter andern findet sich dieser Satz nebst mehrern interessanten Folgerungen in Carnot's Geometrie der Stellung, übersetzt von Schumacher, 2. Theil, Artik. 274—296.

b. Besteht das System nur aus zwei Kräften, so wird die allgemeine Gleichung im vor. §.:

$$BF^2 + B'F'^2 - AF^2 - A'F'^2 = AB^2 + A'B'^2.$$

Dies lässt sich unter den nöthigen Voraussetzungen, dass A, A', F, F' in einer Geraden liegen, dass $FA = A'F'$, dass $AA' = BB'$, und dass AF, $A'F'$, AB, $A'B'$ unendlich klein sind, ohne Schwierigkeit auch geometrisch darthun. Ist dieses geschehen, so kann man letztere Gleichung in Verbindung mit der ebenfalls leicht geometrisch erweislichen Gleichung in *a.* dazu benutzen, um das Princip der kleinsten Quadrate auf ähnliche Art, wie das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten (§. 178.), aus den ersten Gründen der Statik herzuleiten.

Druck von J. B. Hirschfeld.

Druckfehler und Verbesserungen

Seite 7 Zeile 10 v. o. lies: In derselben
— 21 — 12 v. u. lies: wir, mit
— 23 — 3 v. u. lies: enthaltene mit p und p' nicht
Kraft q
— 96 — 3 v. u. statt Seiten lies Kanten.
— 112 — 7 v. u. lies: $Z, Z', \ldots$ und die Coordinaten
— 139 — 12 v. o. statt M lies: M.
— 142 — 9 v. o. statt Gleichung lies: Gleichungen.
— 143 — 9 v. o. statt $t't$ lies: $t't'$. Auf eben der S
statt der 14—17. Zeile v. o.: Unter
schiedenen Axen t' der grössten
welche den verschiedenen Punkten (f
gehören, fallen aber diejenigen in
linie, welche mit v, d. i. mit der R
— 169 — 6 u. 7 v. o. lies: und die Momente dieser
— 176 — 10 v. o. statt C^2 lies μ.
— 179 — 8 u. 9 v. o. statt: indem es sonst für de
schnittspunkt M zwei, setze: indem
für einen Punkt zwei
— — — 10 v. o. lies: gäbe, auch jede andere. Auf
Seite schiebe zwischen die 8. und
u. ein: Hiernach aber hätte die Auf
Natur entgegen, unzählig viele Lös
— 221 — 17 v. o. vertilge das Komma am Ende der Z
— 232 — 9 v. o. lies: $x_{,,}$ $y_{,}$; $x'_{,,}$ $y'_{,}$;
— — — 4 v. u. statt $aA - bB$ setze: $aB - bA$.
— 256 — 10 v. o. lies: hinzuzufügen,
— 328 — 6 v. o. lies: Denn das Gleichgewicht des
stems,
— 338 - 8 v. o. lies: *die Summe der in die virtuellen*
digkeiten multiplicirten Kräfte

Lehrbuch

der

STATIK

von

August Ferdinand Möbius,

Professor der Astronomie zu Leipzig, Correspondenten der Königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin und Mitgliede der naturforschenden Gesellschaft in Leipzig.

Zweiter Theil.

Mit einer Kupfertafel.

LEIPZIG

bei Georg Joachim Göschen.

1837.

Inhalt des zweiten Theils.

des Gleichgewichts zwischen Kräften, auf mehrere mit einander verbundene feste Körper wirken.

Erstes Kapitel.

gewichte bei zwei mit einander verbundenen Körpern.

Zweites Kapitel.

Vom Gleichgewichte bei einer beliebigen Anzahl mit einander verbundener Körper.

Drittes Kapitel.

Anwendung der vorhergehenden Theorie auf einige Beispiele.

Viertes Kapitel.

Von den Bedingungen der Unbeweglichkeit.

§. 244. Nutzen der vorhergehenden Betrachtungen, um bei einer geometrischen Figur zu bestimmen, wie viel Stücke derselben gegeben seyn müssen, um daraus alle übrigen finden zu können. — §. 245. Erläuterung an einem Polyeder, von welchem alle Kanten ihrer Länge nach gegeben angenommen werden. — §. 246. Bedingung, unter welcher bei einem Systeme zusammenhängender Vielecke in einer Ebene aus den Längen der Seiten allein alle übrigen Stücke der Figur bestimmt werden können. — §. 247—249. Enthält eine Figur unbewegliche Punkte, eine ebene wenigstens zwei, eine räumliche wenigstens drei, so wird die gegenseitige Unbeweglichkeit der Theile der Figur eine vollkommene Unbeweglichkeit. Statische Untersuchung dieser Unbeweglichkeit. Beispiele.

Fünftes Kapitel.

Von der unendlich kleinen Beweglichkeit.

§. 250. Werden von den Theilen einer Figur so viele unveränderlich angenommen, dass die gegenseitige Lage der Theile im Allgemeinen unveränderlich wird, so lassen sich immer noch specielle Bedingungen für das Verhalten der Theile zu einander ausfindig machen, unter denen die gegenseitige Unbeweglichkeit aufhört. — §. 251. Untersuchung der Beschaffenheit der Gleichungen, welche diese Bedingungen ausdrücken. — §. 252. Die bei einer solchen Bedingungsgleichung statt findende Beweglichkeit der Figur ist im Allgemeinen unendlich klein, und es hat alsdann jedes von den unveränderlich gesetzten Stücken der Figur, wenn man es veränderlich werden, die übrigen aber constant bleiben lässt, seinen grössten oder kleinsten Werth. Hieraus entspringende neue Methode, um mit Hülfe der Statik geometrische Aufgaben über Maxima und Minima z. lösen. — §. 253. Die Bedingung zu finden, unter welcher ein Winkel eines ebenen Vierecks, dessen Seiten constante Längen haben, seinen grössten oder kleinsten Werth erreicht. — §. 254—256. Die Bedingung, unter welcher ein Viereck beweglich wird, welches Seiten von constanter Länge, aber veränderliche Winkel hat, und dessen Ecken in unbeweglichen in seiner Ebene enthaltenen Linien beweglich sind. Analoge Bedingung für das Dreieck und mehrseitige Vielecke. — §§. 257. 258. Vier gerade Linien von unbestimmter Länge, von denen jede der nächstfolgenden und die letzte der ersten zu begegnen genöthigt ist, liegen in einer horizontalen Ebene und sind um unbewegliche Punkte in verticalen Ebenen drehbar. Man soll für dieses System, welches im Allgemeinen unbeweglich ist, die Bedingung der Beweglichkeit und die dann nöthige Bedingung des Gleichgewichts finden. Duales Verhältniss zwischen dieser Aufgabe und der vorigen. — §. 259. Dieselbe Aufgabe für ein System von drei Linien. Lösung eines statischen Paradoxons. — §. 260. Bedingung der Beweglichkeit eines Systems dreier Geraden, welche in einer Ebene an drei unbeweglichen Punkten verschiebbar, und deren gegenseitige Durchschnitte in unbeweglichen Linien der Ebene beweglich sind. — §§. 261. 262. Bedingung der Beweglichkeit eines in einer Ebene begriffenen Vierecks mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln, von dessen Seiten zwei einander gegenüberliegende zwei unbewegliche

Sechstes Kapitel.

Vom Gleichgewichte an Ketten und an vollkommen biegsamen Fäden.

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite 7 Zeile 10 v. o. lies: In derselben
— 21 — 12 v. u. lies: wir, mit
— 23 — 3 v. u. lies: enthaltene mit p und p' nicht
Kraft q
— 96 — 3 v. u. statt Seiten lies Kanten.
— 112 — 7 v. u. lies: Z, Z',... und die Coordinaten x,
— 139 — 12 v. o. statt M lies: M.
— 142 — 9 v. o. statt Gleichung lies: Gleichungen.
— 143 — 9 v. o. statt $t't$ lies: $t't'$. Auf eben der Sei
statt der 14—17. Zeile v. o.: Unter
schiedenen Axen t der grössten M
welche den verschiedenen Punkten (f, g
gehören, fallen aber diejenigen in die
linie, welche mit v, d. i. mit der Res
— 169 — 6 u. 7 v. o. lies: und die Momente dieser na
— 176 — 10 v. o. statt C^2 lies μ.
— 179 — 8 u. 9 v. o. statt: indem es sonst für den
schnittspunkt M zwei, setze: indem,
für einen Punkt zwei
— — — 10 v. o. lies: gäbe, auch jede andere. Auf e
Seite schiebe zwischen die 8. und 9.
u. ein: Hiernach aber hätte die Aufga
Natur entgegen, unzählig viele Lösun
— 221 — 17 v. o. vertilge das Komma am Ende der Zei
— 232 — 9 v. o. lies: $x_{,}$, $y_{,}$; $x'_{,}$, $y'_{,}$;
— — — 4 v. u. statt $aA - bB$ setze: $aB - bA$.
— 256 — 10 v. o. lies: hinzuzufügen,
— 328 — 6 v. o. lies: Denn das Gleichgewicht des
stems,
— 338 - 8 v. o. lies: *die Summe der in die virtuellen G*
digkeiten multiplicirten Kräfte

Lehrbuch

der

STATIK

von

August Ferdinand Möbius,

Professor der Astronomie zu Leipzig, Correspondenten der Königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin und Mitgliede der naturforschenden Gesellschaft in Leipzig.

Zweiter Theil.

Mit einer Kupfertafel.

LEIPZIG
bei Georg Joachim Göschen.

1837.

Inhalt des zweiten Theils.

Gesetze des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche auf mehrere mit einander verbundene feste Körper wirken.

Erstes Kapitel.

Vom Gleichgewichte bei zwei mit einander verbundenen Körpern.

Gleichgewicht an einem nicht völlig frei beweglichen Körper. §. 201. Die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts, wenn ein Punkt des Körpers unbeweglich ist, oder wenn ein Punkt in einer unbeweglichen Linie oder Fläche beweglich ist; — §. 202. wenn zwei Punkte des Körpers unbeweglich sind, oder wenn einer derselben, oder beide in unbeweglichen Linien etc. beweglich sind; — §. 203. wenn drei Punkte des Körpers in einer unbeweglichen Ebene beweglich sind. Sind drei Punkte des Körpers unbeweglich oder in unbeweglichen Linien beweglich, so ist der Körper selbst im Allgemeinen unbeweglich. — §. 204. Den 6 Bedingungsgleichungen fürs Gleichgewicht eines Körpers entsprechen 6 von einander unabhängige Bewegungen des Körpers. Ist er an einigen dieser Bewegungen gehindert, so ist die Erfüllung der Gleichungen, die den noch möglichen übrigen Bewegungen entsprechen, die Bedingung des Gleichgewichts.

Zweites Kapitel.

Vom Gleichgewichte bei einer beliebigen Anzahl mit einander verbundener Körper.

§. 205. Bedingung dieses Gleichgewichts, wenn alle Körper des Systems an sich frei beweglich sind. — §. 206. Nachträgliche Bemerkungen. — §. 207. Die Bedingung des Gleichgewichts eines Systems von Körpern besteht in jedem Falle in der Möglichkeit, in den Berührungspunkten der Körper Gegenkräfte von solcher Intensität anzubringen, dass jeder Körper des Systems für sich ins Gleichgewicht kommt.

Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten bei mit einander verbundenen Körpern. §§. 208—210. Beweis, dass die in §. 178. für das Gleichgewicht eines einzigen Körpers bewiesene Gleichung auch beim Gleichgewichte mehrerer mit einander verbundener Körper Gültigkeit hat. — §. 211. Beweis des umgekehrten Satzes nach Laplace und Poisson. — §. 212. Anderer Beweis des umgekehrten Satzes.

§. 213. Bei jedem Systeme von Körpern, welches sich im Gleichgewichte befindet, ist die Summe der Producte aus jeder Kraft in die Entfernung ihres Angriffspunktes von einem unbeweglichen in ihrer Richtung beliebig genommenen Punkte ein Maximum oder Minimum, und zwar ersteres, wenn das Gleichgewicht sicher, letzteres, wenn es unsicher ist. — §. 214. Elementarer Beweis dieses Satzes.

Drittes Kapitel.

Anwendung der vorhergehenden Theorie auf einige Beispiele.

§. 215. Uebersicht des Verfahrens, nach welchem jede hierbei vorkommende Aufgabe in Gleichungen gesetzt und gelöst werden kann. — §§. 216. 217. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche auf 4 sich berührende Kugeln wirken. — §§. 218. 219. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen 4 Kräften, welche auf

die Ecken eines Vierecks wirken, dessen Seiten von unveränderlicher Länge, dessen Winkel aber veränderlich sind. — §§. 220—223. Betrachtung des speciellen Falles, wenn das Viereck ein ebenes ist. — §. 224. Eben so, wie bei einem Vierecke, lassen sich auch bei einem mehrseitigen Vielecke mit veränderlichen Winkeln und Seiten von constanter Länge die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, die an den Ecken angebracht sind, ausmitteln. Geometrische Folgerungen. — §§. 225. 226. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften zu finden, welche auf die Seiten eines Vierecks wirken, dessen Seiten von constanter Länge, die Winkel aber veränderlich sind. — §§. 227—230. Dieselbe Aufgabe unter einigen speciellen Voraussetzungen. — §§. 231. 232. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, die auf 3 Gerade wirken, welche an 3 unbeweglichen Punkten verschiebbar sind, und deren gegenseitige Durchschnitte in 3 unbeweglichen Geraden einer Ebene beweglich sind. Geometrische Folgerungen. — §. 233. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche auf die gegenseitigen Durchschnitte von 3 Geraden wirken, die um 3 unbewegliche Punkte beweglich sind.

Bedingungen des Gleichgewichts bei sich ähnlich bleibenden Figuren. §§. 234. 235. Sind drei Punkte in einer Ebene dergestalt beweglich, dass das von ihnen gebildete Dreieck sich immer ähnlich bleibt, und sollen drei auf sie in der Ebene wirkende Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so müssen sich die Richtungen der Kräfte in einem Punkte schneiden, der mit erstern drei Punkten in einem Kreise liegt. Weitere Folgerungen. — §. 236. Ausdehnung dieser Untersuchung auf Systeme von vier und mehrern Punkten.

Viertes Kapitel.

Von den Bedingungen der Unbeweglichkeit.

§. 237. Wenn das Gleichgewicht eines Systems mit einander verbundener, an sich frei beweglicher Körper, auf welche Kräfte nach beliebigen Richtungen wirken, durch nicht mehr als 6 Gleichungen bedingt ist, so kann keine gegenseitige Beweglichkeit zwischen den Körpern statt finden. — §§. 238. 239. Wie überhaupt bei einem Systeme mit einander verbundener Körper aus der Anzahl der Körper und der Anzahl und Beschaffenheit ihrer Begegnungen über ihre gegenseitige Beweglichkeit geurtheilt werden kann. — §. 240. Geometrischer Beweis, dass die gegenseitige Lage zweier Körper im Allgemeinen unveränderlich ist, wenn in der Oberfläche des einen Körpers 6 bestimmte Punkte des andern enthalten seyn sollen. — §. 241. Hieraus abgeleitete Fälle, in denen einem Systeme von weniger als 6 Punkten, die in unabänderlichen Entfernungen von einander sind, keine Bewegung mehr gestattet ist. — §. 242. Sollen n Körper, die durch Berührung ihrer Flächen mit einander verbunden sind, eine unveränderliche Lage gegen einander haben, so müssen sie sich in wenigstens $6(n-1)$ Punkten berühren. Fälle, in denen man sich schon im Voraus der gegenseitigen Unbeweglichkeit versichert halten kann. — §. 243. Analoge Sätze bei krummen Linien in Ebenen.

§. 244. Nutzen der vorhergehenden Betrachtungen, um bei einer geometrischen Figur zu bestimmen, wie viel Stücke derselben gegeben seyn müssen, um daraus alle übrigen finden zu können. — §. 245. Erläuterung an einem Polyeder, von welchem alle Kanten ihrer Länge nach gegeben angenommen werden. — §. 246. Bedingung, unter welcher bei einem Systeme zusammenhängender Vielecke in einer Ebene aus den Längen der Seiten allein alle übrigen Stücke der Figur bestimmt werden können. — §. 247—249. Enthält eine Figur unbewegliche Punkte, eine ebene wenigstens zwei, eine räumliche wenigstens drei, so wird die gegenseitige Unbeweglichkeit der Theile der Figur eine vollkommene Unbeweglichkeit. Statische Untersuchung dieser Unbeweglichkeit. Beispiele.

Fünftes Kapitel.

Von der unendlich kleinen Beweglichkeit.

§. 250. Werden von den Theilen einer Figur so viele unveränderlich angenommen, dass die gegenseitige Lage der Theile im Allgemeinen unveränderlich wird, so lassen sich immer noch specielle Bedingungen für das Verhalten der Theile zu einander ausfindig machen, unter denen die gegenseitige Unbeweglichkeit aufhört. — §. 251. Untersuchung der Beschaffenheit der Gleichungen, welche diese Bedingungen ausdrücken. — §. 252. Die bei einer solchen Bedingungsgleichung statt findende Beweglichkeit der Figur ist im Allgemeinen unendlich klein, und es hat alsdann jedes von den unveränderlich gesetzten Stücken der Figur, wenn man es veränderlich werden, die übrigen aber constant bleiben lässt, seinen grössten oder kleinsten Werth. Hieraus entspringende neue Methode, um mit Hülfe der Statik geometrische Aufgaben über Maxima und Minima zu lösen. — §. 253. Die Bedingung zu finden, unter welcher ein Winkel eines ebenen Vierecks, dessen Seiten constante Längen haben, seinen grössten oder kleinsten Werth erreicht. — §. 254—256. Die Bedingung, unter welcher ein Viereck beweglich wird, welches Seiten von constanter Länge, aber veränderliche Winkel hat, und dessen Ecken in unbeweglichen in seiner Ebene enthaltenen Linien beweglich sind. Analoge Bedingung für das Dreieck und mehrseitige Vielecke. — §§. 257. 258. Vier gerade Linien von unbestimmter Länge, von denen jede der nächstfolgenden und die letzte der ersten zu begegnen genöthigt ist, liegen in einer horizontalen Ebene und sind um unbewegliche Punkte in verticalen Ebenen drehbar. Man soll für dieses System, welches im Allgemeinen unbeweglich ist, die Bedingung der Beweglichkeit und die dann nöthige Bedingung des Gleichgewichts finden. Duales Verhältniss zwischen dieser Aufgabe und der vorigen. — §. 259. Dieselbe Aufgabe für ein System von drei Linien. Lösung eines statischen Paradoxons. — §. 260. Bedingung der Beweglichkeit eines Systems dreier Geraden, welche in einer Ebene an drei unbeweglichen Punkten verschiebbar, und deren gegenseitige Durchschnitte in unbeweglichen Linien der Ebene beweglich sind. — §§. 261. 262. Bedingung der Beweglichkeit eines in einer Ebene begriffenen Vierecks mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln, von dessen Seiten zwei einander gegenüberliegende zwei unbewegliche

Punkte enthalten. — §. 263. Bedingung des Gleichgewichts an diesem Vierecke. Die Roberval'sche Waage. — §§. 264. 265. Bedingung der Beweglichkeit eines ebenen Sechsecks mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln, bei welchem eine Seite um die andere einen unbeweglichen Punkt enthält. — §§. 266. 267. Bedingung der Beweglichkeit eines ebenen Vierecks mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln, bei welchem jede Seite an einem unbeweglichen Punkte verschiebbar ist.

Sechstes Kapitel.

Vom Gleichgewichte an Ketten und an vollkommen biegsamen Fäden.

§. 268. Erklärung einer Kette und eines Fadens. — §. 269. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen zwei Kräften, welche auf den Anfang und das Ende einer frei beweglichen Kette oder — §. 270. eines frei beweglichen Fadens wirken. — §. 271. Die Bedingungen des Gleichgewichts, wenn die Kette oder — §. 272. der Faden, auf dessen Enden Kräfte wirken, über eine unbewegliche Fläche gelegt ist. Grösse und Richtung der Spannung des Fadens. — §§. 273. 274. Bestimmung der vom Faden auf die Fläche ausgeübten Pressung. Bedingungen die Richtung der Kräfte und die Seite, welche die Fläche dem Faden zukehrt, betreffend. — §. 275. Untersuchung der Fälle, wenn der Faden nur zum Theil über die Fläche gelegt ist, und — §. 276. wenn die Fläche beweglich ist. — §§. 277. 278. Beispiele zu diesen Fällen. — §. 279. Das Gleichgewicht eines über eine Fläche gespannten Fadens dauert fort, wenn man die Fläche wegnimmt und auf alle seine Punkte Kräfte wirken lässt, welche die Stelle der von der Fläche auf den Faden ausgeübten Pressung ersetzen.

§. 280. Die Bedingungen des Gleichgewichts eines frei beweglichen Fadens, wenn auf alle seine Punkte ihrer Richtung und Grösse nach gegebene Kräfte wirken. Darstellung dieser Bedingungen durch zwei aus dem Princip der Spannung entwickelte Integralgleichungen. — §. 281. Entwickelung derselben Gleichungen aus dem Princip der Momente. Bestimmung der bei der Integration hinzukommenden 3 oder 5 Constanten, nachdem der Faden in einer Ebene oder im Raume überhaupt enthalten ist. — §. 282. Die Bedingungen des Gleichgewichts, durch zwei Differentialgleichungen ausgedrückt. — §. 283. Entwickelung noch anderer bemerkenswerther Relationen, welche beim Gleichgewichte statt finden. — §§. 284. 285. Die Bedingungen des Gleichgewichts, wenn der in allen seinen Theilen der Wirkung von Kräften unterworfene Faden auf einer unbeweglichen Fläche beweglich ist. — §. 286. Wie in den vorhergehenden Formeln die Dichtigkeit und die Dicke des Fadens zu berücksichtigen sind.

Von der Kettenlinie. §. 287. Die Bedingungen des Gleichgewichts, wenn die auf alle Punkte des Fadens wirkenden Kräfte parallele Richtungen haben. Gesetz der Spannung in diesem Falle. — §. 288. Begriff und einfachste Gleichung der Kettenlinie. — §. 289. Gleichung der Kettenlinie zwischen rechtwinkligen Coordinaten. Parameter und Directrix einer Kettenlinie. — §. 290. Rectification und Quadratur der Kettenlinie. — §§. 291. 292. Zwei Gleichungen für

Siebentes Kapitel.

Analogie zwischen dem Gleichgewichte an einem Faden u der Bewegung eines Punktes.

Achtes Kapitel.

Vom Gleichgewichte an elastischen Fäden.

Zweiter Theil.

Gesetze des Gleichgewichts

zwischen Kräften,

welche auf mehrere mit einander verbundene
feste Körper wirken.

Erstes Kapitel.

Vom Gleichgewichte bei zwei mit einander verbundenen Körpern.

§. 188.

Nachdem wir in dem Bisherigen die Gesetze des Gleichgewichts zwischen Kräften, die auf einen und denselben Körper wirken, erforscht haben, wollen wir gegenwärtig die Bedingungen zu bestimmen suchen, welche statt finden müssen, wenn Kräfte, welche an einem Systeme mit einander verbundener Körper angebracht sind, sich das Gleichgewicht halten sollen.

Zwei oder mehrere Körper nennen wir aber überhaupt mit einander verbunden, wenn die gegenseitige Lage der Körper gewissen, durch keine Kraft verletzbaren, Bedingungen unterworfen ist, so dass, wenn die Lage eines oder etlicher Körper gegeben ist, die Lage der übrigen mehr oder weniger, oder auch ganz, bestimmt ist. Hierdurch geschieht es, dass, wenn von einem Systeme mit einander verbundener Körper der eine bewegt wird, einer oder mehrere der übrigen Körper, wo nicht alle, gleichfalls ihre Lage zu verändern

genöthigt sind, dass folglich die Kraft, welche die B
wegung des einen Körpers hervorbringt, auch auf d
übrigen Körper Einfluss übt, und dass daher, we
ein solches System im Gleichgewichte seyn soll, bei
dem einzelnen Körper des Systems die unmittelbar a
ihn wirkenden Kräfte mit den Einflüssen, welche
von den an den übrigen Körpern angebrachten Kr
ten erfährt, das Gleichgewicht halten müssen.

Die Ermittelung dieser Einflüsse ist demnach d
Hauptaufgabe des nun folgenden zweiten Theils d
Statik, indem mit Berücksichtigung derselben jede A
gabe über das Gleichgewicht eines Systems verbun
ner Körper auf das im ersten Theile behandelte Glei
gewicht isolirter Körper reducirt werden kann.

§. 189.

Die Bedingungen, denen man die gegenseitige La
der Körper unterworfen annehmen kann, sind entwe
ganz willkührliche, oder solche, welche in der Na
der Körper selbst ihren Grund haben. Eine willkü
liche Bedingung wäre z. B. die, dass von drei K
pern, wie sie auch ihre gegenseitige Lage ändern, d
Inhalt des Dreiecks, welches ihre Schwerpunkte bild
von gleicher Grösse bleiben soll. Wenn nun auch sell
für dergleichen nur in der Idee existirende, aber nic
wohl physisch darstellbare Systeme die Gesetze d
Gleichgewichts sich entwickeln lassen, so könnten die
Entwickelungen doch nur in rein mathematischer H
sicht von Interesse seyn, sonst aber nicht, wenigste
nicht unmittelbar, einen reellen Nutzen gewähren. W
wollen daher gegenwärtig nur diejenigen Verbindung
der Körper berücksichtigen, welche in den allgemein
physischen Eigenschaften derselben begründet sind.

Von diesen Eigenschaften, deren man insgemein vier zu rechnen pflegt: Ausdehnung, Theilbarkeit, Trägheit und Undurchdringlichkeit, kann nun offenbar nur die letztere zugleich Ursache seyn, dass die auf den einen von zwei Körpern wirkenden Kräfte gleichzeitig auf den andern ihre Wirkung äussern, und dieses auch nur in dem Falle, wenn die Körper einander berühren, und wenn die den einen von ihnen angreifenden Kräfte ihn in den von dem andern eingenommenen Raum einzudringen nöthigen, ihn also nach der Seite zu treiben, wo ihn der andere berührt, nicht nach einer andern Richtung, indem sonst die Berührung und damit die Einwirkung aufgehoben würde.

Von dieser der Natur gemässen Bedingung wollen wir aber zur Vereinfachung und Erleichterung unserer Untersuchungen insofern wieder abweichen, dass wir die Berührung der Körper als unauflöslich betrachten, so dass, wenn von zwei durch Berührung mit einander verbundenen Körpern der eine festgehalten wird, dem andern nur diejenige Bewegung gestattet ist, bei welcher er den erstern in eben so vielen Punkten, als anfänglich, zu berühren fortfährt. Streitet nun diese Hypothese, in den meisten Fällen wenigstens, gegen die Natur der Dinge, und ist nichts vorhanden, welches zwei sich nur berührende Körper, sobald sie nach entgegengesetzten Seiten getrieben werden, sich zu trennen verhinderte, so wird es doch in jedem speciellen Falle leicht seyn, die Bedingungen zu finden, die wegen der möglichen Trennung der Körper zu den übrigen Bedingungen des Gleichgewichts noch hinzugefügt werden müssen.

Auch giebt es in der That Systeme in der Natur, die mit unserer Hypothese mehr oder weniger in Ueber

einstimmung sind. Ganz besonders ist dieses mit ein biegsamen Faden der Fall. Denn einen solchen ka man sich als ein System unendlich vieler unendl kleiner Körper vorstellen, von denen jeder mit z andern durch unzertrennbare Berührung verbunden i und man erlangt dadurch den Vortheil, das Gleichg wicht an einem biegsamen Faden nach denselben Prin pien, als wie das Gleichgewicht jedes andern Syste sich berührender Körper, untersuchen zu können.

Diese durch keine Kräfte auflösliche Berühru ist also die Art und Weise, auf welche wir die K per mit einander verbunden annehmen wollen, und durch es geschehen soll, dass die an dem einen K per angebrachten Kräfte auf die andern Körper I fluss haben. Das Beiwort: unauflöslich, wird jedoch Kürze willen in dem Folgenden weggelassen werd da wir uns jede Berührung, dafern nicht den Geg theil erinnert wird, als eine solche zu denken habe

---

§. 190.

Grundsätze. I. Findet zwischen Kräft welche auf mehrere mit einander verbunde Körper wirken, Gleichgewicht statt, so dau dasselbe noch fort, wenn die gegenseitige La einiger oder aller dieser Körper unveränd lich gemacht wird.

Unter den Bedingungen, welche zum Gleich wichte mit einander verbundener Körper nöthig si müssen folglich alle diejenigen enthalten seyn, wel erfordert werden, wenn die gegenseitige Lage ein oder aller dieser Körper unveränderlich angenomm wird. Insbesondere müssen daher die sechs Bedingun

gleichungen für das Gleichgewicht zwischen Kräften, welche an einem einzigen frei beweglichen Körper angebracht sind (§. 66.), auch beim Gleichgewichte zwischen Kräften statt finden, welche auf mehrere mit einander verbundene an sich frei bewegliche Körper wirken.

II. Das Gleichgewicht bei mehrern mit einander verbundenen Körpern wird nicht aufgehoben, wenn einer oder etliche derselben unbeweglich gemacht werden.

Die Bedingungen, welche zum Gleichgewichte eines zum Theil aus unbeweglichen Körpern bestehenden Systems nöthig sind, müssen daher auch dann in Erfüllung gehen, wenn man die unbeweglichen beweglich werden lässt.

III. Sind von mehrern mit einander verbundenen Körpern einer oder etliche unbeweglich, und herrscht zwischen Kräften, welche auf die beweglichen wirken, Gleichgewicht, so ist es immer möglich, an den unbeweglichen Kräfte anzubringen, dergestalt, dass, wenn die unbeweglichen gleichfalls beweglich angenommen werden, das Gleichgewicht nicht unterbrochen wird.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines Systems, in welchem bewegliche Körper mit unbeweglichen verbunden sind, müssen daher so beschaffen seyn, dass, wenn man die unbeweglichen beweglich werden lässt, es möglich ist, an den unbeweglichen Kräfte anzubringen, welche mit den Kräften an den beweglichen das Gleichgewicht halten.

Noch ist zu bemerken, dass die in §. 4. in Bezug auf einen einzigen Körper aufgestellten Grundsätze III.

und IV. auch auf jedes System von Körpern Anw dung leiden, und dass der Grundsatz VIII. in §. auch dann noch gilt, wenn die zwei Punkte, auf wel Kräfte wirken, zwei verschiedenen Körpern angehör die dergestalt mit einander verbunden sind, dass gegenseitige Entfernung der zwei Punkte unveränd lich ist.

§. 191.

Mit Hülfe dieser Grundsätze wollen wir nun zuv derst das Gleichgewicht an einem Systeme von zwei sich berührenden frei beweglichen Körpern in U tersuchung ziehen. Der eine von ihnen sey, um v dem einfachsten Falle auszugehen, unendlich klein od ein physischer Punkt A; den andern, in dessen Ob fläche dieser Punkt nach allen Richtungen bewegli ist, wollen wir uns Anfangs kugelförmig denken. W ken nun auf A und der Kugel Mittelpunkt C zw Kräfte P und R, und sind diese einander gleich, u ihre Richtungen einander direct entgegengesetzt, al normal auf der Oberfläche, so halten sie sich d Gleichgewicht, weil die gegenseitige Entfernung ihr Angriffspunkte A und C unveränderlich ist (§. 14. VI u. vor. §.).

Da jede Kraft, ihrer Wirkung unbeschadet, a jeden Punkt ihrer Richtung, der mit ihrem anfänglich Angriffspunkte fest verbunden ist, verlegt werden kar so wird das Gleichgewicht noch fortbestehen, we wir die auf C wirkende Kraft R in einem beliebig andern Punkte des durch A zu legenden Kugeldurc messers anbringen. Auch können wir statt derselb zwei oder mehrere andere, auf beliebige Punkte d Kugel wirkende Kräfte setzen, wenn nur von letzte

Kräften die erstere die Resultante ist. Endlich werden wir, ohne das Gleichgewicht aufzuheben, dem mit einer Kugelfläche begränzten Körper jede beliebige andere Form geben können, wenn nur das Flächenelement, in welchem sich der bewegliche Punkt A befindet, seine Lage, in welcher es von der auf A wirkenden Kraft P normal getroffen wird, beibehält; denn nur von der Lage dieses Elements der Fläche, und keines andern, kann das in Rede stehende Gleichgewicht abhängig seyn.

Zwischen mehrern an einem frei beweglichen Körper angebrachten Kräften und einer Kraft, welche auf einen in der Oberfläche des Körpers beweglichen Punkt A wirkt, herrscht demnach Gleichgewicht, wenn erstere Kräfte eine der letztern gleiche und direct entgegengesetzte Resultante haben, und wenn die Richtung der auf A wirkenden Kraft, folglich auch die Resultante der übrigen, die Oberfläche in A normal trifft.

Diese zwei Bedingungen sind aber zum Gleichgewichte nicht allein hinreichend, sondern auch nothwendig. Denn sind die Kräfte im Gleichgewichte, so wird dieses auch noch bestehen, wenn man den Punkt in der Fläche unbeweglich und somit als einen mit den Angriffspunkten der übrigen Kräfte in fester Verbindung stehenden Punkt nimmt (vor. §. I.). Alsdann aber muss, wie bei einem einzigen festen Körper, die auf den Punkt wirkende Kraft den übrigen das Gleichgewicht halten und folglich, in entgegengesetzter Richtung genommen, die Resultante der übrigen seyn.

Um die Nothwendigkeit der zweiten Bedingung zu beweisen, setze man, die Linie, in welche die Richtungen der Kraft P am Punkte A und der Resultante R

der übrigen fallen, sey nicht auf der Fläche normal sondern beliebig gegen dieselbe geneigt. Den Punk dieser Linie, in welchem sie die Fläche schneidet, als den Punkt der Fläche, über welchem sich A befindet nehme man zum Angriffspunkte von R, und zerlege hierauf R nach einer auf der Fläche normalen und einer die Fläche berührenden Richtung in die Kräft R_1 und R_2. Nach denselben Richtungen zerlege man auch P in P_1 und P_2. Wie leicht ersichtlich, erhäl man hierdurch zwei Paare einander gleicher und direc entgegengesetzter Kräfte P_1 und R_1, P_2 und R_2. Von diesen sind nun P_1 und R_1 normal auf der Fläch und daher im Gleichgewichte. Sollten mithin P un R sich das Gleichgewicht halten, so müssten es auch P_2 und R_2. Dieses ist aber nicht möglich, da der i der Fläche bewegliche Punkt A und der Punkt de Fläche selbst, über welchem ersterer liegt, den tan gentiellen entgegengesetzten Richtungen, nach dener sie von P_2 und R_2 getrieben werden, gleichzeitig z folgen, durch nichts gehindert werden; folglich u. s. w

§. 192.

Zusätze. *a.* Wenn zwischen den Kräften, welch auf den freien beweglichen Körper und den in seine Oberfläche beweglichen Punkt wirken, Gleichgewich herrscht, so wird dieses nicht unterbrochen, wenn wi den Körper unbeweglich werden lassen. Alsdann abe sind die an ihm angebrachten Kräfte von keiner Wi kung mehr, und wir erkennen daraus, dass, wenn au einen in einer unbeweglichen Fläche beweglichen Punkt eine die Fläche normal treffende Kraft wirkt, keine Bewegung erfolgen kann. Und umgekehrt: Bleibt ein auf einer unbeweglichen Fläche beweglicher und der

Wirkung einer Kraft ausgesetzter Punkt in Ruhe, so ist die Richtung der Kraft auf der Fläche normal. Denn lässt man die Fläche beweglich werden, so kann man das dadurch verloren gehende Gleichgewicht durch Kräfte, welche man an der Fläche anbringt, wieder herstellen. (§. 190. III.). Dieses neue Gleichgewicht ist aber nach vor. §. nur dann möglich, wenn die auf den Punkt wirkende Kraft die Fläche normal trifft.

b. Wird umgekehrt, statt des Körpers, der Punkt unbeweglich gesetzt, und somit die Beweglichkeit des Körpers dergestalt beschränkt, dass seine Oberfläche einem unbeweglichen Punkte A zu begegnen genöthigt ist, so ergiebt sich auf ganz ähnliche Weise, wie im vorigen Falle, die zum Gleichgewichte der auf den Körper wirkenden Kräfte hinreichende und nothwendige Bedingung, dass die Kräfte eine durch den Punkt A gehende und die Oberfläche daselbst normal treffende Resultante haben.

c. Sind in der Oberfläche eines beweglichen Körpers zwei oder mehrere bewegliche Punkte A, B,..., und wirken auf jeden der Punkte eine Kraft, P auf A, Q auf B, etc. und auf den Körper mehrere Kräfte, oder nur eine, oder auch gar keine Kraft, so wird zum Gleichgewichte erfordert, dass sämmtliche Kräfte sich eben so, als wären ihre Angriffspunkte fest mit einander verbunden, das Gleichgewicht halten, und dass die Richtungen der auf die beweglichen Punkte wirkenden Kräfte die Oberfläche normal treffen.

Die Nothwendigkeit der ersten Bedingung leuchtet sogleich ein, wenn man die Punkte A, B,... mit der Oberfläche sich fest vereinigen lässt; die Nothwendigkeit der zweiten erhellet aus *a.*, wenn man die Punkte in der Oberfläche beweglich, den Körper selbst aber

unbeweglich annimmt (§. 190. II.). Die zwei Bedingungen sind aber auch die einzigen, welche zum Gleichgewichte erfordert werden. Denn sind die auf den Körper wirkenden Kräfte mit den Kräften P, Q... an den beweglichen Punkten eben so im Gleichgewichte, als wenn die Punkte an der Oberfläche fest wären, so müssen sich für erstere Kräfte den letztern gleiche, direct entgegengesetzte und auf Punkte des Körpers selbst wirkende Kräfte $-P$, $-Q$,... substituiren lassen. Da nun der zweiten Bedingung zufolge P, Q,... auf der Oberfläche normal sind, so herrscht nach §. 191. zwischen P und $-P$ besonders, zwischen Q und $-Q$ besonders etc., mithin zwischen sämmtlichen Kräften Gleichgewicht.

d. Werden die Punkte A, B,... unbeweglich angenommen, wird aber der Körper beweglich gelassen und mithin der Bedingung unterworfen, dass seine Fläche zwei oder mehreren unbeweglichen Punkten begegnet, so ist die einzige zum Gleichgewichte der auf den Körper wirkenden Kräfte nöthige Bedingung, dass es möglich seyn muss, diese Kräfte in andere zu verwandeln, deren Richtungen die unbeweglichen Punkte treffen und daselbst auf der Oberfläche normal sind.

Diese Bedingung ist hinreichend, weil nach *b.* keine der durch die Verwandlung erhaltenen normalen Kräfte Bewegung hervorbringen kann. Sie ist aber auch nöthig, weil, wenn man die Punkte wieder beweglich werden lässt, die Kräfte, welche nach §. 190. III. zur Erhaltung des Gleichgewichts an den Punkten angebracht werden können, nach *c.* auf der Fläche normal seyn und, in entgegengesetzter Richtung genommen, mit den Kräften am Körper gleiche Wirkung haben müssen.

e. Ist die Oberfläche des Körpers an einem oder mehrern unbeweglichen Punkten verschiebbar, und sind in derselben Fläche ein oder mehrere bewegliche Punkte, so ist es zum Gleichgewichte zwischen Kräften, welche an diesen beweglichen Punkten und an Punkten des Körpers selbst angebracht sind, nöthig und hinreichend, dass die Kräfte an den beweglichen Punkten die Fläche normal treffen, und dass diese Kräfte in Verbindung mit den auf den Körr unmittelbar wirkenden Kräften sich in andere verwandeln lassen, welche die Fläche in den unbeweglichen Punkten normal treffen.

Den Beweis hiervon übergehe ich, da er denen für die vorigen Fälle *c.* und *d.* ganz ähnlich ist. Ich kann aber nicht umhin, auf geometrische Folgerungen eigener Art aufmerksam zu machen, die sich aus diesem Satze ziehen lassen.

Sey die Oberfläche eines beweglichen Körpers durch einen unbeweglichen Punkt A zu gehen genöthigt, und in ihr ein beweglicher Punkt B, auf welche ..e Kraft nach parallel bleibender Richtung wirke; ... Körper selbst aber sey keine Kraft angebracht. Nach letzterem Satze wird nun beim Gleichgewichte der Körper und der in seiner Fläche bewegliche Punkt B eine solche Lage einnehmen, dass die Richtung der Kraft auch durch A geht und in A sowohl, als in B, die Fläche normal trifft. In eine solche Lage aber werden der Körper und der Punkt B gewiss kommen, indem sonst die sich parallel bleibende Kraft ein Perpetuum mobile um den unbeweglichen Punkt A erzeugen würde, welches nicht möglich ist. Diess führt zu dem Schlusse:

In einer jeden in sich zurückkehrenden stetig gekrümmten Fläche giebt es wenigstens Ein Paar

von Punkten, welches die Eigenschaft besitzt, dass eine durch sie gelegte Gerade die Fläche in beiden Punkten normal trifft.

Beim Ellipsoid z. B. hat man drei solcher Paare von Punkten. Die sie verbindenden Linien sind die drei Hauptaxen; ausser ihnen giebt es keine andere die Fläche des Ellipsoids zweimal rechtwinklig schneidende Gerade.

Geht die Fläche eines Körpers durch zwei unbewegliche Punkte A und B, und wirkt auf einen in ihr beweglichen Punkt C eine Kraft nach einer sich parallel bleibenden und folglich mit AB stets denselben Winkel machenden Richtung, so ist diese Richtung, wenn der Körper in die Lage des Gleichgewichts gekommen, in C auf seiner Fläche normal, liegt mit den durch A und B zu ziehenden Normalen in einer Ebene und trifft diese Normalen in einem und demselben Punkte. Da nun der Körper in die Gleichgewichtslage gewiss kommen wird, so folgern wir:

In einer in sich zurücklaufenden stetig gekrümmten Fläche ist es immer möglich, drei Punkte dergestalt zu bestimmen, dass die durch sie zu ziehenden Normalen in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte schneiden, dass der gegenseitige Abstand zweier der drei Punkte von gegebener, die grösste Sehne der Fläche nicht überschreitender, Grösse ist, und dass mit dieser Abstandslinie die Normale durch den dritten Punkt einen gegebenen Winkel macht.

Durch Annahme noch mehrerer unbeweglicher Punkte lassen sich noch einige andere Sätze dieser Art finden. Es wäre aber überflüssig, dieselben herzusetzen, da sie Jeder nach der durch die mitgetheil-

ten gegebenen Anleitung leicht selbst wird entwickeln können.

§. 193.

Das im vor. §. in *d.* und *e.* betrachtete Gleichgewicht eines Körpers, dessen Fläche durch mehrere unbewegliche Punkte zu gehen genöthigt ist, macht noch eine besondere Erörterung nöthig. Die Bedingung dieses Gleichgewichts war, dass für die am Körper angebrachten Kräfte, — zu denen in *e.* noch die zu rechnen sind, welche an den in der Oberfläche beweglichen Punkten wirken, — dass für alle diese Kräfte ein System gleichwirkender Kräfte substituirt werden konnte, deren Richtungen die Oberfläche normal in den unbeweglichen Punkten trafen. Sollen aber zwei an einem Körper angebrachte Systeme von gleicher Wirkung seyn, so müssen zwischen den die Intensitäten und Richtungen der Kräfte bestimmenden Grössen sechs Gleichungen erfüllt seyn (§. 66. Zus.). Soll folglich ein gegebenes System in ein anderes verwandelt werden, von dessen Kräften, deren Anzahl $=n$ sey, die Richtungen gegeben sind, so ist dieses im Allgemeinen, wenn $n>5$, immer möglich. Denn ist $n=6$, so lassen sich die 6 unbekannten Intensitäten aus jenen 6 Gleichungen finden; ist aber $n>6$, so kann man von $n-6$ Kräften die Intensitäten willkührlich annehmen und damit die 6 übrigen bestimmen. Wenn dagegen $n<6$, so können die n Intensitäten aus den 6 Gleichungen eliminirt werden, und es bleiben dann $6-n$ Bedingungsgleichungen zurück, welche erfüllt seyn müssen, wenn die Reduction des gegebenen Systems möglich seyn soll.

Ist demnach die Fläche eines Körpers durch n

unbewegliche Punkte zu gehen genöthigt, so kö
für $n>5$ die auf den Körper wirkenden Kräfte im
in n andere die Fläche in den n Punkten normal
fende Kräfte verwandelt werden, deren Intensitäte
$n=6$ bestimmte Werthe erhalten, für $n>6$ aber
Theil unbestimmt bleiben. Es herrscht folglich
immer Gleichgewicht, welches auch die auf den I
per wirkenden Kräfte seyn mögen; oder mit an
Worten:

Ein Körper, dessen Oberfläche durch sechs o mehrere unbewegliche Punkte zu gehen genöthigt ist ebenfalls unbeweglich.

Ist die Zahl n der unbeweglichen Punkte, mithin der normalen Kräfte, kleiner als 6, so mü $6-n$ Bedingungen zwischen den Richtungen di Kräfte und den Richtungen und Intensitäten der Körper angebrachten Kräfte erfüllt werden, wenn l tere Kräfte auf erstere sollen reducirt werden kön In diesem Falle findet also nicht immer Gleichgew statt, d. h.:

Die Beweglichkeit eines Körpers ist nie vö aufgehoben, wenn seine Oberfläche durch wen als sechs unbewegliche Punkte zu gehen genöth ist.

Werden die $6-n$ Bedingungen erfüllt, und herr mithin Gleichgewicht, so erhalten die normalen Krä bestimmte Werthe.

Diese allgemeinen Sätze sind indessen mehre Ausnahmen unterworfen. Denn zuerst kann in ge sen Fällen auch bei 6 und noch mehreren unbewe chen Punkten Beweglichkeit statt finden. Ist die Flä eine Ebene, oder die Fläche einer Kugel, oder all meiner eine Revolutionsfläche, oder ist sie eine Schr

bünfläche, so kann die Anzahl der unbeweglichen Punkte jede beliebige seyn, ohne dass die Beweglichkeit der Fläche aufgehoben wird; denn jede dieser Flächen ist in sich selbst verschiebbar. Analytisch giebt sich diese Beweglichkeit dadurch zu erkennen, dass die in beliebiger Zahl genommenen normalen Kräfte aus den vorhin gedachten sechs Gleichungen sich sämmtlich eliminiren lassen, und dadurch von diesen Kräften unabhängige Gleichungen hervorgehen, welche die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den ursprünglich auf den Körper wirkenden Kräften angeben.

Sodann kann es geschehen, dass auch bei 6 oder weniger unbeweglichen Punkten einige oder alle der auf sie gerichteten normalen Kräfte ihren Intensitäten nach unbestimmt bleiben. Dieser Fall tritt dann ein, wenn von den 6, 5, 4,.. normalen Richtungen einige oder alle eine solche Lage haben, dass sich Kräfte angeben lassen, welche, nach ihnen wirkend, im Gleichgewichte sind. Denn liegen z. B. bei drei Punkten die zugehörigen Normalen α, β, γ in einer Ebene und schneiden sich in einem Punkte, und hat man die gegebenen Kräfte auf drei nach α, β, γ, wirkende P, Q, R reduciren können, so sind mit ihnen die gleichfalls nach α, β, γ gerichteten $P + S \sin \beta^\wedge\gamma$, $Q + S \sin \gamma^\wedge\alpha$, $R + S \sin \alpha^\wedge\beta$ gleichwirkend, welches auch die Intensität von S seyn mag, indem die drei mit S proportionalen Kräfte sich besonders das Gleichgewicht halten.

---

§. 194.

Auf die vorhergehenden Betrachtungen über das Gleichgewicht an einem Körper und mehrern mit ihm verbundenen, theils beweglichen, theils unbeweglichen

Punkten lassen sich die nun folgenden Untersuchungen, welche das Gleichgewicht an zwei oder mehrern mit einander verbundenen Körpern zum Gegenstande haben, immer zurückführen. Denn um dies gleich an dem einfachsten Falle zu zeigen, wenn das System nur aus zwei sich mit ihren Flächen in einem Punkte berührenden frei beweglichen Körpern *a* und *a'* besteht, so kann diese Flächenberührung offenbar auch dadurch ausgedrückt werden, dass es einen Punkt *A* geben soll, welcher in den Flächen beider Körper zugleich beweglich ist, einen Punkt also, der, wenn wir uns ihn als ein nach allen Dimensionen unendlich kleines Körperchen denken, die Körper *a* und *a'* an der Stelle, an welcher sie ohne ihn zusammentreffen würden, um ein unendlich Geringes von einander getrennt erhält.

Seyen nun die auf die zwei Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewicht, und lassen wir zuerst den Zwischenpunkt *A*, wie wir ihn nennen können, unbeweglich im Raume werden. Da hierdurch das Gleichgewicht nicht aufgehoben wird, und da die Körper nicht unmittelbar an einander, sondern an den unbeweglichen Punkt *A* stossen und daher ausser aller Verbindung mit einander sind, so müssen (§. 192. *b.*) die auf *a* wirkenden Kräfte sowohl, als die an *a'* angebrachten, eine in die gemeinschaftliche Normale der Flächen beider Körper fallende Resultante haben. Beide Resultanten aber müssen überdies einander gleich und entgegengesetzt seyn, damit, wenn *A* wieder beweglich wird, statt dessen aber die gegenseitige Lage der Körper unveränderlich angenommen wird, die an ihnen, als an einem einzigen festen Körper, angebrachten Kräfte sich das Gleichgewicht halten.

Diese Bedingungen sind aber nicht allein nothwendig, sondern auch hinreichend. Denn haben die auf a wirkenden Kräfte eine in die Normale bei A fallende Resultante P, die auf a' wirkenden eine der P gleiche und direct entgegengesetzte Resultante P', und bringt man hierauf am Zwischenpunkte A selbst zwei diesen Resultanten gleiche und entgegengesetzte Kräfte $-P$ und $-P'$ an, so halten diese letztern einander das Gleichgewicht und können daher den Zustand des Systems nicht ändern. Da aber jetzt nach §. 191. P und $-P$ für sich und eben so P' und $-P'$ besonders im Gleichgewichte sind, so ist auch das ganze System im Gleichgewichte.

§. 195.

Zwei einander gleiche und entgegengesetzte Kräfte, welche an zwei sich berührenden Körpern, die eine an dem einen, die andere an dem andern Körper, im Berührungspunkte angebracht sind, und deren Richtungen in die gemeinschaftliche Normale daselbst fallen, wollen wir Gegenkräfte nennen. Zwei solcher Kräfte halten daher einander stets das Gleichgewicht, und wir können mit ihnen die vorhin erhaltenen Bedingungen für das Gleichgewicht zweier sich in einem Punkte berührenden Körper auch folgendergestalt ausdrücken:

Es muss möglich seyn, im Berührungspunkte zwei Gegenkräfte von solcher Intensität anzubringen, dass an jedem Körper besonders zwischen den ursprünglich auf ihn wirkenden Kräften und der hinzugefügten Gegenkraft Gleichgewicht statt findet.

§. 196.

Auf ganz ähnliche Art lässt sich auch der allge-

meinere Fall behandeln, wenn zwei Körper a und a' sich in zwei oder mehrern Punkten A, B, C,... berühren, und wenn zwischen den auf sie wirkenden Kräften Gleichgewicht statt finden soll. — Man setze zuerst bei jeder Berührung einen Zwischenpunkt hinzu und lasse diese Punkte im Raume unbeweglich werden. War nun anfangs Gleichgewicht vorhanden, so kann dieses hierdurch nicht verloren gehen; vielmehr muss jetzt an jedem der beiden Körper einzeln Gleichgewicht herrschen. Mithin (§. 192. *d.*) müssen die auf a wirkenden Kräfte in andere P, Q, R,... und die auf a' wirkenden in andere P', Q', R',... verwandelt werden können, deren Richtungen in die Normalen α, β, γ,... der Berührungspunkte A, B, C,... fallen; P und P' in die Normale α; Q und Q' in die Normale β; u. s. w. Es müssen ferner, wenn wir die Unbeweglichkeit der Zwischenpunkte wieder aufheben, dagegen aber die gegenseitige Lage von a und a' unveränderlich annehmen, die ursprünglichen Kräfte, also auch diejenigen, auf welche sie reducirt worden, d. i. die nach α, β, γ,... gerichteten Kräfte $P+P'$, $Q+Q'$, $R+R'$, etc., als auf einen einzigen beweglichen Körper wirkend, im Gleichgewichte mit einander seyn.

Bei Verwandlung der auf a ursprünglich wirkenden Kräfte in andere P, Q, R,... nach den Richtungen α, β, γ,..., erhalten nun P, Q, R,... entweder nur auf eine Art bestimmbare Werthe, oder nicht. Ist Ersteres der Fall, so sind $P+P'=0$, $Q+Q'=0$, etc., d. h. je zwei nach derselben Normale α, oder β etc. wirkende Kräfte sind für sich im Gleichgewichte, indem sonst, weil P, Q,... P', Q',... zusammen im Gleichgewichte, also P, Q,... mit $-P'$, $-Q'$,... gleichwirkend seyn sollen, es gegen die Annahme auf zweierlei

Weise möglich wäre, die ursprünglichen Kräfte an a in andere nach einerlei Richtungen α, β, γ,... zu verwandeln, nämlich das einemal in die Kräfte P', Q',... und das anderemal in die davon verschiedenen Kräfte $-P'$, $-Q'$,.... Können dagegen eine oder etliche, z. B. zwei, von den Kräften P, Q,..., folglich auch eben so viele der mit ihnen nach denselben Richtungen gleichwirkenden $-P'$, $-Q'$,... nach Willkühr bestimmt werden, und nimmt man hierauf P, Q nach Belieben und setzt $-P' = P$, $-Q' = Q$, also $P + P' = 0$, $Q + Q' = 0$, so müssen aus demselben Grunde, wie vorhin, wo alle Kräfte bestimmte Werthe hatten, auch $-R' = R$, etc. folglich $R + R' = 0$, etc. seyn.

Als nothwendige Bedingung für das Gleichgewicht zwischen Kräften, die auf zwei sich in mehrern Punkten berührende Körper wirken, lässt sich daher jedenfalls folgende aufstellen: Es muss möglich seyn, an jedem Berührungspunkte zwei Gegenkräfte (vor. §.) ($-P$ und $-P'$ an A, $-Q$ und $-Q'$ an B, etc.) von solcher Intensität anzubringen, dass an jedem der beiden Körper besonders zwischen den ursprünglichen und den jetzt an ihn hinzugefügten Kräften Gleichgewicht besteht.

Aber auch umgekehrt: Ist nach Hinzufügung von Gegenkräften jeder der beiden Körper für sich im Gleichgewichte, so müssen sie, durch Berührungen mit einander verbunden, auch ohne Gegenkräfte im Gleichgewichte seyn. Denn das Gleichgewicht der mit einander verbundenen Körper, welches nach Hinzufügung der Gegenkräfte, wegen des dadurch bewirkten Gleichgewichts jedes einzelnen, statt finden muss, kann, wenn man die Gegenkräfte paarweise nach und nach wieder entfernt, nicht verloren gehen, da je zwei zusammen-

gehörige derselben für sich im Gleichgewichte sind (§. 195.).

Zusatz. Man sieht leicht, wie die in §. 193. gemachten Bemerkungen auch hier ihre Anwendung finden. Berühren sich nämlich zwei Körper in 6 oder weniger Punkten, so haben die Intensitäten der Gegenkräfte im Allgemeinen bestimmte Werthe; unbestimmt bleiben sie bei 7, 8,... Berührungen. Ferner sind die Körper bei 5, 4,... Berührungen stets an einander verschiebbar, im Allgemeinen aber nicht mehr, wenn sie sich in 6 oder mehreren Punkten berühren, so dass, mit Ausnahme gewisser einfacher Formen der Oberflächen, bei 6, 7,... Berührungen zum Gleichgewichte nur erfordert wird, dass sich die Kräfte an beiden Körpern eben so, als wären sie nur an einem einzigen angebracht, das Gleichgewicht halten. Endlich können auch bei 6, 5,... Berührungen die Gegenkräfte unbestimmt bleiben, und zwar dann, wenn die Normalen, nach denen sie gerichtet sind, eine solche Lage gegen einander haben, dass sich Kräfte angeben lassen, welche, nach diesen Normalen wirkend, sich das Gleichgewicht halten.

§. 197.

Wir haben bisher einen jeden der beiden sich in einem oder mehreren Punkten berührenden Körper als frei beweglich angenommen. Sey jetzt der eine von ihnen unbeweglich, und es erhellet ohne Weiteres, dass, nachdem die auf den beweglichen Körper wirkenden Kräfte Bewegung zu erzeugen im Stande sind, oder nicht, weder im erstern Falle die Bewegung gehemmt, noch die im letztern herrschende Ruhe gestört wird, wenn wir, wie im Vorigen, an den Berührungsstellen

Zwischenpunkte einschieben, und diese mit dem unbeweglichen Körper fest verbunden annehmen. Die Bedingungen des Gleichgewichts im vorliegenden Falle müssen daher ganz identisch seyn mit denen (§. 192. *d.*), welche statt fanden, wenn die Fläche des Körpers durch unbewegliche Punkte zu gehen genöthigt war.

Berührt demnach ein beweglicher Körper einen unbeweglichen in einem oder mehrern Punkten, so sind die auf erstern wirkenden Kräfte nur dann, und dann immer, im Gleichgewichte, wenn es möglich ist, sie in andere zu verwandeln, welche die Oberfläche des Körpers in den Berührungspunkten normal treffen. — Bei sechs und mehrern Berührungen ist diese Verwandlung im Allgemeinen immer ausführbar, und daher ein mit einem unbeweglichen in 6, 7,... Punkten durch Berührung verbundener Körper ebenfalls unbeweglich.

---

§. 198.

Ausser der bisher betrachteten Flächenberührung giebt es noch einige andere Arten, nach denen zwei Körper in einem oder mehrern Punkten einander begegnen können. Denn ist jeder der beiden Körper nicht von einer einzigen sich stetig fortziehenden Fläche begränzt, sondern ist er es von mehrern, und hat er somit Kanten und Ecken, so kann eine Begegnung der beiden Körper in einem Punkte auch darin bestehen, dass eine Ecke oder Kante des einen Körpers an eine Ecke, Kante oder Fläche des andern trifft.

Ohne zu den ersten Principien wieder zurückzuführen, können wir die Bedingungen des Gleichgewichts, die bei solchen Arten der Begegnung zweier

Körper nöthig und hinreichend sind, auch unmittelbar aus den so eben bei der Flächenberührung gefundenen Bedingungen herleiten. Sind nämlich zwei bewegliche Körper auf beliebige Weise mit ihren Ecken, Kanten und Flächen verbunden, und herrscht zwischen den auf die Körper wirkenden Kräften Gleichgewicht, so wird dieses nicht unterbrochen werden, wenn wir die zusammentreffenden Ecken und Kanten um ein unendlich Weniges abstumpfen, oder, was dasselbe ist, wenn wir auf den Ecken unendlich kleine Kugeln und längs der Kanten cylinderförmige Körper von unendlich kleinem Durchmesser befestigen. Findet aber kein Gleichgewicht statt, so wird dasselbe durch Hinzufügung der Kügelchen und sehr dünnen Cylinder auch nicht hervorgebracht werden.

Durch diese hinzugesetzten Kügelchen und Cylinder wird aber das Zusammentreffen der Körper mit Ecken und Kanten auf die Flächenberührung zurückgeführt, und es wird nun auch hier die allgemeine Bedingung des Gleichgewichts in §. 196. anwendbar, wonach es möglich seyn muss, in den Berührungspunkten Gegenkräfte von solcher Intensität anzubringen, dass an jedem der beiden Körper besonders Gleichgewicht entsteht. Nur haben wir in Betreff der Richtungen dieser Gegenkräfte wegen der zum Theil unendlich kleinen Dimensionen der bei der Berührung hinzugefügten Körper Einiges zu berücksichtigen.

1) Trifft eine Kante oder Ecke des einen Körpers a mit einer Fläche des andern a' in einem Punkte zusammen, und wird hierauf längs der Kante eine unendlich dünner Cylinder, an die Ecke aber eine unendlich kleine Kugel gesetzt, so ist bei der dadurch bewir-

ten Flächenberührung die gemeinschaftliche Normale, oder die Linie, in welcher die Gegenkräfte wirken müssen, als Normale der Fläche des Körpers *a'* im Berührungspunkte, vollkommen bestimmt. Dasselbe gilt auch, wenn

2) eine Kante des einen Körpers einer Kante des andern unter einem beliebigen Winkel begegnet. Denn zieht man durch den Punkt der Begegnung eine auf beiden Kanten zugleich normal stehende Gerade, so ist es diese Gerade, und keine andere, welche auch in dem Berührungspunkte der Cylinder, womit die Kanten versehen werden, auf den Cylindern normal steht. Trifft aber

3) eine Ecke des einen Körpers auf eine Kante des andern, so ist die Richtung der Gegenkräfte nicht vollkommen bestimmt. Denn heisst *A* der Punkt, in welchem die Ecke der Kante begegnet, so kann die Berührung der an die Ecke zu setzenden kleinen Kugel mit dem längs der Kante zu befestigenden dünnen Cylinder in irgend einem Punkte des kleinen Kreises geschehen, in welchem der Cylinder von einer in *A* normal auf seine Axe oder die Kante gesetzten Ebene geschnitten wird. Die Normale im Berührungspunkte oder die Richtung der Gegenkräfte ist daher irgend ein Halbmesser dieses Kreises, d. h. irgend eine der die Kante in *A* rechtwinklig schneidenden Geraden.

4) Ganz unabhängig von der gegenseitigen Lage der Körper ist die Richtung der Gegenkräfte, wenn Ecke mit Ecke zusammentrifft. Denn hat man die beiden Ecken mit Kügelchen versehen und lässt diese, statt der Ecken, einander berühren, so kann die Normale derselben im Berührungspunkte, mithin auch die

durch den Begegnungspunkt der Ecken gelegte Linie für die Gegenkräfte, jede beliebige Richtung haben.

§. 199.

Nach diesen Erörterungen lässt sich nun das Gesetz des Gleichgewichts bei zwei sich in einem oder mehreren Punkten auf beliebige Weise begegnenden Körpern mit denselben Worten, wie in §. 196., wo die Körper sich nur mit ihren Flächen berührten, ausdrücken, sobald nur der Begriff der Gegenkräfte etwas allgemeiner gefasst und unter ihnen überhaupt zwei einander gleiche Kräfte verstanden werden, die an der Stelle, wo zwei Körper sich in einem Punkte begegnen, die eine auf den einen, die andere auf den andern Körper, nach entgegengesetzten Richtungen wirken, mit dem Zusatze, dass, wenn der Punkt, in welchem der eine Körper von dem andern getroffen wird, nicht eine Ecke oder sonst ein bestimmter Punkt des Körpers ist, sondern in einer Kante oder überhaupt in einer bestimmten Linie, oder in einer Fläche desselben liegt und darin bei gegenseitiger Bewegung der Körper die Stelle wechseln kann, dass dann die Linie, in welche die Richtungen der Gegenkräfte fallen, auf dieser Kante oder Fläche normal ist. Auf solche Weise den Begriff der Gegenkräfte festgestellt, ist demnach Folgendes das allgemeine Resultat der bisherigen Untersuchungen:

Zwischen Kräften, welche auf zwei in einem oder in mehreren Punkten mit einander verbundene frei bewegliche Körper wirken, herrscht nur dann, und dann immer, Gleichgewicht, wenn sich in den Verbindungspunkten Gegenkräfte von solcher Intensität anbringen lassen, dass an jedem der beiden

Körper besonders zwischen den ursprünglichen und den hinzugefügten Gleichgewicht statt findet; oder, was auf dasselbe hinauskommt: wenn die Kräfte an dem einen der beiden Körper sich auf andere reduciren lassen, deren Richtungen die Begegnungspunkte treffen und daselbst bei Begegnungen von Flächen oder Kanten auf diesen Flächen oder Kanten normal sind, und wenn die Kräfte an beiden Körpern eben so, als wenn sie auf einen einzigen wirkten, einander das Gleichgewicht halten.

Ist der eine von beiden Körpern unbeweglich, so ist es für das Gleichgewicht hinreichend und nothwendig, dass die erste der zwei letztern Bedingungen in Bezug auf den beweglichen Körper erfüllt wird.

§. 200.

Eine etwas nähere Betrachtung verdient noch die Natur der Gegenkräfte. Da beim Gleichgewichte zwischen Kräften, welche auf zwei mit einander verbundene Körper wirken, an jedem derselben die ursprünglichen Kräfte mit den an ihm anzubringenden Gegenkräften im Gleichgewichte seyn müssen, ohne diese aber im Gleichgewichte mit den ursprünglichen Kräften am andern Körper sind, so wird von den an dem einen Körper anzubringenden Gegenkräften auf ihn dieselbe Wirkung, als von den zunächst auf den andern Körper wirkenden Kräften, hervorgebracht. Man kann daher die Gegenkräfte auch als den Ausdruck des von den Kräften des einen Körpers auf den andern Körper bewirkten Einflusses betrachten.

Bei wirklichen und daher nicht absolut festen, sondern mehr oder weniger elastischen Körpern giebt sich dieser Einfluss durch eine, wenn auch oft nur äusserst

geringe Veränderung in der gegenseitigen Lage ihrer Theilchen zu erkennen, indem sich die Theilchen bald etwas näher gebracht, bald etwas weiter von einander entfernt werden. Diese Veränderung ist an den Stellen selbst, wo die Körper mit einander verbunden sind, am grössten, eben so, als wenn auf diese Stellen Kräfte wirkten, die das einemal eine Richtung von aussen nach innen, das anderemal von innen nach aussen haben. Man nennt eine solche Kraft im erstern Falle Druck oder Pressung, im letztern Spannung, oder begreift sie auch unter dem gemeinschaftlichen Namen Pressung, indem man Spannung als negative Pressung ansieht.

Indessen muss man sich wohl hüten, diese Pressungen mit den vorigen Gegenkräften als völlig identisch zu betrachten. Die Gegenkräfte ergaben sich nicht als wirklich vorhandene Kräfte, sondern wurden nur als Hülfskräfte eingeführt, um damit die Demonstrationen zu erleichtern und die Bedingungen des Gleichgewichts einfacher darzustellen. Die Pressungen dagegen sind Kräfte, die sich beim Gleichgewichte eben so, wie jede andere Kraft, durch Veränderung der gegenseitigen Lage der Theilchen der Körper, als wirklich vorhanden offenbaren, und die daher sowohl hinsichtlich ihrer Intensitäten, als ihrer Richtungen, jederzeit vollkommen bestimmt sind, während die Intensitäten der Gegenkräfte nur bei sechs oder weniger Flächenberührungen zweier Körper, um bloss dieser Art der Begegnung zu gedenken, bestimmte Werthe haben können (§. 196. Zus.).

Soviel ist gewiss, dass im Falle des Gleichgewichts die Pressungen, welche ein Körper erleidet, eben so wohl, als die an ihm anzubringenden Gegenkräfte, mit den ursprünglich auf ihn wirkenden Kräf-

ten im Gleichgewichte seyn müssen. Sind folglich die Gegenkräfte nur auf eine Weise bestimmbar, wie dieses im Allgemeinen der Fall ist, wenn sich zwei Körper in 6 oder weniger Punkten berühren, so muss die auf jeden einzelnen Berührungspunkt wirkende Pressung der eben daselbst anzubringenden Gegenkraft gleich seyn, indem sich sonst gegen die Hypothese in den Berührungspunkten noch andere Kräfte anbringen liessen, welche mit den ursprünglichen im Gleichgewichte wären.

Berühren sich aber zwei Körper in mehr als 6 Punkten, so werden den 6, zwischen den 7 oder mehrern Gegenkräften bestehenden Gleichungen die Pressungen, statt der Gegenkräfte substituirt, zwar ebenfalls Genüge leisten. Allein es muss bei elastischen Körpern eine hinreichende Anzahl noch anderer Gleichungen geben, aus denen in Verbindung mit den vorigen sechs die Pressungen insgesammt bestimmt werden können. Die Entwicklung dieser andern Gleichungen gehört aber nicht für unsern gegenwärtigen Zweck, wo wir uns bloss mit vollkommen festen Körpern beschäftigen.

Allerdings kann man die Frage aufwerfen, ob nicht auch bei zwei sich in mehr als 6 Punkten berührenden absolut festen Körpern an den Berührungspunkten Pressungen von bestimmter Grösse statt finden, und welches ihre Werthe seyen. Indessen lässt sich auf diese Frage nicht mit Hülfe der Erfahrung und auch nicht mit Anwendung von Rechnung antworten, man müsste denn das Gesetz der Pressungen, welches bei elastischen Körpern obwaltet, auch bei vollkommener Festigkeit der Körper, als dem Grenzzustande der Elasticität, noch gelten lassen, oder irgend ein

neues Gesetz zu Hülfe nehmen, dessen Gründe aber nur metaphysisch seyn könnten.

Wie dem aber auch seyn mag, so kann uns diese Unsicherheit in Bestimmung der Pressungen wenig kümmern, da wir es im Vorliegenden nicht mit eigentlichen Pressungen, sondern nur mit Hülfskräften zu thun haben, die aber inskünftige, um dem gewöhnlichen Sprachgebrauche nicht entgegen zu seyn, statt Gegenkräfte, ebenfalls Pressungen genannt werden sollen.

Gleichgewicht an einem nicht völlig frei beweglichen Körper.

§. 201.

Die in dem Vorhergehenden entwickelte Theorie des Gleichgewichts zweier mit einander verbundenen Körper wollen wir schlüsslich durch einige Beispiele erläutern. Dabei werden wir den einen der beiden Körper als unbeweglich annehmen, indem, wenn auch er beweglich ist, zum Gleichgewichte des Ganzen nur noch erfordert wird, dass die Kräfte an beiden Körpern, als auf einen einzigen wirkend, sich das Gleichgewicht halten. (§. 199.)

Sey der bewegliche Körper mit dem unbeweglichen zuerst nur in einem Punkte verbunden. Welches nun auch diese Verbindung seyn mag, so ist die zum Gleichgewichte stets nöthige Bedingung, dass die an dem beweglichen Körper wirkenden Kräfte eine einzige den Punkt treffende Resultante haben. Ist daher in Bezug auf drei coordinirte Axen das System der auf den Körper wirkenden Kräfte, wie im Früheren, durch A, B, C, L, M, N gegeben, ist (a, b, c) der

Punkt der Begegnung und (U, V, W) die ihn treffende Resultante der Kräfte oder die Pressung daselbst, so hat man nach §. 69. die Gleichungen:

$$A = U,\ L = bW - cV,$$
$$B = V,\ M = cU - aW,$$
$$C = W, N = aV - bU.$$

Hieraus die auf die Pressung sich beziehenden Grössen U, V, W eliminirt, ergeben sich die Bedingungsgleichungen:

$$L = bC - cB,\ M = cA - aC,\ N = aB - bA,$$

oder einfacher: $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$,

sobald der Punkt der Begegnung zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen wird. Die auf ihn ausgeübte Pressung aber ist (A, B, C). Wenn nun

1) eine Ecke, oder überhaupt ein bestimmter Punkt des beweglichen Körpers, mit einem bestimmten Punkte des unbeweglichen verbunden ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt: wenn ein bestimmter Punkt eines Körpers unbeweglich, der Körper selbst aber um ihn nach allen Richtungen drehbar ist, so kann die Richtung der Pressung jede beliebige seyn (§. 198. 4.). Die drei erhaltenen Bedingungsgleichungen L, M, $N = 0$ sind daher in diesem Falle die einzigen, d. h.

Zum Gleichgewichte eines Körpers, der einen unbeweglichen Punkt hat, ist es nöthig und hinreichend, dass in Bezug auf jede von drei sich in dem Punkte schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen das Moment der Kräfte null ist.

2) *Ist die Beweglichkeit eines Körpers dadurch beschränkt, dass ein bestimmter Punkt desselben in einer unbeweglichen Linie zu verharren, oder dass eine bestimmte Linie desselben einem unbeweglichen*

Punkte zu begegnen genöthigt ist, so wird zum Gleichgewichte erfordert, dass die Kräfte eine die Linie in dem Punkte rechtwinklig treffende Resultante haben (§. 198. 3.). Lässt man daher den Punkt, wie vorhin, mit dem Anfangspunkte der Coordinaten, und die Linie, oder ihre Tangente in diesem Punkte, wenn sie krumm ist, mit der Axe der x zusammenfallen, so ist bei Annahme eines rechtwinkligen Coordinatensystems die Resultante in der Ebene der yz enthalten, und daher $U=0$. Hierdurch kommt, wegen $A=U$, zu den vorigen drei Bedingungsgleichungen L, M, $N=0$ noch die vierte $A=0$, d. h. *es muss noch die Summe der nach der Linie, oder ihrer Tangente im Begegnungspunkte, geschätzten Kräfte null seyn.*

3) *Ist ein bestimmter Punkt eines Körpers in einer unbeweglichen Fläche beweglich, oder eine Fläche des Körpers einem unbeweglichen Punkte zu begegnen genöthigt*, so muss die Resultante der Kräfte die Fläche im Begegnungspunkte normal treffen. Es muss folglich, wenn der Punkt wiederum zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems genommen, und wenn die Fläche von der Ebene der x, y daselbst berührt wird, die Resultante in die Axe des z fallen, woraus U und $V=0$ folgen. Ausser den obigen Bedingungsgleichungen L, M, $N=0$, müssen daher jetzt noch die zwei: $A=0$ und $B=0$ erfüllt werden, d. h. *es muss noch die Summe der Kräfte nach irgend zwei in der Berührungsebene gezogenen und sich schneidenden Geraden geschätzt, beidemale null seyn.*

§. 202.

Wird ein Körper in zweien seiner Punkte F und F' an der Bewegung gehindert, so müssen beim Gleich-

gewichte sämmtliche Kräfte sich auf zwei diese Punkte treffende Kräfte zurückführen lassen. Nimmt man daher F' zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems, $F'F$ zur Axe der x, setzt $F'F = a$ und bezeichnet die auf F und F' gerichteten Resultanten oder die Pressungen, welche diese Punkte erleiden, durch (U, V, W), (U', V', W'), so muss seyn:

$$(A)\begin{cases} A = U + U', & L = 0, \\ B = V + V', & M = -aW, \\ C = W + W', & N = aV. \end{cases}$$

Wenn nun 1) F und F' völlig unbeweglich angenommen werden, so lässt sich über die Richtungen der Pressungen im Voraus nichts bestimmen, und es giebt daher zwischen $U, V, \ldots W'$ keine andern Relationen, als die, welche aus jenen Gleichungen selbst hervorgehen. Hieraus können aber bloss V, V', W, W', d. i. die in F und F' auf FF' normalen Theile der Pressungen bestimmt werden; dagegen findet sich von den längs der Linie FF' selbst gerichteten Pressungen U und U' nur die Summe, $= A$, und es bleibt $L = 0$, als die einzige von den Pressungen freie Gleichung, als Bedingung des Gleichgewichts, zurück, woraus wir schliessen:

Zum Gleichgewichte eines an einer unbeweglichen Axe (FF') befestigten Körpers ist es nöthig und hinreichend, dass das Moment der Kräfte in Bezug auf diese Axe null ist.

2) Ist nur der Punkt F' unbeweglich, F aber in einer unbeweglichen Linie beweglich, und macht die in F an diese Linie gezogene Tangente mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ, so kommt, weil die

Pressung (U, V, W) auf der Linie normal seyn muss, noch die Gleichung

$$U \cos \alpha + V \cos \beta + W \cos \gamma = 0$$

hinzu. Hiermit erhalten wir zu der vorigen Bedingung des Gleichgewichts $L = 0$, zwar keine neue, aber es hört nun die Unbestimmtheit von U und U' auf.

Doch ist hiervon der Fall auszunehmen, wenn $\cos \alpha = 0$ und daher die Linie auf FF' normal ist. Lassen wir alsdann grösserer Einfachheit willen die Tangente der Linie mit der Axe der y parallel seyn, setzen also noch $\cos \gamma = 0$, so wird $V = 0$, und es entsteht noch die Bedingungsgleichung: $N = 0$; die Unbestimmtheit zwischen U und U' aber dauert fort, und wir folgern hieraus:

Ist ein Punkt F' eines Körpers unbeweglich und ein anderer Punkt F desselben in einer unbeweglichen Linie beweglich, deren Tangente FG (Fig. 50.) auf $F'F$ normal ist, so muss beim Gleichgewichte das Moment der auf den Körper wirkenden Kräfte sowohl rücksichtlich der Linie $F'F$, als rücksichtlich der auf der Ebene $F'FG$ in F' zu errichtenden Normalen $F'H$ null seyn.

Durch die Nullität des Momentes in Bezug auf FF' wird, wie in 1), die Drehung des Körpers um diese Axe aufgehoben. Es erhellet aber nicht sogleich, warum auch in Bezug auf $F'H$ das Moment null seyn soll, da doch bei der Unbeweglichkeit der Linie, in welcher F beweglich ist, der Körper sich nicht um $F'H$ drehen lässt, wenigstens nicht im Allgemeinen, sondern nur in dem speciellen Falle, wenn die Linie der Bogen eines aus F', als Mittelpunkt, mit dem Halbmesser $F'F$ in der Ebene $F'FG$ beschriebenen Kreises ist. Indessen kann man doch, wenn die Linie

irgend eine andere Curve ist, die der Annahme gemäss von FG berührt wird, das bei dem Punkte F befindliche Element der Curve als das Element eines aus F' beschriebenen Kreises betrachten, und der Körper kann folglich jederzeit, wenn auch im Allgemeinen nur um ein unendlich Geringes, um $F'H$ als Axe gedreht werden. — Die Rechnung giebt uns daher ein genaueres Resultat, als wir erwartet hatten, indem sie den Körper selbst vor einer unendlich kleinen Drehung zu sichern sucht. Die Betrachtung von dergleichen unendlich kleinen Beweglichkeiten ist besonders in rein geometrischer Hinsicht von Interesse, und wir werden deshalb diesem Gegenstande späterhin eine specielle Untersuchung widmen.]

3) Sind beide Punkte F und F' in gegebenen Linien beweglich, so hat man, wenn die Richtungen derselben bei F und F' durch die Winkel α, β, γ und α', β', γ' gegeben sind, nächst den 6 Gleichungen (A), noch folgende zwei:

$$U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma = 0,$$
$$U'\cos\alpha' + V'\cos\beta' + W'\cos\gamma' = 0;$$

und es lassen sich jetzt nicht nur sämmtliche Pressungen vollkommen bestimmen, sondern man erhält auch noch zu $L=0$ eine neue Bedingungsgleichung. Sind z. B. F und F' in der Axe der x, also in FF' selbst, beweglich, so werden $U=0$, $U'=0$, und daher $A=0$ die neue Bedingung, d. h. die Summe der nach der Richtung von FF' geschätzten Kräfte muss null seyn.

Können die in der Axe der x befindlichen Punkte F und F' sich in Parallellinien mit der Axe der y bewegen, so sind die Pressungen parallel mit der Ebene der x, z, mithin V und $V'=0$, und es werden damit

$B=0$, $N=0$. In diesem speciellen Falle kommen also zu $L=0$, statt einer, noch zwei Bedingungsgleichungen hinzu. Die Erfüllung der einen, $B=0$, hebt die mit der Axe der y parallele Bewegung auf; durch die andere, $N=0$, wird ähnlicherweise, wie in 2), eine hierbei noch mögliche unendlich kleine Drehung um die Axe der x gehindert.

4) Berührt der Körper mit beiden Punkten eine Ebene, z. B. die Ebene der x, y, so haben die Pressungen eine auf derselben normale Richtung; es werden folglich U, V, U', $V'=0$, und man erhält damit $A=0$, $B=0$, $L=0$, $N=0$, als Bedingungen des Gleichgewichts.

§. 203.

Betrachten wir noch einen in drei Punkten F, F', F'' an seiner Bewegung gehinderten Körper. Seyen diese Punkte: (a, b, c), $(a' b', c')$, $(0, 0, 0)$, so dass F'' der Anfangspunkt der Coordinaten ist. Die Pressungen in F, F', F'' seyen (U, V, W), (U', V', W'), (U'', V'', W'') und man hat alsdann nachstehende 6 Gleichungen:

$$(B)\ \begin{cases} A = U + U' + U'', \\ B = V + V' + V'', \\ C = W + W' + W'', \\ L = bW - cV + b'W' - c'V', \\ M = cU - aW + c'U' - a'W', \\ N = aV - bU + a'V' - b'U'. \end{cases}$$

Da sich aus ihnen allein die Pressungen nicht eliminiren lassen, so giebt es, wenn die drei Punkte unbeweglich sind, im Allgemeinen keine Bedingung des Gleichgewichts, und der Körper ist ebenfalls unbeweglich; was auch schon daraus erhellet, dass die bei zwei unbeweglichen Punkten noch übrig bleibende Axendre-

bung durch die Annahme eines dritten unbeweglichen Punktes ausserhalb der Axe vollkommen aufgehoben wird. — Die Pressungen selbst bleiben zum Theil unbestimmt.

Lässt man die Punkte in gegebenen Linien beweglich seyn, so kommen 3 neue Gleichungen zwischen den 9 Grössen $U, \ldots W''$ hinzu, und man hat somit 9 Gleichungen, aus denen man diese 9 Grössen, also die drei Pressungen ihrer Intensität und Richtung nach, bestimmen kann. Eine von den Pressungen freie Gleichung lässt sich aber damit noch nicht finden, und der Körper ist folglich auch jetzt noch unbeweglich.

Eine Ausnahme hiervon findet statt, wenn die drei Linien einander parallel sind, als wodurch der Körper selbst parallel mit ihnen beweglich wird. Lässt man sie z. B. parallel mit der Axe der z seyn, so werden $W, W', W'' = 0$, welches die Bedingung: $C = 0$ giebt, d. h. die Summe der nach den Richtungen der Parallellinien geschätzten Kräfte muss null seyn.

Wenn endlich der Körper mit den drei Punkten eine Ebene, es sey die der x, y, berührt, und folglich die Punkte in dieser Ebene beweglich sind, so hat man $c = 0$, $c' = 0$, und noch ausserdem, weil dann die Pressungen die Ebene normal treffen: U, U', U'', $V, V', V'' = 0$. Hiermit finden sich aus den Gleichungen (B) die Bedingungen: $A = 0$, $B = 0$, $N = 0$. Die drei übrigen Gleichungen werden:

$$C = W + W' + W'',$$
$$L = bW + b'W', M = -aW - a'W',$$

und hieraus lassen sich die drei auf der Ebene normalen Pressungen W, W', W'', bestimmen.

Liegen die drei Punkte, in denen der Körper die

Ebene der x, y berührt, in einer Geraden, z. B. in der Axe der x, so hat man noch b und $b' = 0$ zu setzen. Hierdurch verwandelt sich die zweite Gleichung für die Pressungen in eine vierte Bedingung fürs Gleichgewicht: $L=0$, d. h. es muss noch das Moment der Kräfte in Bezug auf die Gerade, in welcher die Punkte liegen, null seyn. Die drei Pressungen aber lassen sich aus den für sie noch übrig bleibenden zwei Gleichungen nicht mehr vollkommen bestimmen.

§. 204.

Zusatz. Wenn der Körper bloss parallel mit der Axe der z beweglich ist, so dass jeder Punkt desselben eine Parallele mit dieser Axe beschreibt, so ist nach vor. §. $C=0$ die Bedingung des Gleichgewichts. Eben so ist $A=0$ oder $B=0$ die Bedingung, wenn der Körper bloss parallel mit der Axe der x oder der y fortgerückt werden kann.

Lässt sich der Körper bloss um die Axe der x drehen, so dass jeder seiner Punkte keine andere Linie, als einen Kreis um diese Axe beschreiben kann, so ist $L=0$ die Bedingung des Gleichgewichts (§. 202.); und auf gleiche Art ist $M=0$ oder $N=0$ die Bedingung, wenn der Körper nur um die Axe der y oder der z gedreht werden kann.

Den sechs Gleichungen A, B, C, L, M, $N=0$ entsprechen daher resp. die Fortbewegungen des Körpers längs der Axen der x, y, z und die Drehungen um dieselben Axen dergestalt, dass wenn der Körper nur einer dieser sechs Bewegungen folgen kann, die derselben entsprechende Gleichung es ist, wodurch das Gleichgewicht der auf den Körper wirkenden Kräfte bedingt wird.

Diese drei fortrückenden und drei drehenden Bewegungen sind von einander vollkommen unabhängig, d. h. man kann einen Körper mit einem oder mehrern andern ganz oder zum Theil unbeweglichen Körpern immer so verbinden, dass er nur an einer dieser sechs Bewegungen, oder an etlichen derselben, welche man will, Theil nehmen, keiner der übrigen aber folgen kann.

So wie nun, wenn der Körper nur einer einzigen der 6 Bewegungen fähig ist, die dieser Bewegung entsprechende Gleichung die Bedingung des Gleichgewichts ist, so sind auch, wenn der Körper zwei oder mehrere der 6 Bewegungen zugleich annehmen kann, an den übrigen aber gehindert ist, die den möglichen Bewegungen entsprechenden Gleichungen die nöthigen und hinreichenden Bedingungen des Gleichgewichts.

Berührt z. B. ein Körper in drei Punkten, welche nicht in einer Geraden liegen, eine unbewegliche Ebene und wird diese zur Ebene der x, y genommen, so sind damit von den 6 Bewegungen aufgehoben: die mit der Axe der z parallele Fortrückung und die Drehungen um die Axen der x und der y; dagegen kann der Körper noch parallel mit den Axen der x und der y bewegt und um die Axe der z gedreht werden. Von den sechs Gleichungen, welche beim Gleichgewichte eines vollkommen frei beweglichen Körpers erfüllt seyn müssen, sind daher die drei: $C = 0$, $L = 0$, $M = 0$, durch das Hinderniss, welches die Ebene der Bewegung des Körpers entgegenstellt, schon als erfüllt anzusehen, und es bleiben noch die drei: $A = 0$, $B = 0$, $N = 0$, als zu erfüllende Bedingungen, übrig. Vergl. vor. §.

Ist nur ein Punkt des Körpers unbeweglich, so kann, diesen Punkt zum Anfangspunkte der Coordina-

ten genommen, der Körper um jede der drei Axen gedreht, aber keiner entlang verschoben werden. Die Bedingungen sind daher in diesem Falle: $L=0$, $M=0$, $N=0$ (§. 201.).

Kann umgekehrt der Körper um keine Axe gedreht, aber nach jeder beliebigen Richtung parallel mit seiner anfänglichen Lage fortbewegt werden, so ergeben sich auf gleiche Art: $A=0$, $B=0$, $C=0$, als Bedingungen des Gleichgewichts.

Zweites Kapitel.

Vom Gleichgewichte bei einer beliebigen Anzahl mit einander verbundener Körper.

§. 205.

Durch die im vorigen Kapitel entwickelte Theorie des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche auf zwei mit einander verbundene Körper wirken, sind wir genugsam vorbereitet, um sogleich zur Untersuchung der Bedingungen des Gleichgewichts in dem ganz allgemeinen Falle übergehen zu können, wenn eine beliebige Anzahl mit einander verbundener Körper der Wirkung von Kräften unterworfen ist. Folgende Betrachtungen werden uns zu diesen Bedingungen hinführen.

1) Denken wir uns ein System von mehr als zwei Körpern a, b, c, d,..., von denen jeder, wie wir fürs erste annehmen wollen, frei beweglich ist und mit einem oder mehreren oder auch allen übrigen, sey es in einem oder in mehreren Punkten, zusammentrifft. Meh-

rerer Gleichförmigkeit wegen wollen wir die Körper nur durch gegenseitiges Berühren ihrer Flächen mit einander verbunden annehmen, als worauf sich nach §. 198. alle übrigen Arten des Zusammentreffens zurückführen lassen. Endlich sollen an zwei, oder mehrern, oder allen Körpern Kräfte angebracht und soll das Ganze im Gleichgewichte seyn.

2) Man bringe an den Stellen, in denen einer der Körper, a, die andern b, c,... berührt, zwischen ihm und den andern Körpern Zwischenpunkte A, A', A'',... an (§. 194.), lasse diese unbeweglich werden und entferne hierauf den Körper a. Das Gleichgewicht wird dadurch nicht verloren gehen, da durch die unbeweglich angenommenen Zwischenpunkte aller Einfluss von a auf b, c,..., und umgekehrt, aufgehoben ist.

3) Sey b einer der von a berührten Körper und A einer der zwischen a und b gesetzten Zwischenpunkte. Nach Wegnahme von a lasse man A in der Fläche von b beweglich werden. Geht hierdurch das Gleichgewicht verloren, so muss es möglich seyn, an A eine das Gleichgewicht wieder herstellende Kraft P anbringen (§. 190. III.), und diese Kraft muss auf der Fläche von b normal seyn, indem sonst, wenn b unbeweglich gesetzt würde, A auf b nicht in Ruhe bleiben könnte (§. 192. a.). Auch kann man die Kraft P an der Fläche von b selbst, da, wo sich A befindet, anbringen und sodann den Zwischenpunkt A, als überflüssig, wegnehmen.

4) Man entferne demnach den unbeweglichen Zwischenpunkt A und setze, wo nöthig, statt desselben eine auf b normale das Gleichgewicht herstellende Kraft P. Auf gleiche Weise entferne man nach und nach alle übrigen Zwischenpunkte A', A'',... und bringe

statt ihrer an den Flächen von b, c,..., wo sie sich befanden, d. i. an den Berührungspunkten dieser Flächen mit a, die zur Erhaltung des Gleichgewichts nöthigen auf den Flächen normalen Kräfte P', P'',... an.

5) Somit sind jetzt an dem Systeme von b, c,... die ursprünglich auf diese Körper wirkenden Kräfte mit den hinzugefügten P, P',... im Gleichgewichte. Da nun bei dem Systeme sämmtlicher Körper a, b, c,... die ursprünglichen Kräfte an b, c,... mit den Kräften an a im Gleichgewichte sind, so sind die Kräfte an a mit P, P',... gleichwirkend, und es muss a für sich ins Gleichgewicht kommen, wenn an ihm noch die Kräfte P, P',..., nach entgegengesetzten Richtungen genommen, angebracht werden. Dies liefert uns folgendes Resultat:

Sind Kräfte, welche auf ein System sich berührender frei beweglicher Körper a, b, c,... wirken, im Gleichgewichte, so ist es möglich, an den Stellen, in denen irgend einer der Körper, a, die übrigen b, c,... berührt, Gegenkräfte (§. 195.) von solcher Intensität anzubringen, dass sowohl der Körper a für sich, als das System der einander berührenden Körper b, c,... für sich, in den Zustand des Gleichgewichts kommt.

6) Man bringe nun an dem Systeme von a, b, c, d,..., wie es ursprünglich gegeben war, diese Gegenkräfte wirklich an. Wegen des Gleichgewichts, welches hierdurch das System von b, c, d,... für sich erlangt, kann man gleicher Weise an den Berührungsstellen eines dieser Körper b mit den übrigen c, d,... solche Gegenkräfte hinzufügen, dass nächst a noch b für sich und das System von c, d,... für sich im Gleichgewichte sind. Durch Wiederholung desselben Verfahrens an dem Systeme von c, d,... kann man

es ferner bewirken, dass ausser *a* und *b* noch *c* für sich und das System der noch übrigen Körper *d*,... für sich ins Gleichgewicht kommen, und kann diese Operation so lange fortsetzen, bis jeder Körper des anfänglichen Systems einzeln im Gleichgewichte ist. Alsdann sind nach und nach an allen Stellen, in denen zwei Körper des Systems sich berühren, und wo es nach 3) für nöthig zu erachten war, Gegenkräfte hinzugesetzt werden, und man hat somit folgende, der in §. 196. für nur zwei Körper erhaltenen ganz analoge, Bedingung für das Gleichgewicht des Systems gefunden:

Sollen Kräfte, welche auf ein System einander berührender und an sich frei beweglicher Körper wirken, einander das Gleichgewicht halten, so muss es möglich seyn, an den Berührungsstellen der Körper Gegenkräfte von solcher Intensität anzubringen, dass an jedem Körper besonders die ursprünglichen Kräfte mit den an ihm angebrachten im Gleichgewichte sind.

Dass diese nothwendige Bedingung des Gleichgewichts auch stets hinreichend ist, wird eben so, wie im §. 196. bewiesen. Lassen sich nämlich an dem Systeme der einander berührenden Körper solche Gegenkräfte hinzufügen, dass jeder einzelne Körper ins Gleichgewicht kommt, und somit auch das ganze System im Gleichgewichte ist, so muss das System auch ohne Anbringung von Gegenkräften im Gleichgewichte seyn, da je zwei zusammengehörige Gegenkräfte für sich im Gleichgewichte sind, und daher jedes dieser Paare ohne Störung des Gleichgewichts des Systems wieder entfernt werden kann.

§. 206.

Nachträgliche Bemerkungen. *a*. Nachdem bei

den Berührungsstellen von a mit b, c... unbew liche Zwischenpunkte A, A',... eingeschoben, der K per a abgesondert und hierauf A in der Fläche vo beweglich angenommen worden war, wurde im Fa dass durch die Beweglichkeit von A das Gleichgewi verloren gieng, an A eine auf b normale, das Glei gewicht wieder herstellende Kraft P angebracht.

Geht das Gleichgewicht dadurch, dass man A weglich macht, nicht verloren, so können zwei Fä eintreten. Denn entweder sind die noch übrigen un weglichen Punkte A', A'',... in solcher Anzahl Lage vorhanden, dass keine auch noch so grosse A angebrachte und auf b normal gerichtete Kraft wegung hervorbringen kann; oder es ist jede auch n so geringe Intensität dieser Kraft vermögend, das stehende Gleichgewicht aufzuheben. Letzterer Fall eignet sich z. B. dann, wenn a nur einen der übri Körper berührt, und wenn die auf a ursprünglich kenden Kräfte für sich, also auch die ursprüngli Kräfte an b, c,... unter einander, im Gleichgewic sind.

Im letztern Falle ist daher die an A anzubringe Kraft nothwendiger Weise $= 0$; dagegen kann m im erstern an A eine Kraft P von beliebiger Inte tät setzen, und eben so ist es möglich, dass noch einigen der übrigen Zwischenpunkte A', A'',..., na dem sie in den Flächen, welche sie berühren, bew lich gemacht worden, normale Kräfte P', P'',... v willkührlicher Intensität angebracht werden können.

Statt also nach dem vor. §. an denjenigen un den Punkten A, A',..., durch deren Beweglichmachu das Gleichgewicht noch nicht verloren geht, keine Krä anzubringen, kann man, grösserer Allgemeinheit v

len, jedoch mit Ausnahme des letztern der oben gedachten zwei Fälle, normale Kräfte P, P',... von willkührlicher Intensität auf sie wirken lassen und hiernach die zur Erhaltung des Gleichgewichts nöthigen Intensitäten der Kräfte an den noch übrigen Punkten bestimmen. Bringt man hierauf sämmtliche Kräfte P, P',... an den Flächen von b, c,... selbst, und an dem wieder hinzugefügten Körper a die direct entgegengesetzten $-P$, $-P'$,... an, so wird nunmehr eben so, wie vorhin, sowohl a, als das System von b, c,..., jedes für sich, im Gleichgewichte erhalten. Auf gleiche Weise kann man auch hinsichtlich der an b und c, d,... anzubringenden Gegenkräfte zu Werke gehen u. s. w. Die daraus zuletzt sich ergebende Bedingung für das Gleichgewicht des ganzen Systems aber ist mit der im vor. §. ausgesprochenen einerlei.

6. In Nr. 4. des vor. §. wurde gezeigt, wie nach Wegnahme irgend eines der Körper, a, von den übrigen b, c,... diese übrigen ein System bilden, welches durch Anbringung der Kräfte P, P',... für sich ins Gleichgewicht kommt. Es kann aber auch geschehen, dass die nach Wegnahme von a übrig bleibenden Körper, statt eines, zwei oder mehrere Systeme ausmachen, welche vorher durch a zu einem einzigen vereinigt waren. Die Bündigkeit der nachfolgenden Schlüsse wird hierdurch keineswegs beeinträchtigt. Denn eben so, wie vorhin, wird auch in diesen Fällen das Gleichgewicht bei jedem der einzelnen Systeme, welche nach Wegnahme von a entstehen, durch die unbeweglichen Punkte A, A',... und nach Absonderung dieser Punkte durch die normalen Kräfte P, P',... erhalten; an a selbst aber werden gleichfalls, wie vorhin, die ursprünglichen Kräfte mit $-P$, $-P'$,... im Gleichgewichte seyn.

§. 207.

In dem Bisherigen wurde jeder Körper des Syste als frei beweglich angenommen. Setzen wir jetzt, in §. 205. betrachtete Körper a sey unbeweglich, u somit jeder der übrigen nur innerhalb gewisser Gr zen beweglich, so erhellet eben so, wie dort, da wenn das System im Gleichgewichte ist, sich in d Berührungspunkten von a mit den übrigen Körpern $c,\ldots$ normale Kräfte P, P',... an b, c,... anbring lassen, so dass diese Körper auch nach Wegnahı von a in Ruhe bleiben. Ein Gleiches gilt, wenn me rere Körper des Systems unbeweglich angenomm werden; auch kann man mehrere unbewegliche Körp immer als Theile eines einzigen unbeweglichen betra ten. Da nun die Kräfte $-P$, $-P'$,..., an dem u beweglichen a angebracht, von keiner Wirkung sin so findet die in §. 205. erhaltene nothwendige Bed gung des Gleichgewichts auch bei der Unbeweglichk eines oder mehrerer Körper des Systems völlige A wendung; und eben so, wie zu Ende jenes §., wi auch für gegenwärtigen Fall bewiesen, dass diese no wendige Bedingung zugleich hinreichend ist.

Mag also jeder Körper des Systems an sich fr beweglich, oder mögen einer oder etliche derselb unbeweglich seyn, mögen sie ferner, wie bisher a genommen wurde, durch gegenseitige Berührun ihrer Flächen zusammenhängen, oder auf eine de andern in §. 198. bemerkten Arten mit einander ve bunden seyn (§. 205. 1.), so besteht immer die not wendige und hinreichende Bedingung des Gleichge wichts in der Möglichkeit, in den Begegnungspunk ten der Körper Gegenkräfte (§. 199.) von solch

Intensität anzubringen, dass jeder bewegliche Körper für sich ins Gleichgewicht kommt.

Endlich ist noch zu bemerken, dass auch hier, wie in §. 200., die Gegenkräfte, wenn sie völlig bestimmte Werthe haben, die Pressungen ausdrücken, welche die Körper in den Begegnungspunkten auf einander ausüben.

Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten bei mit einander verbundenen Körpern.

§. 208.

In dem ersten Theile der Statik (§. 178.) ist bewiesen worden, dass, wenn Kräfte, die auf einen frei beweglichen Körper wirken, im Gleichgewichte sind, bei einer unendlich kleinen Verrückung des Körpers die Summe der Producte aus jeder Kraft in die virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes jederzeit null ist. Wir wollen nun die eben entwickelte Bedingung für das Gleichgewicht mehrerer mit einander verbundener Körper zunächst dazu benutzen, dass wir zeigen, wie jenes Princip in völliger Allgemeinheit auch bei jedem dergleichen Systeme Anwendung findet. In dieser Absicht werden wir die Gültigkeit des Princips zuerst für zwei in dem Begegnungspunkte zweier Körper angebrachte und sich immer das Gleichgewicht haltende Gegenkräfte darthun.

1) Seyen a und b zwei Körper, welche sich mit ihren Flächen in einem Punkte berühren. Heisse C (Fig. 51.) der Punkt des Raums, in welchem die Berührung statt findet, und A und B seyen die zwei in C zusammentreffenden Punkte in den Oberflächen der Körper a und b, die gemeinschaftliche Normale der beiden Flächen in dem Berührungspunkte C heisse c.

2) Werde nun das System der beiden Körp
ein unendlich Weniges verrückt, ohne dass si
zu berühren aufhören (§. 189.). Den Punkt de
mes, in welchem jetzt die Berührung geschieht,
man C', und die jetzige Normale in der Ber
sey c'. Die beiden Punkte A und B in den O
chen, welche vorher mit C zusammentrafen, w
jetzt nicht mehr, wenigstens nicht im Allgemein
C' coincidiren, weil sich die eine Fläche an d
dern zugleich verschoben haben kann. Seyen
A' und B' die Stellen des Raums, welche nunm
Punkte A und B der Oberflächen einnehmen.

3) Weil hiernach A' und B' in den Fläch
endlich nahe bei dem Berührungspunkte C' de
tern nach der Verrückung liegen, so ist der W
der Geraden $A'B'$ mit c' unendlich nahe ein re
und weil c' mit c nur einen unendlich kleinen W
macht, so ist auch der Winkel von $A'B'$ mit
einem rechten unendlich wenig verschieden. Sin
lich F und G die rechtwinkligen Projectionen v
und B' auf c, so ist FG als verschwindend od
gegen $A'B'$ und gegen die andern kleinen Grösse
durch die Verrückung bestimmt wird, zu betrach

4) Lassen wir nun auf die in C anfangs co
renden Punkte A und B der Körper zwei ei
gleiche Kräfte nach entgegengesetzten in die Nor
fallenden Richtungen wirken. Diese Kräfte, welche
$-P$ heissen, halten sich nach §. 195. das Gleichge
Die virtuellen Geschwindigkeiten ihrer Angriffsp
d. i. die Verrückungen AA' und BB' dieser P
projicirt auf die Richtungen der Kräfte, sind C
CG; folglich die Summe der Producte aus den

ten in die virtuellen Geschwindigkeiten $= CF.P - CG.P = GF.P = 0$.

5) Hiermit ist das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für das Gleichgewicht zweier bei der Flächenberührung anzubringenden Gegenkräfte erwiesen. Ganz auf eben die Art wird es für zwei Gegenkräfte dargethan, die beim Zusammentreffen einer Fläche mit einer Linie oder mit einem Punkte, oder bei der Begegnung zweier Linien wirksam sind. Denn in allen diesen Fällen hat die Normallinie bei der Berührung, als in welche die Richtungen der Gegenkräfte fallen, eine durch die Elemente der Berührung vollkommen bestimmte Lage, und es wird wie vorhin gezeigt, dass die zwei anfänglich zusammenfallenden Punkte A und B nach einer unendlich kleinen Verrückung in eine Lage kommen, bei welcher ihre gegenseitige nach der Normallinie geschätzte Entfernung von einer höhern Ordnung ist.

6) Was den Fall anlangt, wenn ein bestimmter Punkt B des einen Körpers in einer bestimmten Linie des andern beweglich ist, so heisse A der Punkt der Linie, wo sich B befindet. Gelangen nun nach der Verrückung beider Körper A nach A' und B nach B', so ist $A'B'$ ein Element der Linie in ihrer zweiten Lage und steht daher auf der durch A' gelegten Normalebene dieser Linie, folglich auch auf der Normalebene durch den Punkt A der Linie in ihrer ersten Lage, unendlich nahe rechtwinklig, und die rechtwinklige Projection von $A'B'$ auf jede in dieser letztern Normalebene durch A gezogene Gerade ist von der zweiten, oder einer höhern Ordnung. Da nun von zwei auf A und B wirkenden Gegenkräften die Richtungen immer in irgend einer der durch A auf die Curve zu setzenden Normallinien liegen müssen, so ist

auch in diesem Falle die Projection von $A' B'$ auf die Richtung der Gegenkräfte jederzeit von einer höhern Ordnung, als der ersten, woraus das Uebrige, wie in 4), folgt.

7) Sind endlich A und B zwei unzertrennliche Punkte zweier Körper, so coincidiren nach der Verrückung auch A' und B'. Welches daher auch die ohne Weiteres hier noch unbestimmt bleibende Richtung der Gegenkräfte seyn mag, so fallen die Projectionen von A' und B' auf diese Richtung immer zusammen, und das Princip ist folglich auch hier gültig.

§. 209.

Seyen wiederum zwei an sich frei bewegliche Körper a und b in einem Punkte mit einander verbunden; treffe daselbst der Punkt A von a mit dem Punkte B von b zusammen, und die Art der Verbindung sey irgend eine der vorhin aufgezählten. Auf die Punkte A_1, A_2,... des a wirken die Kräfte P_1, P_2,... und auf die Punkte B_1, B_2,... des b die Kräfte Q_1, Q_2,... und das System beider Körper sey im Gleichgewichte. Seyen, wie hierzu erfordert wird, P und Q die zwei in A und B anzubringenden Gegenkräfte, so dass jedes der drei Systeme: P, P_1, P_2,... 2) Q, Q_1, Q_2,... 3) P, Q, für sich im Gleichgewichte ist. Wird nun der eine der beiden Körper beliebig, und der andere auf irgend eine Weise so verrückt, wie es seine Verbindungsart mit dem erstern zulässt, und bezeichnen p, p_1, p_2,... q, q_1, q_2,... die dabei statt findenden virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte A, A_1, A_2,... B, B_1, B_2,... so ist nach §. 178.

$$Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots = 0,$$
$$Qq + Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + \ldots = 0,$$
$$\text{und } 0 = Pp + Qq,$$

il $Q = -P$, und nach vor. §. für jede Verbindungs-t $p = q$ ist. Addirt man aber diese drei Gleichungen, kommt:

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + \ldots = 0,$$

durch die Richtigkeit des Princips für zwei sich in em Punkte begegnende Körper bewiesen ist.

Sind zwei oder mehrere Punkte A, A',... des einen Körpers mit eben so vielen B, B',... des andern auf rend eine Weise verbunden, A mit B, A' mit B', etc. d sind resp. P, P',... Q, Q',... die an ihnen beim eichgewichte anzubringenden Gegenkräfte; p, p',... q',... aber die virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte, führt die Bedingung, dass an jedem Körper die urrünglichen Kräfte mit den hinzugesetzten Gegenkräfn im Gleichgewichte seyn müssen, zu den zwei Gleiungen:

$$Pp + P'p' + \ldots + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots = 0,$$
$$Qq + Q'q' + \ldots + Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + \ldots = 0.$$

Aus gleichem Grunde, wie vorhin, ist nun auch r $Pp + Qq = 0$, und eben so $P'p' + Q'q' = 0$, etc. d man gelangt daher durch Addition der beiden Gleiungen zu derselben Gleichung der virtuellen Gehwindigkeiten, wie vorhin.

Ist einer der beiden Körper, z. B. b, unbeweglich, sind $q, q', \ldots q_1, q_2, \ldots = 0$. Hiermit wird die zweite er Gleichungen von selbst erfüllt. Weil aber stets $= q$, $p' = q'$, etc. so sind auch $p, p', \ldots = 0$. Hierrch reducirt sich die erste Gleichung auf

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots = 0,$$

und drückt somit das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für die zuletzt gemachte Annahme aus.

§. 210.

Auf ganz ähnliche Art lässt sich die Gültigkeit des Princips auch für ein System von drei oder mehrern mit einander verbundenen frei beweglichen Körpern darthun. Zuerst nämlich wird für jeden Körper besonders die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten für das Gleichgewicht zwischen den ursprünglich auf ihn wirkenden Kräften und den an ihm in den Begegnungspunkten mit den übrigen Körpern anzubringenden Gegenkräften (§. 207.) aufgestellt. Man addirt hierauf alle diese Gleichungen, und weil je zwei zu derselben Begegnung gehörige Gegenkräfte für sich im Gleichgewichte sind, so werden sich in der erhaltenen Summe je zwei Glieder, welche zwei zusammengehörige Gegenkräfte enthalten, für sich aufheben, und mithin nur die von den ursprünglichen Kräften herrührenden Glieder zurückbleiben. Die Summe dieser Glieder, d. h. die Summe der Producte aus jeder ursprünglichen Kraft in die virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes, wird folglich auch hier null seyn.

Sind unter den Körpern des Systems einer oder etliche unbeweglich, so ändert sich der Gang des eben angedeuteten Beweises nur dahin ab, dass man bloss für die beweglichen Körper Gleichungen aufstellt und in diesen Gleichungen die Glieder weglässt, welche die Gegenkräfte enthalten, die an den beweglichen Körpern bei den Begegnungsstellen mit den unbeweglichen anzubringen sind, indem, wie schon im vorigen §. bemerkt worden, an diesen Stellen die virtuellen Geschwindigkeiten jederzeit null sind. In der Summe al-

r Gleichungen heben sich dann die von den Begeg-
ngen je zweier beweglichen herrührenden Glieder
ben so, wie vorhin, paarweise auf, und man kommt
iederum zu dem Resultate, dass die Summe der in
re virtuellen Geschwindigkeiten multiplicirten Kräfte
i jeder möglichen unendlich kleinen Verrückung des
ystems null ist.

Hiermit ist das Princip für alle möglichen Arten
ewiesen, nach denen Körper in beliebiger Anzahl
urch unmittelbare Begegnung mit einander verbunden
eyn können. Selbst biegsame Linien oder Fäden und
iegsame Flächen sind davon nicht ausgeschlossen, da
an eine dergleichen Linie oder Fläche als ein System
nendlich kleiner unbiegsamer mit einander verbunde-
er Körper betrachten kann.

§. 211.

Es ist noch übrig, den umgekehrten Satz zu be-
eisen, dass, wenn bei jeder, der Verbindungsweise
er Körper nicht widerstreitenden, Verrückung die Glei-
hung der virtuellen Geschwindigkeiten erfüllt wird,
ie Kräfte im Gleichgewichte sind. Dieser Beweis
ann nach Laplace *) und Poisson **) also geführt
erden.

Wäre bei jeder möglichen Verrückung des Systems
$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots = 0$, fände aber demungeachtet Be-
wegung statt und fingen dieser zufolge die Angriffspunkte
$A_1, A_2, \dots$ sich nach den Richtungen $A_1 B_1$, $A_2 B_2, \dots$
u bewegen an, so müsste es möglich seyn, nach
en entgegengesetzten Richtungen $B_1 A_1$, $B_2 A_2, \dots$

*) Mécanique céleste, livre I. chap. III.

**) Traité de mécanique. sec. édit. tome I. Nro. 336.

Kräfte von passenden Intensitäten Q_1, Q_2,... an A_1, A_2,... anzubringen, wodurch diese Bewegungen aufgehoben und Gleichgewicht herbeigeführt würde. Bezeichnen daher q_1, q_2,... die bei irgend einer Verrückung des Systems nach den Richtungen von Q_1, Q_2,... geschätzten Wege von A_1, A_2,..., so müsste, wegen des Gleichgewichts zwischen P_1,... und Q_1,...,

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + \dots = 0$$

seyn, mithin auch wegen der vorausgesetzten Gleichung:

$$Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + \dots = 0.$$

Dieses ist aber nicht möglich. Denn wählen wir zu den unendlich kleinen Verrückungen von A_1, A_2,... die Linien selbst, welche diese Punkte nach den Richtungen $A_1 B_1$, $A_2 B_2$... wegen des nicht statt findenden Gleichgewichts im ersten Zeitelemente beschreiben sollen, so sind die virtuellen Geschwindigkeiten q_1, q_2,... mit diesen Linien identisch und haben direct entgegengesetzte Richtungen von Q_1, Q_2,... Mithin wäre dann jedes der Producte $Q_1 q_1$, $Q_2 q_2$,... negativ, oder doch ein Theil derselben negativ, und die übrigen null, je nachdem entweder alle Angriffspunkte, oder nur etliche derselben sich zu bewegen anfingen. Die Summe dieser Producte könnte folglich nicht null seyn.

So einfach dieser Beweis auch ist, so scheint er mir doch in der Statik nicht wohl zulässig, indem der dabei gleich Anfangs zu Hülfe genommene Satz erst in der Dynamik volle Evidenz erhalten kann, wo nicht bloss Kräfte und deren Angriffspunkte, sondern auch die von den erstern hervorgebrachten Geschwindigkeiten der letztern in Betracht kommen. Es dürfte daher nicht überflüssig seyn, wenn ich einen Beweis hinzu-

füge, der, wenn gleich weniger einfach, doch dieses für sich hat, dass er bloss auf den bisher angewendeten Grundsätzen beruht.

§. 212.

Man denke sich ein System von n beweglichen Körpern a, b, c, ..., die mit einander und, wenn man will, noch mit andern unbeweglichen Körpern auf beliebige Weise verbunden sind. Auf diese Körper wirken die Kräfte: P_1, P_2,... Q_1, Q_2,... R_1, R_2,... und p_1, p_2,... q_1, q_2... r_1, r_2,... seyen die virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte der Kräfte. Von diesem Systeme wollen wir nun der Reihe nach folgende Sätze beweisen:

I. Wirken nur auf einen Körper a des Systems Kräfte P_1, P_2,... und ist $\Sigma P_1 p_1 = 0$, so herrscht Gleichgewicht.

Beweis. Die Kräfte P_1, P_2,... sind entweder für sich im Gleichgewichte, d. h. auch dann noch, wenn a von den übrigen Körpern des Systems isolirt wird; oder sie lassen sich auf eine Kraft P, oder auf zwei nicht weiter reducirbare Kräfte P, Q zurückführen.

Im ersten Falle ist der zu erweisende Satz für sich klar.

Im zweiten Falle hat man bei jeder möglichen Verrückung des Körpers a, wenn er ganz frei ist (§. 178.), und folglich auch, wenn er durch unbewegliche Körper an seiner Beweglichkeit zum Theil gehindert ist: $\Sigma P_1 p_1 = Pp$, folglich $p = 0$; d. h. der Angriffspunkt A der Kraft P, — ein Punkt des Körpers a, — ist entweder unbeweglich, oder in einer unbeweglichen, auf der Richtung von P normalen Linie oder Fläche beweglich. Die Kraft P kann folglich

niemals den Punkt A (§. 192. a.), also auch nicht das System, in Bewegung setzen; mithin können es auch nicht die mit P gleichwirkenden P_1, P_2,...

Im dritten Falle ist $\Sigma P_1 p_1 = Pp + Qq$, und daher $Pp + Qq = 0$. Man nehme den Angriffspunkt B der Kraft Q unbeweglich an, so wird $q = 0$, folglich auch $p = 0$, d. h. die Kraft P, welche von den zweien P und Q, bei der angenommenen Unbeweglichkeit von B, allein noch thätig seyn kann, vermag keine Bewegung zu erzeugen (vor. Fall). Es muss mithin möglich seyn, an B eine Kraft Q' anzubringen, welche, wenn B wieder beweglich gesetzt und Q weggelassen wird, der P das Gleichgewicht hält (§. 190. III.). Hiernach ist $Pp + Q'q' = 0$ (§. 210.), folglich $Qq - Q'q' = 0$. Da nun Q und $-Q'$ auf einen und denselben Punkt B wirken und daher auf eine einzige Kraft reducirt werden können, so halten sie in Folge letzterer Gleichung einander das Gleichgewicht (vor. Fall); mithin sind auch P, Q', Q, $-Q'$, d. i. P und Q, also auch die damit gleichwirkenden P_1, P_2,... im Gleichgewichte.

II. Wenn auf zwei Körper a und b des Systems resp. die Kräfte P_1, P_2,... und Q_1, Q_2,... wirken, und $\Sigma P_1 p_1 + \Sigma Q_1 q_1 = 0$ ist, so herrscht Gleichgewicht.

Beweis. Man nehme b unbeweglich an, so werden q_1, q_2, ... $= 0$, und die Gleichung reducirt sich auf $\Sigma P_1 p_1 = 0$; mithin findet dann Gleichgewicht statt (I). Setzt man hierauf b wieder beweglich, ohne jedoch die Kräfte Q_1, Q_2,... auf b wirken zu lassen, so muss es möglich seyn, an b eine oder zwei Kräfte Q und Q' anzubringen, wodurch das Gleichgewicht erhalten wird. Bei dem hinsichtlich seiner Beweglichkeit

? in den anfänglichen Zustand versetzten Systeme her $\Sigma P_1 p_1 + Qq + Q'q' = 0$ (§. 210.), folglich $\Sigma Q_1 q_1 - Qq - Q'q' = 0$, woraus wir schliessen, lie auf b wirkenden Kräfte Q_1, Q_2,... $-Q$, $-Q'$ ch im Gleichgewichte sind. Da es nun auch P_1, . Q, Q' an a und b sind, so können auch alle Kräfte in Vereinigung, d. i. P_1, P_2,... Q_1, ., keine Bewegung des Systems hervorbringen.

I. Wenn auf drei Körper a, b und c des Systems räfte P_1, P_2,...; Q_1, Q_2,... und R_1, R_2,... 1, und $\Sigma P_1 p_1 + \Sigma Q_1 q_1 + \Sigma R_1 r_1 = 0$ ist, so Gleichgewicht statt.

eweis. Man lasse c unbeweglich werden, so n r_1, r_2,... $= 0$, also $\Sigma P_1 p_1 + \Sigma Q_1 q_1 = 0$, as System ist nach vorigem Satze im Gleichge- . Giebt man hierauf dem c seine Beweglichkeit r, entfernt aber die ursprünglich auf c wirkenden R_1, R_2,..., so wird man das Gleichgewicht en können, indem man an c zwei Kräfte R und der auch nur eine, anbringt. Alsdann ist folgi jeder Verrückung des Systems: $\Sigma P_1 p_1 + \Sigma Q_1 q_1 + R'r' = 0$, mithin $\Sigma R_1 r_1 - Rr - R'r' = 0$. Es a daher an c die Kräfte R_1, R_2,... $-R$, $-R'$ ch im Gleichgewichte seyn. Hieraus aber folgt rbindung mit dem Gleichgewichte zwischen P_1, . Q_1, Q_2,... R, R' das zu erweisende Gleichht zwischen P_1, P_2,... Q_1, Q_2,... R_1, R_2,...

V. Wirken auf mehrere oder alle Körper des Sy- Kräfte, und besteht zwischen diesen Kräften die ung der virtuellen Geschwindigkeiten, so ist das m im Gleichgewichte.

eweis. In I., II. und III. wurde dieser Satz für peciellen Fälle dargethan, wenn auf einen, zwei,

oder drei Körper des Systems Kräfte wirken. Eben so aber, wie dabei von einem Körper auf zwei, und von zweien auf drei geschlossen wurde, so lässt sich von dreien auf vier u. s. w. und zuletzt auf alle Körper des Systems ein Schluss machen.

---

§. 213.

Aus der Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten, insofern sie für einen einzigen frei beweglichen Körper galt, wurden in §. 182. und §. 184. durch Integration zwei Functionen abgeleitet, deren jede beim Zustande des Gleichgewichts ihren grössten oder kleinsten Werth erreichte. Da nun, wie jetzt erwiesen werden, die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten auch auf jedes System mit einander verbundener Körper anwendbar ist, so werden die dort gefundenen Functionen auch gegenwärtig Maxima oder Minima seyn.

Es ist daher, um nur der ersten dieser Functionen zu gedenken, *bei jedem Systeme von Körpern, welches im Zustande des Gleichgewichts sich befindet, die Summe der Producte aus jeder Kraft in die Entfernung ihres Angriffspunktes* von einer unbeweglichen auf der Richtung der Kraft normalen Ebene (§. 176. Zus.), oder, was dasselbe ist, *von einem unbeweglichen in ihrer Richtung beliebig genommenen Punkte ein Maximum oder Minimum;* d. h. bei je zwei Verrückungen, von denen die eine nach dem entgegengesetzten Sinne der andern geschieht, nimmt diese Summe zugleich ab oder zugleich zu.

Wir sahen ferner (ebend.), dass je nachdem diese Summe bei der Verrückung eines freien Körpers aus

der Lage des Gleichgewichts als Maximum oder Minimum sich darstellte, die Kräfte den Körper entweder in seine anfängliche Lage zurückzubringen, oder noch weiter davon zu entfernen strebten, und wir nannten hiernach das Gleichgewicht im erstern Falle sicher, im letztern unsicher. Dieselbe Eigenschaft des Gleichgewichts findet nun auch bei mehrern mit einander verbundenen Körpern statt. Einen sehr elementaren Beweis dieses Satzes, so wie des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten selbst, hat Lagrange gegeben *), indem er, von den einfachsten Eigenschaften des Gleichgewichts an einem vollkommen biegsamen Faden ausgehend, mit Hülfe eines solchen um Flaschenzüge gelegten Fadens alle auf die Körper wirkenden Kräfte durch eine einzige vertreten lässt. Einen ähnlichen Beweis enthält der folgende §., nur dass hier ausser den Sätzen vom Gleichgewichte an einem Faden noch die Lehre vom Mittelpunkte paralleler Kräfte zu Hülfe genommen worden ist.

§. 214.

Auf die Punkte A, A', A'',... (Fig. 52.) eines oder mehrerer auf irgend eine Weise mit einander verbundener Körper wirken die Kräfte P, P', P'',... nach den Richtungen AF, AF', AF'',..., so dass F, F',... beliebig in den Richtungen genommene Punkte sind. Statt nun die Kräfte auf A, A',... unmittelbar wirken zu lassen, wollen wir in F, F',... unendlich kleine unbewegliche Ringe anbringen, an den beweglichen Punkten A, A',... Fäden anknüpfen, diese resp. durch die

*) Lagrange Mécanique analytique, nouv. édit. tome I. page 23 et 71.

auch in diesem Falle die Projection von $A' B'$ auf die Richtung der Gegenkräfte jederzeit von einer höhern Ordnung, als der ersten, woraus das Uebrige, wie in 4), folgt.

7) Sind endlich A und B zwei unzertrennliche Punkte zweier Körper, so coincidiren nach der Verrückung auch A' und B'. Welches daher auch die ohne Weiteres hier noch unbestimmt bleibende Richtung der Gegenkräfte seyn mag, so fallen die Projectionen von A' und B' auf diese Richtung immer zusammen, und das Princip ist folglich auch hier gültig.

§. 209.

Seyen wiederum zwei an sich frei bewegliche Körper a und b in einem Punkte mit einander verbunden; treffe daselbst der Punkt A von a mit dem Punkte B von b zusammen, und die Art der Verbindung sey irgend eine der vorhin aufgezählten. Auf die Punkte A_1, A_2,... des a wirken die Kräfte P_1, P_2,... und auf die Punkte B_1, B_2,... des b die Kräfte Q_1, Q_2,... und das System beider Körper sey im Gleichgewichte. Seyen, wie hierzu erfordert wird, P und Q die zwei in A und B anzubringenden Gegenkräfte, so dass jedes der drei Systeme: P, P_1, P_2,... 2) Q, Q_1, Q_2,... 3) P, Q, für sich im Gleichgewichte ist. Wird nun der eine der beiden Körper beliebig, und der andere auf irgend eine Weise so verrückt, wie es seine Verbindungsart mit dem erstern zulässt, und bezeichnen p, p_1, p_2,... q, q_1, q_2,... die dabei statt findenden virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte A, A_1, A_2,... B, B_1, B_2,... so ist nach §. 178.

$$Pp + P_1p_1 + P_2p_2 + \ldots = 0,$$
$$Qq + Q_1q_1 + Q_2q_2 + \ldots = 0,$$
$$\text{und } 0 = Pp + Qq,$$

weil $Q = -P$, und nach vor. §. für jede Verbindungsart $p = q$ ist. Addirt man aber diese drei Gleichungen, so kommt:

$$P_1p_1 + P_2p_2 + \ldots + Q_1q_1 + Q_2q_2 + \ldots = 0,$$

wodurch die Richtigkeit des Princips für zwei sich in einem Punkte begegnende Körper bewiesen ist.

Sind zwei oder mehrere Punkte A, A', ... des einen Körpers mit eben so vielen B, B', ... des andern auf irgend eine Weise verbunden, A mit B, A' mit B', etc. und sind resp. P, P', ... Q, Q', ... die an ihnen beim Gleichgewichte anzubringenden Gegenkräfte; p, p', ... q, q', ... aber die virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte, so führt die Bedingung, dass an jedem Körper die ursprünglichen Kräfte mit den hinzugesetzten Gegenkräften im Gleichgewichte seyn müssen, zu den zwei Gleichungen:

$$Pp + P'p' + \ldots + P_1p_1 + P_2p_2 + \ldots = 0,$$
$$Qq + Q'q' + \ldots + Q_1q_1 + Q_2q_2 + \ldots = 0.$$

Aus gleichem Grunde, wie vorhin, ist nun auch hier $Pp + Qq = 0$, und eben so $P'p' + Q'q' = 0$, etc. und man gelangt daher durch Addition der beiden Gleichungen zu derselben Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten, wie vorhin.

Ist einer der beiden Körper, z. B. b, unbeweglich, so sind q, q', ... q_1, q_2, ... $= 0$. Hiermit wird die zweite jener Gleichungen von selbst erfüllt. Weil aber stets $p = q$, $p' = q'$, etc. so sind auch p, p', ... $= 0$. Hierdurch reducirt sich die erste Gleichung auf

$$P_1p_1 + P_2p_2 + \ldots = 0,$$

und drückt somit das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für die zuletzt gemachte Annahme aus.

§. 210.

Auf ganz ähnliche Art lässt sich die Gültigkeit des Princips auch für ein System von drei oder mehrern mit einander verbundenen frei beweglichen Körpern darthun. Zuerst nämlich wird für jeden Körper besonders die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten für das Gleichgewicht zwischen den ursprünglich auf ihn wirkenden Kräften und den an ihm in den Begegnungspunkten mit den übrigen Körpern anzubringenden Gegenkräften (§. 207.) aufgestellt. Man addirt hierauf alle diese Gleichungen, und weil je zwei zu derselben Begegnung gehörige Gegenkräfte für sich im Gleichgewichte sind, so werden sich in der erhaltenen Summe je zwei Glieder, welche zwei zusammengehörige Gegenkräfte enthalten, für sich aufheben, und mithin nur die von den ursprünglichen Kräften herrührenden Glieder zurückbleiben. Die Summe dieser Glieder, d. h. die Summe der Producte aus jeder ursprünglichen Kraft in die virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes, wird folglich auch hier null seyn.

Sind unter den Körpern des Systems einer oder etliche unbeweglich, so ändert sich der Gang des eben angedeuteten Beweises nur dahin ab, dass man bloss für die beweglichen Körper Gleichungen aufstellt und in diesen Gleichungen die Glieder weglässt, welche die Gegenkräfte enthalten, die an den beweglichen Körpern bei den Begegnungsstellen mit den unbeweglichen anzubringen sind, indem, wie schon im vorigen §. bemerkt worden, an diesen Stellen die virtuellen Geschwindigkeiten jederzeit null sind. In der Summe al-

ler Gleichungen heben sich dann die von den Begegnungen je zweier beweglichen herrührenden Glieder eben so, wie vorhin, paarweise auf, und man kommt wiederum zu dem Resultate, dass die Summe der in ihre virtuellen Geschwindigkeiten multiplicirten Kräfte bei jeder möglichen unendlich kleinen Verrückung des Systems null ist.

Hiermit ist das Princip für alle möglichen Arten bewiesen, nach denen Körper in beliebiger Anzahl durch unmittelbare Begegnung mit einander verbunden seyn können. Selbst biegsame Linien oder Fäden und biegsame Flächen sind davon nicht ausgeschlossen, da man eine dergleichen Linie oder Fläche als ein System unendlich kleiner unbiegsamer mit einander verbundener Körper betrachten kann.

§. 211.

Es ist noch übrig, den umgekehrten Satz zu beweisen, dass, wenn bei jeder, der Verbindungsweise der Körper nicht widerstreitenden, Verrückung die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten erfüllt wird, die Kräfte im Gleichgewichte sind. Dieser Beweis kann nach Laplace *) und Poisson **) also geführt werden.

Wäre bei jeder möglichen Verrückung des Systems $P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots = 0$, fände aber demungeachtet Bewegung statt und fingen dieser zufolge die Angriffspunkte A_1, A_2, ... sich nach den Richtungen $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, ... zu bewegen an, so müsste es möglich seyn, nach den entgegengesetzten Richtungen $B_1 A_1$, $B_2 A_2$, ...

*) Mécanique céleste, livre I. chap. III.

**) Traité de mécanique. sec. édit. tome I. Nro. 336.

Kräfte von passenden Intensitäten Q_1, Q_2,... an A_1, A_2,... anzubringen, wodurch diese Bewegungen aufgehoben und Gleichgewicht herbeigeführt würde. Bezeichnen daher q_1, q_2,... die bei irgend einer Verrückung des Systems nach den Richtungen von Q_1, Q_2,... geschätzten Wege von A_1, A_2,..., so müsste, wegen des Gleichgewichts zwischen P_1,... und Q_1,...,

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + \dots = 0$$

seyn, mithin auch wegen der vorausgesetzten Gleichung:

$$Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + \dots = 0.$$

Dieses ist aber nicht möglich. Denn wählen wir zu den unendlich kleinen Verrückungen von A_1, A_2,... die Linien selbst, welche diese Punkte nach den Richtungen $A_1 B_1$, $A_2 B_2$... wegen des nicht statt findenden Gleichgewichts im ersten Zeitelemente beschreiben sollen, so sind die virtuellen Geschwindigkeiten q_1, q_2,... mit diesen Linien identisch und haben direct entgegengesetzte Richtungen von Q_1, Q_2,... Mithin wäre dann jedes der Producte $Q_1 q_1$, $Q_2 q_2$,... negativ, oder doch ein Theil derselben negativ, und die übrigen null, je nachdem entweder alle Angriffspunkte, oder nur etliche derselben sich zu bewegen anfingen. Die Summe dieser Producte könnte folglich nicht null seyn.

So einfach dieser Beweis auch ist, so scheint er mir doch in der Statik nicht wohl zulässig, indem der dabei gleich Anfangs zu Hülfe genommene Satz erst in der Dynamik volle Evidenz erhalten kann, wo nicht bloss Kräfte und deren Angriffspunkte, sondern auch die von den erstern hervorgebrachten Geschwindigkeiten der letztern in Betracht kommen. Es dürfte daher nicht überflüssig seyn, wenn ich einen Beweis hinzu-

füge, der, wenn gleich weniger einfach, doch dieses für sich hat, dass er bloss auf den bisher angewendeten Grundsätzen beruht.

§. 212.

Man denke sich ein System von n beweglichen Körpern a, b, c, ..., die mit einander und, wenn man will, noch mit andern unbeweglichen Körpern auf beliebige Weise verbunden sind. Auf diese Körper wirken die Kräfte: P_1, P_2,... Q_1, Q_2,... R_1, R_2,... und p_1, p_2,... q_1, q_2... r_1, r_2,... seyen die virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte der Kräfte. Von diesem Systeme wollen wir nun der Reihe nach folgende Sätze beweisen:

I. Wirken nur auf einen Körper a des Systems Kräfte P_1, P_2,... und ist $\Sigma P_1 p_1 = 0$, so herrscht Gleichgewicht.

Beweis. Die Kräfte P_1, P_2,... sind entweder für sich im Gleichgewichte, d. h. auch dann noch, wenn a von den übrigen Körpern des Systems isolirt wird; oder sie lassen sich auf eine Kraft P, oder auf zwei nicht weiter reducirbare Kräfte P, Q zurückführen.

Im ersten Falle ist der zu erweisende Satz für sich klar.

Im zweiten Falle hat man bei jeder möglichen Verrückung des Körpers a, wenn er ganz frei ist (§. 178.), und folglich auch, wenn er durch unbewegliche Körper an seiner Beweglichkeit zum Theil gehindert ist: $\Sigma P_1 p_1 = Pp$, folglich $p = 0$; d. h. der Angriffspunkt A der Kraft P, — ein Punkt des Körpers a, — ist entweder unbeweglich, oder in einer unbeweglichen, auf der Richtung von P normalen Linie oder Fläche beweglich. Die Kraft P kann folglich

niemals den Punkt A (§. 192. *a.*), also auch nicht das System, in Bewegung setzen; mithin können es auch nicht die mit P gleichwirkenden P_1, P_2,...

Im dritten Falle ist $\Sigma P_1 p_1 = Pp + Qq$, und daher $Pp + Qq = 0$. Man nehme den Angriffspunkt B der Kraft Q unbeweglich an, so wird $q = 0$, folglich auch $p = 0$, d. h. die Kraft P, welche von den zweien P und Q, bei der angenommenen Unbeweglichkeit von B, allein noch thätig seyn kann, vermag keine Bewegung zu erzeugen (vor. Fall). Es muss mithin möglich seyn, an B eine Kraft Q' anzubringen, welche, wenn B wieder beweglich gesetzt und Q weggelassen wird, der P das Gleichgewicht hält (§. 190. III.). Hiernach ist $Pp + Q'q' = 0$ (§. 210.), folglich $Qq - Q'q' = 0$. Da nun Q und $-Q'$ auf einen und denselben Punkt B wirken und daher auf eine einzige Kraft reducirt werden können, so halten sie in Folge letzterer Gleichung einander das Gleichgewicht (vor. Fall); mithin sind auch P, Q', Q, $-Q'$, d. i. P und Q, also auch die damit gleichwirkenden P_1, P_2,... im Gleichgewichte.

II. Wenn auf zwei Körper a und b des Systems resp. die Kräfte P_1, P_2,... und Q_1, Q_2,... wirken, und $\Sigma P_1 p_1 + \Sigma Q_1 q_1 = 0$ ist, so herrscht Gleichgewicht.

Beweis. Man nehme b unbeweglich an, so werden q_1, q_2,... $= 0$, und die Gleichung reducirt sich auf $\Sigma P_1 p_1 = 0$; mithin findet dann Gleichgewicht statt (I). Setzt man hierauf b wieder beweglich, ohne jedoch die Kräfte Q_1, Q_2,... auf b wirken zu lassen, so muss es möglich seyn, an b eine oder zwei Kräfte Q und Q' anzubringen, wodurch das Gleichgewicht erhalten wird. Bei dem hinsichtlich seiner Beweglichkeit

wieder in den anfänglichen Zustand versetzten Systeme ist daher $\Sigma P_1 p_1 + Qq + Q'q' = 0$ (§. 210.), folglich auch $\Sigma Q_1 q_1 - Qq - Q'q' = 0$, woraus wir schliessen, dass die auf b wirkenden Kräfte Q_1, Q_2,... $-Q$, $-Q'$ für sich im Gleichgewichte sind. Da es nun auch P_1, P_2,... Q, Q' an a und b sind, so können auch alle diese Kräfte in Vereinigung, d. i. P_1, P_2,... Q_1, Q_2,..., keine Bewegung des Systems hervorbringen.

III. Wenn auf drei Körper a, b und c des Systems die Kräfte P_1, P_2,...; Q_1, Q_2,... und R_1, R_2,... wirken, und $\Sigma P_1 p_1 + \Sigma Q_1 q_1 + \Sigma R_1 r_1 = 0$ ist, so findet Gleichgewicht statt.

Beweis. Man lasse c unbeweglich werden, so werden r_1, r_2,... $= 0$, also $\Sigma P_1 p_1 + \Sigma Q_1 q_1 = 0$, und das System ist nach vorigem Satze im Gleichgewichte. Giebt man hierauf dem c seine Beweglichkeit wieder, entfernt aber die ursprünglich auf c wirkenden Kräfte R_1, R_2,..., so wird man das Gleichgewicht erhalten können, indem man an c zwei Kräfte R und R', oder auch nur eine, anbringt. Alsdann ist folglich bei jeder Verrückung des Systems: $\Sigma P_1 p_1 + \Sigma Q_1 q_1 + Rr + R'r' = 0$, mithin $\Sigma R_1 r_1 - Rr - R'r' = 0$. Es müssen daher an c die Kräfte R_1, R_2,... $-R$, $-R'$ für sich im Gleichgewichte seyn. Hieraus aber folgt in Verbindung mit dem Gleichgewichte zwischen P_1, P_2,... Q_1, Q_2,... R, R' das zu erweisende Gleichgewicht zwischen P_1, P_2,... Q_1, Q_2,... R_1, R_2,...

IV. Wirken auf mehrere oder alle Körper des Systems Kräfte, und besteht zwischen diesen Kräften die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten, so ist das System im Gleichgewichte.

Beweis. In I., II. und III. wurde dieser Satz für die speciellen Fälle dargethan, wenn auf einen, zwei,

oder drei Körper des Systems Kräfte wirken. Eben so aber, wie dabei von einem Körper auf zwei, und von zweien auf drei geschlossen wurde, so lässt sich von dreien auf vier u. s. w. und zuletzt auf alle Körper des Systems ein Schluss machen.

---

§. 213.

Aus der Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten, insofern sie für einen einzigen frei beweglichen Körper galt, wurden in §. 182. und §. 184. durch Integration zwei Functionen abgeleitet, deren jede beim Zustande des Gleichgewichts ihren grössten oder kleinsten Werth erreichte. Da nun, wie jetzt erwiesen werden, die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten auch auf jedes System mit einander verbundener Körper anwendbar ist, so werden die dort gefundenen Functionen auch gegenwärtig Maxima oder Minima seyn.

Es ist daher, um nur der ersten dieser Functionen zu gedenken, *bei jedem Systeme von Körpern, welches im Zustande des Gleichgewichts sich befindet, die Summe der Producte aus jeder Kraft in die Entfernung ihres Angriffspunktes* von einer unbeweglichen auf der Richtung der Kraft normalen Ebene (§. 176. Zus.), oder, was dasselbe ist, *von einem unbeweglichen in ihrer Richtung beliebig genommenen Punkte ein Maximum oder Minimum*; d. h. bei je zwei Verrückungen, von denen die eine nach dem entgegengesetzten Sinne der andern geschieht, nimmt diese Summe zugleich ab oder zugleich zu.

Wir sahen ferner (ebend.), dass je nachdem diese Summe bei der Verrückung eines freien Körpers aus

der Lage des Gleichgewichts als Maximum oder Minimum sich darstellte, die Kräfte den Körper entweder in seine anfängliche Lage zurückzubringen, oder noch weiter davon zu entfernen strebten, und wir nannten hiernach das Gleichgewicht im erstern Falle sicher, im letztern unsicher. Dieselbe Eigenschaft des Gleichgewichts findet nun auch bei mehrern mit einander verbundenen Körpern statt. Einen sehr elementaren Beweis dieses Satzes, so wie des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten selbst, hat Lagrange gegeben *), indem er, von den einfachsten Eigenschaften des Gleichgewichts an einem vollkommen biegsamen Faden ausgehend, mit Hülfe eines solchen um Flaschenzüge gelegten Fadens alle auf die Körper wirkenden Kräfte durch eine einzige vertreten lässt. Einen ähnlichen Beweis enthält der folgende §., nur dass hier ausser den Sätzen vom Gleichgewichte an einem Faden noch die Lehre vom Mittelpunkte paralleler Kräfte zu Hülfe genommen worden ist.

§. 214.

Auf die Punkte A, A', A'',... (Fig. 52.) eines oder mehrerer auf irgend eine Weise mit einander verbundener Körper wirken die Kräfte P, P', P'',... nach den Richtungen AF, AF', AF'',..., so dass F, F',... beliebig in den Richtungen genommene Punkte sind. Statt nun die Kräfte auf A, A',... unmittelbar wirken zu lassen, wollen wir in F, F',... unendlich kleine unbewegliche Ringe anbringen, an den beweglichen Punkten A, A',... Fäden anknüpfen, diese resp. durch die

*) Lagrange Mécanique analytique, nouv. édit. tome I. page 23 — 74

Ringe in F, F'... leiten und an den andern Enden G, G',... der Fäden die Kräfte P, P',... nach den verticalen Richtungen FG, $F'G'$,..., als angehängte Gewichte, wirken lassen. Denn es wird späterhin bewiesen werden, dass somit die Punkte A, A',... eben so getrieben werden, als ob an ihnen selbst die Kräfte P, P',... nach den Richtungen AF, $A'F'$,... angebracht wären. Uebrigens sollen die Punkte G, G',... in einer horizontalen Ebene enthalten seyn, so dass, wenn sie sich um ein unendlich Weniges in verticaler Richtung auf- oder niederwärts bewegen, ihre gegenseitigen Abstände GG',... als constant bleibend angesehen werden können.

Statt aber in G und G' die Gewichte P und P' anzuhängen, kann man auch G und G' durch eine steife gerade Linie verbinden und in dem Punkte H derselben, welcher der Schwerpunkt von P und P' ist, ein einziges Gewicht $Q = P + P'$ anbringen. Man thue dieses, verbinde hierauf eben so die Punkte H und G'' durch eine steife Gerade und substituire in dem Punkte I dieser Geraden, welcher der Schwerpunkt der in H und G'' befindlichen Gewichte Q und P'' ist, statt dieser Gewichte, also statt P, P' und P'', ein einziges $R = Q + P''$. Man ersetze ferner die Gewichte R und P''' durch ein Gewicht S im Punkte K, welcher in einer von I bis G''' zu legenden steifen Geraden der Schwerpunkt von R und P''' ist; und auf diese Art fahre man fort, bis man zuletzt auf ein Gewicht P_1 gekommen, welches im Schwerpunkte G_1 aller ursprünglichen P, P', P'',... angebracht, die Stelle derselben zu vertreten im Stande ist.

Findet nun zwischen den auf das System der Körper wirkenden Kräften P, P'... Gleichgewicht statt,

und kann daher auch das mit ihnen gleichwirkende Gewicht P_1 keine Bewegung hervorbringen, so wird, wenn man das System auf irgend eine mit der gegenseitigen Verbindung der Körper verträgliche Weise um ein unendlich Weniges verrückt, das Gewicht P_1 weder sinken, noch steigen. Denn sinken kann es nicht, weil es bei seinem Bestreben zu sinken die Verrükkung, welche sein Sinken zur Folge hätte, von selbst hervorbringen würde, was dem vorausgesetzten Gleichgewichte widerstreitet. Das Gewicht kann aber auch nicht steigen, weil je zwei einander gerade entgegengesetzte Verrückungen gleich gut möglich sind, und weil es bei einer Verrückung, die derjenigen, bei welcher es steigt, entgegengesetzt ist, um eben so viel sinken würde, welches nach dem eben Bemerkten nicht möglich ist.

Die Tiefe des Gewichts P_1 unter irgend einer über ihm liegenden horizontalen Ebene ist daher beim Gleichgewichte im Allgemeinen entweder ein Maximum, oder ein Minimum, und zwar ersteres, wenn es, sobald das System nach demselben Sinne zu, oder nach dem gerade entgegengesetzten, noch weiter verrückt wird, zu steigen anfängt; letzteres, wenn es unter denselben Umständen zu sinken beginnt. Da es nun bei seinem fortwährenden Streben zu sinken im erstern Falle zu seiner anfänglichen grössten Tiefe wieder herabzukommen und damit das System in seine anfängliche Lage zurückzubringen strebt, im letztern dagegen sich von seinem anfänglichen höchsten Stande und damit auch das System von der Lage des Gleichgewichts immer mehr zu entfernen sucht, so ist beim Maximum der Tiefe das Gleichgewicht sicher und beim Minimum un-

welche jeder Körper des Systems für sich ins Gleichgewicht gebracht wird. Man sieht aber leicht, wie diese letztern Bedingungen, und damit auch die erstern, durch Hülfe der Analysis immer gefunden werden können. Nachdem man nämlich in den Verbindungspunkten je zweier Körper zwei Gegenkräfte, als ihrer Intensität nach und auch wohl zum Theil oder ganz ihrer Richtung nach unbekannte Kräfte, in Gedanken hinzugefügt hat, stelle man für jeden einzelnen Körper die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts zwischen den auf ihn unmittelbar wirkenden Kräften und den an ihm hinzugefügten Gegenkräften auf, eliminire aus diesen Gleichungen die von den Gegenkräften herrührenden unbekannten Grössen, und die somit hervorgehenden Gleichungen werden die gesuchten Bedingungen für das Gleichgewicht des Systems darstellen. Nachfolgende Beispiele werden dieses Verfahren in volles Licht setzen.

§. 216.

Aufgabe. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften zu finden, welche auf vier Kugeln α, β, γ, δ wirken, von denen sich α und β, β und γ, γ und δ, δ und α berühren.

Auflösung. Seyen A, B, C, D (Fig. 53.) die Mittelpunkte von α, β, γ, δ, und F, G, H, I die vier Berührungspunkte in der gedachten Folge, so ist $AI = AF$ = dem Halbmesser von α, $BF = BG$ = dem Halbmesser von β, u. s. w. Ferner liegt F mit A und B in der gemeinschaftlichen Normale der Kugeln α und β bei ihrer Berührung in F; eben so geht die Gerade BC durch G und ist die Normale der sich in G berührenden β und γ, u. s. w. Die in F an α und β

anzubringenden Gegenkräfte, oder die Pressungen, welche α von β und β von α in F erleiden, haben demnach die Richtungen FA und FB; die Intensität jeder derselben sey a, die als negativ zu betrachten ist, wenn die Richtungen den vorigen entgegengesetzt, und daher AF und BF sind. Auf gleiche Art sey b die gemeinschaftliche Intensität der zwei in G an β und γ nach den Richtungen GB und GC anzubringenden Gegenkräfte. Dasselbe bedeuten c und d für die Berührungen in H und I.

An der Kugel α müssen nun die unmittelbar auf sie wirkenden Kräfte mit den Pressungen d und a, welche sie in I und F nach den Richtungen IA und FA erleidet, im Gleichgewichte seyn. Da aber diese Richtungen in A zusammentreffen, so müssen auch die unmittelbaren Kräfte an α sich zu einer durch A gehenden Kraft p zusammensetzen lassen. Diese Kraft p muss wegen ihres Gleichgewichts mit d und a in der Ebene DAB enthalten seyn, und es muss sich, wenn AP die Richtung derselben ist, verhalten (§. 28. c.):

$$(\alpha)\quad d : a : p = \sin PAB : \sin DAP : \sin DAB$$

Aus gleichen Gründen müssen die drei Systeme der auf die Kugeln β, γ, δ wirkenden Kräfte einfache Resultanten q, r, s haben, welche resp. durch B, C, D gehen und in den Ebenen ABC, BCD, CDA liegen, und es müssen, wenn BQ, CR, DS die Richtungen derselben sind, die Proportionen erfüllt werden:

$$(\beta)\quad a : b : q = \sin QBC : \sin ABQ : \sin ABC$$
$$(\gamma)\quad b : c : r = \sin RCD : \sin BCR : \sin BCD$$
$$(\delta)\quad c : d : s = \sin SDA : \sin CDS : \sin CDA.$$

Nach Elimination von a, b, c, d folgt hieraus zuerst eine Bedingungsgleichung für die Richtungen der Kräfte

$$\text{I.}\quad \frac{\sin PAB}{\sin DAP}\cdot\frac{\sin QBC}{\sin ABQ}\cdot\frac{\sin RCD}{\sin BCR}\cdot\frac{\sin SDA}{\sin CDS}=1;$$

und sodann das gegenseitige Verhältniss der Kräfte p und q:

$$\text{II.}\quad p:q=\frac{\sin DAB}{\sin DAP}:\frac{\sin ABC}{\sin QBC},$$

und eben so durch gehöriges Vertauschen der Buchstaben die Verhältnisse $q:r$ und $r:s$.

Alles dieses zusammengefasst, hat man folgende vier Bedingungen des Gleichgewichts: 1) bei jeder der vier Kugeln müssen die auf sie wirkenden Kräfte eine durch der Kugel Mittelpunkt gehende Resultante haben; 2) jede dieser Resultanten muss mit den Mittelpunkten der zwei anliegenden Kugeln in einer Ebene enthalten seyn; 3) zwischen den Richtungen der Resultanten muss noch die Relation I., und 4) zwischen den Intensitäten derselben müssen die Verhältnisse II. bestehen.

§. 217.

Zusätze. *a.* Ist eine der vier Kugeln, z. B. δ, unbeweglich, so kommt das partielle Gleichgewicht von δ nicht mehr in Rücksicht. Von den vier Proportionen $(\alpha)\ldots(\delta)$ sind daher bloss die drei ersten zu beachten, woraus sich die Verhältnisse zwischen p, q und r, wie in II. ergeben; die Bedingungsgleichung I. aber fällt weg. Auch lässt sich dann statt der Kugel δ irgend ein anderer, die Kugeln α und γ berührender, unbeweglicher Körper setzen, und die Berührungspunkte mit demselben, I und H, können auch so liegen, dass die Normalen AI und CH sich nicht mehr in einem Punkte D treffen. Begreiflich sind dann IAB und BCH die Ebenen, in welche p und r fallen müssen, und eben so hat man in den Proportionen II. bei den Winkeln DAB,

DAP D in *I* und bei *RCD*, *BCD D* in *H* zu verwandeln.

b. Nimmt man zwei Kugeln δ und γ unbeweglich an, oder berühren zwei bewegliche Kugeln α und β überhaupt zwei unbewegliche Flächen, oder auch nur eine, in *I* und *G*, sich selbst aber in *F*, so müssen beim Gleichgewichte die auf α und β wirkenden Kräfte *p* und *q* resp. durch *A* und *B* gehen und in den Ebenen *IAB* und *ABG* liegen, und es muss sich zufolge der Proportionen (α) und (β) verhalten:

$$p : q = \frac{\sin IAB}{\sin IAP} : \frac{\sin ABG}{\sin QBG}.$$

§. 218.

Aufgabe. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen vier Kräften *p*, *q*, *r*, *s* zu finden, welche auf die Ecken eines Vierecks *ABCD* wirken, dessen Seiten von unveränderlicher Länge, dessen Winkel aber veränderlich sind.

Auflösung. Ein solches Viereck ist offenbar das von den Mittelpunkten der so eben betrachteten vier Kugeln gebildete, da bei den möglichen Veränderungen der gegenseitigen Lage der Kugeln die Winkel *DAB*,... im Allgemeinen sich ändern, die Seiten *AB*,... aber constant bleiben, indem *AB* = der Summe der Halbmesser von α und β, u. s. w. Die gesuchten Bedingungen des Gleichgewichts werden daher mit den vorhin für die Kräfte *p*,..*s* gefundenen identisch seyn. Denn obschon zwischen den Seiten des Vierecks, welches von den Mittelpunkten *A*,...*D* der vier Kugeln gebildet wird, stets die Relation $AB + CD = BC + DA$ obwaltet, so begreift man doch leicht, dass diese

Eigenthümlichkeit auf die Bedingungen des Gleichgewichts keinen Einfluss haben kann.

Will man unabhängig von dem Gleichgewichte der Kugeln die jetzt vorgelegte Aufgabe lösen, so betrachte man das Viereck *ABCD* als ein System von 8 Stücken, nämlich von 4 Punkten und 4 Linien: *A*, *AB*, *B*, *BC*, *C*, *CD*, *D*, *DA*, die in der jetzt genannten Ordnung, jedes mit dem nächstfolgenden und das letzte mit dem ersten, verbunden sind. Die 4 Kräfte p, q, r, s sind nun unmittelbar an den 4 Punkten *A*, *B*, *C*, *D* angebracht, und auf die 4 Linien wirken daher blos Pressungen, nämlich zwei auf die zwei Enden einer jeden. An jeder Linie müssen diese zwei Pressungen sich das Gleichgewicht halten und folglich einander gleich und direct entgegengesetzt seyn. Ist also a die Pressung, welche die Linie *AB* am Ende *A* nach der Richtung *AB* erfährt, so wirkt auf das andere Ende *B* eine Pressung a nach der Richtung *BA*. Gleicher Weise sey b jede der beiden Pressungen auf die Enden *B* und *C* von *BC*, und *BC* und *CB* seyen ihre Richtungen; u. s. w.

Nachdem somit das Gleichgewicht der 4 Linien ausgedrückt worden, ist es noch übrig, das Gleichgewicht jedes der 4 Punkte zu berücksichtigen. — Auf den mit den Linien *DA* und *AB* verbundenen Punkt *A* wirken nach dem Gesetze der Gegenkräfte zwei Pressungen d und a nach den Richtungen *DA* und *BA*, und diese müssen im Gleichgewichte seyn mit der an demselben Punkte unmittelbar angebrachten Kraft p. Die Richtung von p, welche *AP* sey, muss daher in die Ebene *DAB* fallen, und es muss die obige Proportion (α) statt finden. Auf ähnliche Art verhält es sich mit dem Gleichgewichte der drei übrigen Punkte

B, C, D, und man wird somit zu denselben Bedingungen des Gleichgewichts des ganzen Systems, wie vorhin, geführt.

§. 219.

Zusätze. *a.* Sind das Viereck $ABCD$ und die resp. durch A, B, C gehenden und in den Ebenen DAB, ABC, BCD enthaltenen Richtungen AP, BQ, CR von p, q, r willkührlich gegeben, so kann man mittelst der Gleichung I. die in der Ebene CDA durch D zu legende Richtung von s und mittelst der Proportionen II. die Verhältnisse zwischen den Intensitäten von $p, \ldots s$ finden.

Dasselbe lässt sich auch leicht durch Construction bewerkstelligen. Denn da am Punkte A die nach DA, BA, AP wirkenden Kräfte d, a, p im Gleichgewichte sind, so kann man mit einer willkührlich angenommenen Intensität von p durch Construction eines Parallelogramms (§. 28. *a.*) die Intensitäten von d und a finden. Am Punkte B sind die Kräfte a, b, q nach den Richtungen AB, CB, BQ im Gleichgewichte, und man erhält daher mit der gefundenen Intensität von a durch Construction eines zweiten Parallelogramms die Intensitäten von b und q. Auf gleiche Weise ergeben sich mit b am Punkte C die Intensitäten von c und r, und endlich am Punkte D, wo die nach ihrer Intensität und Richtung nun bekannten c und d mit s das Gleichgewicht halten, die Intensität und Richtung von s.

b. Da die 4 Kräfte $p, \ldots s$ auch dann noch im Gleichgewichte sind, wenn die Theile des Systems, worauf sie wirken, ihre gegenseitige Lage nicht ändern können, so müssen die Richtungen der Kräfte eine hyperboloidische Lage gegen einander haben, so dass jede Gerade, welche drei derselben trifft, auch der

vierten begegnet (§. 99. *a.*). Hiermit lässt sich aus den Richtungen *AP*, *BQ*, *CR* die Richtung *DS*, ohne vorher die Verhältnisse zwischen den Kräften *p*, *q*, *r* und den Pressungen *a*, *b*, *c*, *d* bestimmt zu haben, folgendergestalt sehr einfach finden. — Man ziehe eine Gerade *l*, welche *AP*, *BQ*, *CR* zugleich schneidet, und sey *S* der Durchschnitt von *l* mit der Ebene *CDA*. Da nun *l* und *s* sich gleichfalls treffen müssen, und *s* in der Ebene *CDA* liegt, so ist *DS* die gesuchte Richtung von *s*.

Weil übrigens die Richtung der Kraft *s* durch die gegebenen Stücke nur auf Eine Weise bestimmt ist, so muss jede andere Gerade *l'*, welche den dreien *AP*, *BQ*, *CR* zugleich begegnet, die Ebene *CDA* in einem Punkte der *DS* treffen. Dasselbe folgt auch leicht aus der Natur des hyperbolischen Hyperboloids. Eine solche Fläche kann nämlich auf doppelte Weise durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden (§. 99. *e*), so dass es zwei Systeme von Geraden giebt, deren jedes die ganze Fläche erfüllt. Jede Gerade folglich, welche drei Gerade des einen Systems trifft, schneidet auch alle übrigen Geraden desselben Systems und gehört zu den Geraden des andern Systems. Nun wird offenbar jede der drei Geraden *AC*, *BD*, *l* von jeder der 4 Geraden *AP*, *BQ*, *CR*, *DS* geschnitten. Nimmt man daher erstere drei als 3 Gerade des einen Systems, so gehören letztere vier zu dem andern Systeme. Jede andere Gerade *l'*, welche *AP*, *BQ*, *CR* zugleich schneidet, gehört daher zum ersten Systeme und schneidet folglich auch die vierte Gerade *DS* des zweiten Systems, d. h. sie trifft die Ebene *CDA* in einem Punkte der *DS*.

c. Seyen *P* und *R* die Punkte, in denen *BD* von den in den Ebenen *DAB* und *BCD* liegenden *AP*

und CR geschnitten wird, und eben so werde AC von BQ und DS in Q und S geschnitten. Da also die vier hyperboloidisch gelegenen AP, BQ, CR, DS der AC in A, Q, C, S und der BD in P, B, R, D begegnen, so verhält sich (§. 102. (c)):

$$\text{I.}^* \quad \frac{AQ}{QC} : \frac{AS}{SC} = \frac{PB}{BR} : \frac{PD}{DR} = \frac{BP}{PD} : \frac{BR}{RD},$$

d. h. AC wird von den Richtungen der q, s nach demselben Doppelverhältnisse, wie BD von den Richtungen der p, r, getheilt. Und auch hiermit kann man, wenn von den Richtungen der Kräfte irgend drei, also 3 der 4 Punkte P, Q, R, S gegeben sind, den vierten Punkt und damit die Richtung der vierten Kraft finden. — Uebrigens ergiebt sich diese Proportion auch unmittelbar aus der Gleichung I. Denn es verhält sich:

$$\sin PAB : \sin DAP = \frac{BP}{AB} : \frac{PD}{AD}.$$

Aehnlicherweise kann man auch die übrigen Verhältnisse in I. ausdrücken, und wenn man alle diese Verhältnisse verbindet, so kommt man auf die Proportion I*. zurück.

Nach §. 102. hat man ferner für das Verhältniss der Kräfte p und q:

$$\frac{p}{AP} : \frac{q}{BQ} = \frac{QC}{AC} : \frac{PD}{BD}.$$

Dasselbe Verhältniss folgt auch aus den Proportionen II. Denn weil

$$\sin DAB : \sin DAP = \frac{BD}{AB} : \frac{PD}{AP},$$

$$\text{und } \sin ABC : \sin QBC = \frac{AC}{AB} : \frac{QC}{QB},$$

so verhält sich nach II.

$$\text{II}^*.\ p:q = \frac{BD \cdot AP}{PD} : \frac{AC \cdot QB}{QC},$$

übereinstimmend mit dem Vorigen.

d. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den Kräften $p,..s$ am Vierecke $ABCD$ können, wie man leicht wahrnimmt, auch folgendergestalt ausgesprochen werden: 1) Hinsichtlich der Richtungen und Intensitäten der 4 Kräfte müssen dieselben Bedingungen erfüllt seyn, als wenn die Kräfte an einem einzigen Körper angebracht wären; insbesondere muss daher jede Gerade, welche 3 der 4 Richtungen trifft, auch der vierten begegnen. 2) Zwei solcher Geraden müssen die zwei Diagonalen des Vierecks seyn, und es müssen daher in der einen dieser Geraden die Angriffspunkte der ersten und dritten Kraft, in der andern die der zweiten und vierten Kraft liegen.

Hat man also vier Kräfte p, q, r, s, die sich an einem einzigen Körper das Gleichgewicht halten, so ziehe man zwei Gerade, deren jede dreien dieser Kräfte, und folglich auch immer der vierten, begegnet. Die Begegnungspunkte der einen Geraden mit p, q, r, s seyen resp. A, Q, C, S, die der andern Geraden: P, B, R, D. Man nehme nun die vier Kräfte in beliebiger Folge und wähle zu den Angriffspunkten der ersten und dritten die Durchschnitte ihrer Richtungen mit der einen, und zu den Angriffspunkten der zweiten und vierten Kraft die Durchschnitte ihrer Richtungen mit der andern Geraden. Alsdann wird nicht allein bei vollkommener gegenseitiger Unbeweglichkeit der 4 Punkte Gleichgewicht statt finden, sondern auch dann noch, wenn man die Punkte in derselben Ordnung, in welcher man die auf sie wirkenden Kräfte genommen hat, jeden mit dem nächstfolgenden und den letzten mit dem

ersten durch Gerade von unveränderlicher Länge verbindet, die Winkel dieses Vierecks aber veränderlich seyn lässt.

Auf solche Weise sind die Kräfte *p*, *q*, *r*, *s* am Vierecke *ABCD* sowohl, als am Vierecke *PQRS*, die Kräfte *p*, *q*, *s*, *r* an jedem der beiden Vierecke *ABSR* und *PQDC*, und die Kräfte *p*, *r*, *q*, *s* an den Vierecken *ARQD* und *PCBS* im Gleichgewichte.

§. 220.

Eine nähere Betrachtung wollen wir noch dem speciellen Falle widmen, wenn das Viereck *ABCD* ein ebenes ist. Da alsdann die Ebenen *DAB*, *ABC*, etc., in welchen die Richtungen der Kräfte enthalten seyn müssen, mit der Ebene des Vierecks zusammenfallen, so müssen auch die Richtungen sämmtlicher Kräfte in dieser Ebene liegen. Die Gleichungen I. oder I*. für die Richtungen und die Verhältnisse II. oder II*. zwischen den Intensitäten der Kräfte bleiben ungeändert. Indessen wird es, späterer Untersuchungen willen, nicht überflüssig seyn, von diesen Formeln für den Fall, wenn das Viereck ein ebenes ist, nachstehende Entwickelung noch beizufügen.

Bezeichnen p, q, r, s die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte *p*,..*s* mit einer in der Ebene beliebig gezogenen Linie oder Axe machen. Gleicher Weise seyen a, b, c, d die Winkel der Linien *AB*, *BC*, *CD*, *DA* mit jener Axe und *a*, *b*, *c*, *d* die Pressungen, welche dieselben Linien *AB*,... resp. in den Enden *A*, *B*, *C*, *D* nach den Richtungen *AB*, *BC*,... erleiden, also $-a$, $-b$, $-c$, $-d$ die Pressungen auf die andern Enden *B*, *C*, *D*, *A* der Linien *AB*,... nach denselben Richtungen *AB*,... . Auf den Punkt *A* wir-

ken demnach die Kräfte p, $-a$, d nach Richtungen, welche mit der Axe die Winkel p, a, d machen, und man hat folglich, weil diese Kräfte sich an A das Gleichgewicht halten müssen, die 2 Gleichungen (§. 41.):

$$p \cos \mathrm{p} - a \cos \mathrm{a} + d \cos \mathrm{d} = 0,$$
$$p \sin \mathrm{p} - a \sin \mathrm{a} + d \sin \mathrm{d} = 0;$$

und wenn man daraus das einemal die Pressung d, das anderemal die Pressung a eliminirt:

$$p \sin (\mathrm{p}-\mathrm{d}) - a \sin (\mathrm{a}-\mathrm{d}) = 0,$$
$$p \sin (\mathrm{p}-\mathrm{a}) - d \sin (\mathrm{a}-\mathrm{d}) = 0.$$

Eben so bekommt man für das Gleichgewicht der Kräfte q, $-b$, a am Punkte B die zwei Gleichungen:

$$q \sin (\mathrm{q}-\mathrm{a}) - b \sin (\mathrm{b}-\mathrm{a}) = 0,$$
$$q \sin (\mathrm{q}-\mathrm{b}) - a \sin (\mathrm{b}-\mathrm{a}) = 0,$$

und gleicher Weise noch zwei Paare von Gleichungen fürs Gleichgewicht an C und D. Aus diesen 8 Gleichungen sind nun die 4 Pressungen a, b, c, d noch wegzuschaffen. Die Elimination von a giebt:

$$\frac{p \sin (\mathrm{p}-\mathrm{d})}{\sin (\mathrm{a}-\mathrm{d})} = \frac{q \sin (\mathrm{q}-\mathrm{b})}{\sin (\mathrm{b}-\mathrm{a})},$$

und eben so findet sich nach Elimination von b, c, d:

$$\frac{q \sin (\mathrm{q}-\mathrm{a})}{\sin (\mathrm{b}-\mathrm{a})} = \frac{r \sin (\mathrm{r}-\mathrm{c})}{\sin (\mathrm{c}-\mathrm{b})}, \quad \frac{r \sin (\mathrm{r}-\mathrm{b})}{\sin (\mathrm{c}-\mathrm{b})} = \frac{s \sin (\mathrm{s}-\mathrm{d})}{\sin (\mathrm{d}-\mathrm{c})}$$

$$\frac{s \sin (\mathrm{s}-\mathrm{c})}{\sin (\mathrm{d}-\mathrm{c})} = \frac{p \sin (\mathrm{p}-\mathrm{a})}{\sin (\mathrm{a}-\mathrm{d})}.$$

In diesen 4 Gleichungen sind also die gesuchten Bedingungen des Gleichgewichts enthalten, — ganz übereinstimmend mit den oben gefundenen I. und II.

Sind an den Punkten A, B, C, D ausser den Kräften $p, .. s$ noch resp. die Kräfte p', q', r', s' angebracht, welche mit der in der Ebene gezogenen Axe die Winkel p′ q′ r′ s′ bilden, so hat man nur in vorigen Gleichungen statt $p \sin \mathrm{p}$, $p \cos \mathrm{p}$ etc. resp. $p \sin \mathrm{p} + p' \sin \mathrm{p}'$,

$p \cos p + p' \cos p'$, etc. zu setzen, und es werden damit die 4 Bedingungen des Gleichgewichts:

$$\frac{p \sin(p-d) + p' \sin(p'-d)}{\sin(a-d)} = \frac{q \sin(q-b) + q' \sin(q'-b)}{\sin(b-a)}, \text{etc.}$$

und auf ähnliche Weise sind die Formeln umzubilden, wenn noch mehrere Kräfte an den Punkten *A*,..*D* angebracht seyn sollten.

§. 221.

Da die Formeln I. und II. auch für das ebene Viereck gelten, so müssen auch bei diesem aus den willkührlich angenommenen Richtungen dreier der 4 Kräfte *p*,..*s* die Richtung der vierten und die Verhältnisse zwischen den Intensitäten bestimmt werden können. Die in §. 219. *b*. gegebene graphische Methode, wenn bloss die Richtung der vierten Kraft gefunden werden soll, wird zwar jetzt unbrauchbar; indessen lässt sich dafür eine andere substituiren, die hinwiederum eben so wenig Anwendung findet, sobald das Viereck nicht mehr in einer Ebene begriffen ist.

Da nämlich am Punkte *A* die Kräfte *p*, *d*, *a* nach den Richtungen *AP*, *DA*, *BA*, und am Punkte *B* die Kräfte *q*, *a*, *b* nach den Richtungen *BQ*, *AB*, *CB* im Gleichgewichte sind, so herrscht auch zwischen sämmtlichen 6 Kräften, also auch, weil *a* und *a* sich gegenseitig aufheben, zwischen *p*, *q* und den nach *DA*, *CB* gerichteten *d*, *b* Gleichgewicht. Es muss folglich, sobald wir uns die Theile des Vierecks als ein fest zusammenhängendes Ganzes denken, die Resultante von *p* und *q* mit der Resultante der nach *AD* und *BC* gerichteten *d* und *a* identisch seyn. Diese gemeinsame Resultante geht mithin durch den Schneidepunkt der Richtungen von *p* und *q*, welcher *T* (Fig. 53.*) sey,

und durch den Schneidepunkt X der Linien AD und BC. Da endlich p, q, r, s im Gleichgewichte sind, und daher die Resultante von r und s der Resultante von p und q direct entgegengesetzt ist, so muss auch der Durchschnitt U der Richtungen von r und s in die Gerade TX fallen.

Sind demnach das ebene Viereck $ABCD$ und die durch A, B, C gehenden und in der Ebene des Vierecks enthaltenen Richtungen der Kräfte p, q, r gegeben, so verlängere man AD, BC bis zu ihrem Durchschnitte X, und p, q bis zu ihrem Durchschnitte T, ziehe die Gerade TX, welche von r in U getroffen werde, und es wird DU die gesuchte Richtung von s seyn.

§. 222.

Zusätze. *a.* Eben so, wie bewiesen worden, dass die Durchschnitte X von DA mit BC, T von p mit q, U von r mit s in einer Geraden enthalten sind, so müssen auch die Durchschnitte Y von AB mit CD, V von s mit p, W von q mit r in einer Geraden liegen. Man kann daher aus den gegebenen Richtungen von p, q, r die Richtung von s auch dergestalt finden, dass man die damit und mit dem Vierecke gegebenen Punkte W und Y durch eine Gerade verbindet. Wird diese Gerade von p in V geschnitten, so ist DV die gesuchte Richtung von s.

b. Von dem Vierecke $UVTW$, welches die vier Kräfte bilden, gehen demnach die Diagonalen TU und VW durch die Durchschnitte X und Y je zweier gegenüberstehender Seiten des Vierecks $ABCD$, auf dessen Ecken die Kräfte wirken. Nächstdem folgt hieraus der geometrische Satz:

Wird um ein ebenes Viereck *ABCD* in seiner Ebene ein anderes *UVTW* dergestalt beschrieben, dass die eine Diagonale *TU* des letztern durch den Durchschnitt *X* des einen Paars gegenüberliegender Seiten des erstern geht, so trifft auch die andere Diagonale *VW* des letztern den Durchschnitt *Y* des andern Paars gegenüberliegender Seiten des erstern.

c. Eben so, wie in §. 219. *d.*, so sind auch hier, wo die Figur eben ist, am Vierecke *PQRS* die Kräfte *p*, *q*, *r*, *s*, am Vierecke *ABSR* die Kräfte *p*, *q*, *s*, *r* u. s. w. im Gleichgewichte. Der dort geführte Beweis ist zwar hier nicht mehr anwendbar, da er Vierecke, welche nicht eben sind, voraussetzt. Man kann sich aber von dem Gleichgewichte der jetzt ebenen Vielecke folgender Weise leicht überzeugen. — Die auch hier geltende Proportion I.° giebt zu erkennen, dass die zwei Reihen von Punkten *A*, *Q*, *C*, *S* und *P*, *B*, *R*, *D* in eine solche Lage gegen einander gebracht werden können, bei welcher die vier Geraden *AP*, *QB*, *CR*, *SD* sich in einem Punkte schneiden *). Als nothwendige und hinreichende Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den Kräften, welche auf die Ecken des ebenen Vierecks *ABCD* wirken, lassen sich daher folgende zwei angeben: 1) Die Kräfte müssen in der Ebene des Vierecks enthalten seyn und sich darin unter der Annahme, dass die Gestalt des Vierecks unveränderlich ist, das Gleichgewicht halten. 2) Die zwei Diagonalen des Vierecks müssen in eine solche Lage gegen einander gebracht werden können, dass die vier Geraden sich in einem Punkte schneiden, welche die vier Punkte der einen Diagonale, in denen sie von den vier

*) Steiner Systemat. Entwickelung pag. 51.

Kräften getroffen wird, mit den entsprechenden Punkten der andern verbinden.

Sind daher die Kräfte p, q, r, s am Vierecke $ABCD$ im Gleichgewichte, so sind es auch die Kräfte p, q, s, r am Vierecke $ABSR$. Denn von p, q, s, r werden die Diagonalen AS und BR des letztern Vierecks resp. in A, Q, S, C und P, B, D, R getroffen. Dass aber diese zwei Reihen von Punkten in die verlangte Lage sich bringen lassen, folgt aus dem vorausgesetzten Gleichgewichte am Vierecke $ABCD$.

d. Da am Vierecke $ABSR$ vier nach AP, BQ, DS, CR gerichtete Kräfte im Gleichgewichte seyn können, so muss nach *b.* der Durchschnitt der zwei gegenüberliegenden Seiten RA und BS, oder der Punkt $RA \cdot BS$, wie wir der Kürze willen den Durchschnitt zweier Linien bezeichnen wollen, mit den Punkten $AP \cdot BQ$ und $RC \cdot SD$, d. i. mit T und U, in einer Geraden liegen, und eben so der Punkt $AB \cdot SR$ mit den Punkten $BQ \cdot SD$ und $AP \cdot RC$ in einer Geraden seyn. — Auf gleiche Art liegt wegen des Gleichgewichts am Vierecke $PQRS$ der Punkt $PS \cdot QR$ in der Geraden TU und der Punkt $QP \cdot RS$ in der Geraden VW.

Man sieht, wie somit das Gleichgewicht der Vierecke $PQRS$, $ABSR$, etc. zur Entdeckung noch mehrerer Relationen der Figur Veranlassung giebt.

§. 223.

Bei der uns jetzt beschäftigenden Aufgabe dürften noch folgende besondere Fälle eine Erwähnung verdienen.

1) Wenn die auf B und D wirkenden Kräfte q

nd s sich in einem Punkte der Diagonale AC begegnen, und daher S mit Q zusammenfällt, so wird

$$AQ:QC = AS:SC, \text{ mithin}$$
folge I*. auch.... $BP:PD = BR:RD$;

fallen daher auch P und R zusammen, d. h. die uf A und C wirkenden Kräfte p und r schneiden sich sdann in einem Punkte der Diagonale BD.

Dasselbe folgt, wenn das Viereck kein ebenes ist, hon daraus, dass sich die Kräfte, wie an einem eingen Körper, das Gleichgewicht halten müssen. Denn llt S mit Q zusammen, so haben s und q eine durch gehende Resultante. Mithin müssen sich auch p nd r zu einer, dieser Resultante gleichen und entgengesetzten Kraft vereinigen lassen, und folglich in ner Ebene liegen. Schneidet nun diese Ebene die iagonale BD im Punkte P, so sind, weil p und r esp. in den Ebenen DAB und BCD liegen müssen, AP und CP die Richtungen von p und r.

2) Ist das Viereck ein ebenes, und gehen die Richtungen dreier der vier Kräfte durch den Durchschnitt der Diagonalen, so muss nach vorigem Satze auch ie Richtung der vierten diesen Durchschnitt treffen. lsdann sind p und r, so wie q und s einander direct ntgegengesetzt, die 4 Punkte P, Q, R, S coincidiren it Z und es verhalten sich nach II*:

$$p:q = \frac{AZ.ZC}{AC} : \frac{BZ.ZD}{BD},$$

$$\text{oder:} \frac{1}{p}:\frac{1}{q} = \frac{1}{AZ}+\frac{1}{ZC} : \frac{1}{BZ}+\frac{1}{ZD},$$

nd eben so $\frac{1}{q}:\frac{1}{r} = \frac{1}{BZ}+\frac{1}{ZD} : \frac{1}{CZ}+\frac{1}{ZA}$.

Die entgegengesetzten Kräfte p und r sind daher einander gleich, und eben so müssen auch q und s einander gleich seyn.

Diese Gleichheit fliesst unmittelbar auch aus der nöthigen Fortdauer des Gleichgewichts, wenn die gegenseitige Lage von A, B, C, D ganz unveränderlich angenommen wird. Ueberhaupt folgt daraus, dass, wenn drei der vier Kräfte sich in einem Punkte schneiden, auch die vierte diesen Punkt treffen muss. Wird nun der Schneidepunkt der Diagonalen zu diesem Punkte genommen, so fallen die Kräfte p, r, also auch ihre Resultante, in die Diagonale AC, und die Kräfte q, s, so wie ihre Resultante, in die Diagonale BD. Diese zwei Resultanten können aber nicht anders im Gleichgewichte seyn, als wenn jede von ihnen null ist; mithin müssen p und r, und eben so q und s einander gleich und direct entgegengesetzt seyn.

3) Ist das Viereck ein Parallelogramm, so wird das Verhältniss der nach dem Mittelpunkt desselben gerichteten Kräfte:

$$(p = r) : (q = s) = AC : BD.$$

§. 224.

Auf ganz ähnliche Art, wie bei einem Vierecke, lassen sich auch bei einem mehrseitigen Vielecke, dessen Seiten von constanter Länge, die Winkel aber veränderlich sind, die Bedingungen ausdrücken, denen Kräfte, an den Ecken des Vielecks angebracht, beim Gleichgewichte unterworfen seyn müssen. Es muss nämlich jede Kraft besonders mit den zwei Pressungen im Gleichgewichte seyn, welche die Ecke des Vielecks, auf welche die Kraft zunächst wirkt, von den zwei anliegenden Seiten erleidet, und an jeder Seite müssen

ich die zwei Pressungen auf die Enden der Seite das leichgewicht halten. Hieraus fliessen aber die Bedinungen: dass 1) jede Kraft mit den zwei anliegenden eiten in einer Ebene enthalten seyn muss, und dass), wenn jede Kraft nach den zwei anliegenden Seiten zwei zerlegt wird, je zwei der somit entstehenden räfte, welche auf die beiden Enden einer Seite wiren, einander gleich und entgegengesetzt seyn müssen.

Sind daher das Vieleck und die Richtungen der räfte, bis auf eine, gegeben, so kann man eben so, ie in §. 219. *a.*, die noch übrige Richtung und die erhältnisse sämmtlicher Kräfte zu einander bestimen.

Wird bloss die noch fehlende Richtung verlangt, id ist das Vieleck in einer Ebene enthalten, so kann an ähnlicher Weise, wie in §. 221., die Richtung ich durch blosses Ziehen gerader Linien finden, wors, da dieses immer auf mehrfache Art sich bewerkelligen lässt, neue geometrische Sätze, das Liegen n Punkten in Geraden betreffend, hervorgehen.

Seyen z. B. das Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 54.) und e Richtungen der auf A, B, C, D wirkenden Kräfte q, r, s gegeben, und werde die Richtung der an E zubringenden Kraft t gesucht. Bezeichnet man der ürze willen die Resultante von p und q mit (pq), die esultante von p, q, r mit (pqr), u. s. w., so geht s ähnlichem Grunde, wie beim Vierecke in §. 221.,

(pq) durch die Punkte $p \cdot q$ und $EA \cdot BC$,
(pqr) — — — $(pq) \cdot r$ und $EA \cdot CD$,
$qrs)$, also auch t, — — — $(pqr) \cdot s$ und E.

Hiermit kann man also nach und nach die Richngen von (pq), (pqr) und t durch Ziehen von Ge-

raden finden. Auch kann man umgekehrt zuerst (sr), hieraus (srq) und hieraus $(srqp)$ oder t bestimmen.

Ein noch anderes Verfahren besteht darin, dass man eben so, wie (pq), noch (qr) und (rs) sucht, hierauf (pqr) durch $(pq)\cdot r$ und $p\cdot(qr)$, und (qrs) durch $(qr)\cdot s$ und $q\cdot(rs)$ legt, und endlich zwei der drei Punkte $(pqr)\cdot s$, $(pq)\cdot(rs)$, $p\cdot(qrs)$ bestimmt. Denn diese drei Punkte sind in der gesuchten Richtung von t oder $(pqrs)$ enthalten.

Die aus diesen verschiedenartigen Constructionen sich ergebenden geometrischen Sätze mit Worten auszudrücken, bleibe dem Leser überlassen.

Sehr bemerkenswerth ist es noch, dass man zu dergleichen geometrischen Sätzen auch schon durch Betrachtung eines einzigen Körpers und durch Zuhülfenahme des einzigen Satzes gelangen kann, dass sich von drei in einer Ebene liegenden und sich in einem Punkte schneidenden Geraden die eine, welche man will, als die Richtung der Resultante zweier nach den beiden andern Geraden wirkenden Kräfte ansehen lässt.

Sind also z. B. p, q, r, s irgend vier in einer Ebene enthaltene Gerade, und legt man durch die Punkte $p\cdot q$, $q\cdot r$, $r\cdot s$ in derselben Ebene willkührlich drei andere Gerade (pq), (qr), (rs), so kann man letztere immer als die Richtungen der Resultanten von Kräften betrachten, welche die Richtungen von p und q, etc. haben. Hieraus kann man, wie vorhin, die Resultanten (pqr) und (qrs) bestimmen und damit 3 Punkte finden, deren jeder in der Resultante aller 4 Kräfte liegen muss, also 3 Punkte, die in einer Geraden sind. Der hieraus entspringende geometrische Satz führt übrigens, gleich dem in §. 222. *b.*, und wie Fig. 55. zeigt, auf ein eingeschriebenes und ein umschriebenes Viel-

eck, von welchem letzteren die Diagonalen durch die Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten des erstern gehen.

§. 225.

Aufgabe. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen 4 Kräften P, Q, R, S zu finden, welche auf die Seiten eines Vierecks $ABCD$ wirken, (Fig. 56.), dessen Seiten von constanter Länge, die Winkel aber veränderlich sind.

Auflösung. Seyen F, G, H, I die in den Seiten AB, BC, etc. gelegenen Angriffspunkte der Kr[illegible] und FK, GL, HM, IN die Richtungen der letztern. Beim Gleichgewichte des Systems wirken nun auf die Seiten DA und AB im Punkte A, in welchem sie mit einander verbunden sind, zwei einander gleiche und entgegengesetzte Pressungen, welche resp. n und $-n$ heissen. Desgleichen wirken auf AB und BC in B zwei einander gleiche und entgegengesetzte Pressungen k und $-k$. Da nun an jedem Theile des Systems die auf ihn wirkenden Kräfte und Pressungen für sich im Gleichgewichte sind, so halten an der Linie AB die Pressungen $-n$ und k der Kraft P das Gleichgewicht, und es müssen daher die Richtungen der beiden erstern der Richtung der letztern in einem und demselben Punkte begegnen. Sey K dieser Punkt, so fallen $-n$ und k, also auch n und $-k$, in AK und BK, und es erhellet aus gleichem Grunde, dass AK der IN in einem Punkte N, und BK der GL in einem Punkte L begegnen muss, und dass DN und CL sich in einem Punkte M der HM schneiden müssen. Die auf die Seiten BC und CD in C wirkenden Pressungen fallen alsdann in LM, und die Pressungen auf die Seiten CD und DA in D fallen in MN.

Die 1ste Bedingung des Gleichgewichts beruht demnach auf der Möglichkeit, ein Viereck *KLMN* zu verzeichnen, dessen Seiten durch die Ecken des Vierecks *ABCD* gehen, und dessen Ecken in den Richtungen *FK*, *GL*,... der Kräfte liegen. — Denkt man sich das Viereck *ABCD* und die Richtungen *FK*,... gegeben, und ist die Figur in einer Ebene enthalten, so führt die Forderung, das Viereck *KLMN* zu beschreiben, zu einer Gleichung des zweiten Grades und ist daher im Allgemeinen entweder auf doppelte Weise, oder gar nicht erfüllbar. Ist aber die Figur nicht eben, so ist die Construction von *KLMN* nur bei gewissen speciellen Lagen der Richtungen *FK*,... gegen das Viereck *ABCD* möglich. Da ferner durch Zerlegung der durch die Ecken des Vierecks *KLMN* gehenden Kräfte *P*, *Q*, *R*, *S* nach den Seiten desselben Vierecks die auf *A*, *B*, *C*, *D* wirkenden Pressungen sich ergeben, — z. B. durch Zerlegung der nach *FK* gerichteten Kraft *P* nach den Seiten *NK* und *KL* die Pressungen *n* und *k*, — und da je zwei dieser Pressungen, welche in dieselbe Seite fallen, sich gegenseitig aufheben, so ist die zweite Bedingung des Gleichgewichts: dass, wenn man die Seitenlängen des Vierecks *KLMN* constant und die Winkel desselben veränderlich annimmt, die Kräfte *P*,..*S*, an den Spitzen dieses Vierecks angebracht, im Gleichgewichte sind. Es müssen daher (§. 219. *d.*)

2) wenn die gegenseitige Lage der Theile, worauf die Kräfte wirken, unveränderlich angenommen wird, die Kräfte im Gleichgewichte seyn; und diese Bedingung reicht hin, wenn das Viereck *KLMN* nicht eben ist. Denn die alsdann noch nöthige Bedingung, dass die Richtungen *FK*, *GL*,... resp. in die Ebenen

NKL, *KLM*,... fallen, ist hier bereits erfüllt, da *FK* in der Ebene *AKB*, also auch in der Ebene *NKL* liegt, u. s. w. Wenn aber das Viereck *ABCD* und die darauf wirkenden Kräfte, folglich auch das Viereck *KLMN*, in einer Ebene enthalten sind, so müssen

8) die Diagonalen des von den Kräften gebildeten Vierecks die Durchschnitte der gegenüberstehenden Seiten des Vierecks *KLMN* treffen. (§. 221.)

Dass diese Bedingungen des Gleichgewichts jederzeit hinreichen, leuchtet ein. Denn sind die Kräfte am Vierecke *KLMN*, auf dessen Ecken sie wirken, im Gleichgewichte, so sind sie es zu Folge des zu Anfange dieses §. Gesagten, auch dann, wenn sie an den Seiten irgend eines in *KLMN* einbeschriebenen Vierecks da, wo sie dieselben treffen, angebracht werden.

§. 226.

Wir wollen jetzt die Bedingungen dieses Gleichgewichts am Vierecke durch Gleichungen auszudrücken suchen, dabei jedoch nur den Fall berücksichtigen, wenn das Viereck und die Kräfte in einer und derselben Ebene enthalten sind. Am einfachsten werden wir hierbei verfahren, wenn wir die an den Seiten angebrachten Kräfte in andere verwandeln, welche auf die Spitzen wirken. Denn hierdurch werden wir in den Stand gesetzt, von den bereits in §. 220. erhaltenen Formeln unmittelbaren Gebrauch zu machen.

Sey zu dem Ende $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$; $AF = a_1$, $FB = a_2$, $BG = b_1$, $GC = b_2$, etc. also $a_1 + a_2 = a$, $b_1 + b_2 = b$, etc. Man zerlege nun die in F angebrachte Kraft P in zwei mit ihr parallele auf die Endpunkte A, B der Seite

AB wirkende Kräfte $\frac{a_2}{a}P$ und $\frac{a_1}{a}P$ (§. 26. *c*.). Eben so setze man statt der in *I* angebrachten Kraft *S* zwei ihr parallele auf *D* und *A* wirkende Kräfte $\frac{d_2}{d}S$ und $\frac{d_1}{d}S$, und verfahre auf gleiche Art mit den Kräften *Q* und *R*.

Werden daher noch die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte *P*, *Q*, *R*, *S* und die Linien *AB*, *BC*, *CD*, *DA* mit einer willkührlich in der Ebene gezogenen Axe machen, resp. mit P, Q, R, S und a, b, c, d bezeichnet, so wirken jetzt auf *A* die zwei Kräfte $S\frac{d_1}{d}$ und $P\frac{a_2}{a}$ nach den durch die Winkel S und P bestimmten Richtungen, auf *B* die Kräfte $P\frac{a_1}{a}$ und $Q\frac{b_2}{b}$ nach den durch P und Q bestimmten Richtungen etc., und hat man zu Folge der Gleichung am Ende von §. 220., wenn statt der dortigen Kräfte p, p', q, q' resp. $S\frac{d_1}{d}, P\frac{a_2}{a}, P\frac{a_1}{a}, Q\frac{b_2}{b}$, und statt der dortigen Winkel p, p', q, q' resp. S, P, P, Q gesetzt werden:

$$S\frac{d_1}{d}\frac{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{d})}{\sin(\mathrm{a}-\mathrm{d})}+P\left(\frac{a_2}{a}\frac{\sin(\mathrm{P}-\mathrm{d})}{\sin(\mathrm{a}-\mathrm{d})}+\frac{a_1}{a}\frac{\sin(\mathrm{P}-\mathrm{b})}{\sin(\mathrm{a}-\mathrm{b})}\right)$$
$$+Q\frac{b_2}{b}\frac{\sin(\mathrm{Q}-\mathrm{b})}{\sin(\mathrm{a}-\mathrm{b})}=0,$$

und eben so noch drei andere Gleichungen, welche auch schon aus dieser durch gehörige Verwandlung der Buchstaben in die nächstfolgenden hervorgehen und mit ihr die Bedingungen des Gleichgewichts ausmachen.

Da in diesen vier Gleichungen nicht die Seiten des

Vierecks selbst, sondern nur die Winkel derselben unter sich und mit den Kräften, so wie die Verhältnisse vorkommen, nach denen die Seiten durch die Angriffspunkte der Kräfte getheilt werden, so erhellet, dass, wenn auf die jetzt in Rede stehende Weise Gleichgewicht an einem Vierecke statt findet, dieselben Kräfte auch an jedem andern Vierecke im Gleichgewichte seyn werden, welches dem erstern nicht ähnlich, sondern mit ihm nur gleichwinklig ist, und dessen Seiten mit den Kräften dieselben Winkel, wie im erstern, machen und von den Angriffspunkten nach denselben Verhältnissen, wie im erstern, getheilt werden.

Aus allen vier Gleichungen lassen sich die vier Kräfte eliminiren, und man bekommt damit eine Gleichung, mittelst welcher, wenn z. B. das Viereck, die Angriffspunkte in den Seiten desselben und die Richtungen dreier Kräfte gegeben sind, die Richtung der vierten gefunden werden kann. Es drückt diese Gleichung die Bedingung aus, unter welcher das Viereck *KLMN*, welches um das Viereck *ABCD* und in das von den Kräften gebildete Viereck möglichen Falles beschrieben werden kann, eine solche Lage hat, dass die Durchschnitte seiner gegenüberstehenden Seiten in die Diagonalen des Vierecks der Kräfte fallen. — Die gegenseitigen Verhältnisse zwischen den 4 Kräften können dann gleichfalls bestimmt werden.

§. 227.

Zum Beschlusse der Untersuchungen über das Gleichgewicht am Vierecke mögen noch einige merkwürdige specielle Fälle folgen, die aber so einfach sind, dass, um sie zu beurtheilen, es angemessener seyn wird, zu den Principien selbst zurückzukehren,

als von den zuletzt entwickelten Formeln Gebrauch zu machen.

Aufgabe. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen zwei Kräften P und R zu finden, welche in F und H (Fig. 57.) an zwei gegenüberliegenden Seiten AB und CD eines Vierecks mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln angebracht sind.

Auflösung. Weil an der Seite DA keine Kraft angebracht ist, so müssen sich die auf DA in D und A wirkenden Pressungen allein das Gleichgewicht halten, und ihre Richtungen müssen daher in DA fallen. Die Pressung, welche AB in A erleidet, fällt daher ebenfalls in DA, und aus ähnlichem Grunde die Pressung auf AB im Punkte B in BC. Da nun an AB die in F angebrachte Kraft P mit den Pressungen in A und B im Gleichgewichte seyn muss, so müssen sich DA, BC und die Richtung von P in einem Punkte X schneiden, woraus zugleich folgt, dass 1) das Viereck ein ebenes seyn muss. Da ferner das Gleichgewicht nicht aufhören darf, wenn die Seiten des Vierecks unbeweglich gegen einander angenommen werden, so müssen 2) die Kräfte P und R einander gleich und direct entgegengesetzt seyn, also in die Gerade FH fallen, und diese Gerade muss 3) den Durchschnitt X von DA mit BC treffen, weil FX die Richtung von P war. — Dass diese drei nothwendigen Bedingungen auch hinreichend sind, erhellet ohne weitere Erörterung.

§. 228.

Zusätze. *a*. Wird die Seite CD unbeweglich angenommen, und wirkt nur auf AB in F eine Kraft P, so zeigt sich auf gleiche Weise, dass nur dann,

und dann immer, Gleichgewicht statt findet, wenn das Viereck ein ebenes ist, und wenn die Richtung von P durch den Durchschnitt X der beiden übrigen Seiten Seiten geht.

b. Wird das Viereck $ABCD$, während CD unbewegt bleibt, in seiner Ebene verschoben, so beschreibt jeder Punkt F der AB eine gewisse Curve, — die Punkte A und B Kreise um D und C als Mittelpunkte. — Statt daher den Angriffspunkt F als einen bestimmten Punkt in der beweglichen Geraden AB zu betrachten, kann man ihn auch als einen in einer unbeweglichen Curve (in der von ihm beschriebenen) beweglichen Punkt ansehen. Dieser Ansicht zu Folge muss aber die Kraft auf der Curve normal seyn, und wir schliessen daraus:

Wird ein ebenes Viereck $ABCD$, dessen Seitenlängen constant sind, dessen Winkel aber sich ändern können, in seiner Ebene verschoben, während eine Seite CD festgehalten wird, so vereinigen sich die Normalen aller der Curven, welche die Punkte der gegenüberliegenden Seite AB beschreiben, stets in einem Punkte, in demjenigen nämlich, in welchem sich die beiden andern Seiten DA und BC, als Normalen der von A und B beschriebenen Kreise, schneiden. *)

*) Von dieser Eigenschaft des Vierecks kann man sich folgendergestalt auch geometrisch überzeugen. Seyen A', B', F' die Oerter, welche A, B, F nach einer unendlich kleinen Verschiebung einnehmen, so sind DAA' und CBB', folglich auch XAA' und XBB', rechte Winkel, folglich $XA' = XA$ und $XB' = XB$; und weil auch $A'B' = AB$, so sind die Dreiecke XAB und $XA'B'$ einander gleich und ähnlich. Die Linie AB kann daher auch dadurch in die Lage $A'B'$ gebracht werden, dass man das Dreieck XAB um X dreht. Alsdann

c. Werde, wie im vor. §., CD wieder beweglich angenommen, und seyen P und R zwei sich das Gleichgewicht haltende Kräfte. Seyen überdies BC und DA einander parallel (Fig. 58.), also ihr Durchschnitt unendlich entfernt, so muss mit ihnen auch FH parallel seyn. Man ziehe mit BC und DA noch eine zweite Parallele $F'H'$, welche AB und CD in F' und H' schneide, und bringe in diesen Punkten zwei Kräfte P' und R' an, welche resp. den P und R gleich und entgegengesetzt sind, folglich mit ihren Richtungen in $F'H'$ fallen und einander das Gleichgewicht halten. Alsdann wird auch zwischen den 4 Kräften P, P', R, R' Gleichgewicht bestehen. Es bilden aber P, P' ein Paar, und R, R' ein zweites Paar, das in der Ebene des erstern liegt und mit ihm ein gleiches, aber entgegengesetztes Moment hat. Da nun ein Paar in seiner Ebene und an dem Körper, woran es angebracht ist, ohne Aenderung seiner Wirkung beliebig verlegt werden kann, wenn nur sein Moment sowohl dem Sinne als der absoluten Grösse nach dasselbe bleibt, so schliessen wir:

Bei einem Vierecke $ABCD$ mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln, von welchem zwei Seiten BC und DA einander parallel sind, halten sich zwei in der Ebene des Vierecks an den beiden andern Seiten AB und CD angebrachte Kräftepaare P, P' und R, R' unter denselben Bedingungen, wie an einem einzigen Körper, das Gleichgewicht.

d. Sey noch AB parallel mit CD, also das Vier-

---

aber beschreibt eben so, wie A und B, auch jeder andere Punkt F der AB ein Element FF', welches auf seiner Verbindungslinie FX mit X normal ist.

eck ein Parallelogramm (Fig. 59.). Man nehme in *AB* beliebig zwei Punkte *F*, *F'*, in *CD* einen beliebigen Punkt *H*, und trage von *H* nach *H'* eine Linie $=$ *FF'*. Man bringe ferner an *F*, *F'*, *H*, *H'* und in der Ebene des Vierecks vier einander gleiche Kräfte *P*, *P'*, *R*, *R'* an, von denen *P* und *R'* einerlei Richtung, *P'* und *R* die entgegengesetzte haben. Zwischen diesen 4 Kräften herrscht nach vorigem Satze Gleichgewicht. Denn *P*, *P'* und *R*, *R'* sind zwei an *AB* und *CD* wirkende Paare von einander gleichen und entgegengesetzten Momenten. Mithin sind *P* und *R* gleichwirkend mit —*P'* und —*R'*, d. h.

Die Wirkung eines Paares, dessen Kräfte an zwei gegenüberliegenden Seiten und in der Ebene eines Parallelogramms mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln angebracht sind, wird nicht geändert, wenn man die Kräfte ihren anfänglichen Richtungen parallel bleiben lässt, ihre Angriffspunkte aber in den Seiten, worin sie liegen, um gleich viel und nach einerlei Seite hin verrückt.

§. 229.

Aufgabe. Von einem Vierecke *ABCD* (Fig. 60.), dessen Seitenlängen constant und die Winkel veränderlich sind, ist die eine Ecke *D* unbeweglich. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen zwei Kräften *P* und *Q* zu finden, welche auf die zwei der Ecke *D* nicht anliegenden Seiten *AB* und *BC* in *F* und *G* wirken.

Auflösung. An der Seite *DA*, deren einer Endpunkt *D* mit einem unbeweglichen Punkte verbunden ist, muss die Pressung auf *D* mit der Pressung auf den andern Endpunkt *A* im Gleichgewichte seyn. Beide

Pressungen, also auch die Pressung auf A, als den einen Endpunkt von AB, fallen daher in DA.

An der Seite AB sind die Pressungen auf die Endpunkte A und B derselben mit der Kraft P im Gleichgewichte. Da nun die Pressung auf A in DA fällt, so muss P mit DA in einer Ebene liegen, und wenn demnach P die DA in M schneidet, so fällt die Pressung auf B in BM.

Die Pressung auf B, als den einen Endpunkt von BC fällt daher gleichfalls in BM; die Pressung auf der Seite BC anderes Ende C fällt in CD wegen des unbeweglichen Punktes, an welchem CD mit dem Ende D befestigt ist. Mit beiden Pressungen zusammen ist aber die Kraft Q im Gleichgewichte. Mithin müssen BM und CD in einer Ebene liegen, und die Richtung von Q muss den Durchschnitt N dieser Geraden treffen.

Hieraus fliessen nun zunächst folgende Bedingungen des Gleichgewichts: 1) das Viereck $ABCD$ muss ein ebenes seyn; 2) die Richtungen der Kräfte P und Q müssen in dieser Ebene begriffen seyn; 3) die Punkte M und N, in denen diese Richtungen resp. die Seiten DA und CD treffen, müssen mit der Ecke B in einer Geraden liegen.

Sind daher das ebene Viereck $ABCD$, die beiden Angriffspunkte F, G und die Richtung MF der einen Kraft P gegeben, so findet man damit auch die Richtung GN der andern Q. Kennt man ferner die Intensität der einen Kraft P, so ergiebt sich die Intensität der andern Q dadurch, dass, wenn man P nach MA und MB und Q nach BN und CN zerlegt, die zwei in MB fallenden Kräfte sich aufheben müssen.

Es verhält sich aber, wenn man diese in MB fallenden, durch die Zerlegung von P und Q sich ergebenden, Kräfte Z und $-Z$ nennt:

$$P : Z = \sin AMB : \sin AMF = \frac{AB}{MB} : \frac{AF}{MF},$$

$$Q : -Z = \sin BNC : \sin GNC = \frac{BC}{NB} : \frac{GC}{NG};$$

folglich $P : Q = -\frac{AB}{MB} \cdot \frac{MF}{AF} : \frac{BC}{NB} \cdot \frac{NG}{GC}$.

Die Erfüllung dieser Proportion ist daher die vierte und letzte Bedingung des Gleichgewichts.

§. 230.

Zusätze. *a.* Heissen U, V die Durchschnitte von BC mit MA, MF, und W, X die Durchschnitte von AB mit NG und NC, so findet sich eben so, wie vorhin:

$$P : Z = \frac{UB}{MB} : \frac{UV}{MV}, \quad Q : -Z = \frac{BX}{NB} : \frac{WX}{NW},$$

folglich $P : Q = -\frac{UB}{MB} \cdot \frac{MV}{UV} : \frac{BX}{NB} \cdot \frac{NW}{WX}$.

b. Ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm, so sind U und X unendlich entfernte Punkte, folglich $UB : UV = 1$, $BX : WX = 1$, und man hat daher in diesem Falle:

$$P : Q = -\frac{MV}{MB} : \frac{NW}{NB}.$$

c. Wenn der Punkt M, in welchem die Richtung von P die Seite DA trifft, in D fällt, so fällt damit auch N zusammen, und es wird, wenn zugleich das Viereck ein Parallelogramm ist (Fig. 61.)

$$P:Q = -DV:DW,$$

oder, weil $DV = DC\frac{\sin C}{\sin V}$ und $DW = DA\frac{\sin A}{\sin W}$ ist:

$$P.BC \sin P^\wedge BC + Q.AB \sin Q^\wedge AB = 0.$$

d. Will man den bisher unbeweglichen Punkt D beweglich seyn lassen, so muss man an ihm eine mit P und Q das Gleichgewicht haltende Kraft, oder auch zwei den P und Q gleiche, parallele und entgegengesetzte Kräfte P' und Q' anbringen. Ist dabei das Viereck ein Parallelogramm, so kann man nach §. 228. *d.* die Angriffspunkte des Paares P, P' in AB und DC um gleichviel nach einerlei Seite hin und ebenso die Angriffspunkte von Q und Q' in CB und DA fortrücken lassen, ohne dass das Gleichgewicht verloren geht. Hierdurch erhält man die Bedingungen, unter denen am Parallelogramm $ABCD$ ein Paar von Kräften, deren Angriffspunkte in zwei gegenüberliegende Seiten fallen, mit einem andern Paare, welches auf die beiden andern Seiten wirkt, im Gleichgewichte ist.

Treffen die Richtungen von P und Q den Punkt D, so sind ihnen P' und Q' direct entgegengesetzt, und es ergiebt sich damit das Resultat:

An einem Parallelogramm $ABCD$, welches constante Seitenlängen und veränderliche Winkel hat, sind zwei auf die gegenüberliegenden Seiten AB, CD wirkende einander gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte P, P' mit zwei auf die beiden andern Seiten BC, DA wirkenden Kräften Q, Q' im Gleichgewichte, wenn letztere ebenfalls einander gleich und direct entgegengesetzt sind, und wenn überdies

$$P.BC \sin P^\wedge BC + Q.AB \sin Q^\wedge AB = 0 \text{ ist.}$$

§. 231.

Aufgabe. Drei Punkte A, B, C (Fig. 62.) sind in drei unbeweglichen Geraden l, m, n einer Ebene beweglich. In derselben Ebene wirken auf drei Gerade a, b, c, welche resp. den Punkten B und C, C und A, A und B zu begegnen genöthigt sind, resp. die Kräfte P, Q, R. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen diesen Kräften zu finden.

Auflösung. Das vorgelegte System besteht aus 6 beweglichen Theilen, 3 Punkten A, B, C und 3 Linien a, b, c, von deren jedem besonders das Gleichgewicht zu berücksichtigen ist.

Der Punkt A, den wir zuerst betrachten wollen, ist in der Linie l beweglich, und an ihm sind die Linien b, c beweglich; von diesen 3 Linien erleidet er 3 normale Pressungen, welche sich das Gleichgewicht halten müssen. Sind daher p, b_1, c_1 diese 3 Pressungen, so hat man, weil ihre Richtungen dieselben Winkel mit einander machen, als die auf ihnen normalen l, b, c:

$$p : b_1 : c_1 = \sin bc : \sin cl : \sin lb,$$

oder, wenn L, M, N die gegenseitigen Durchschnitte von l, m, n sind:

$$b_1 : c_1 = \sin BAN : \sin MAC.$$

Auf gleiche Weise ist, wenn c_2 und a_2 die von den Linien c und a auf den Punkt B normal ausgeübten Pressungen bezeichnen:

$$c_2 : a_2 = \sin CBL : \sin NBA,$$

und, wenn a_3, b_3 die normalen Pressungen auf C von a und b sind:

$$a_3 : b_3 = \sin ACM : \sin LCB.$$

Gehen wir jetzt zu dem Gleichgewichte der drei

Linien a, b, c über. — Die Linie a, welche nur der Bedingung unterworfen ist, dass sie durch die zwei Punkte B und C geht, erleidet von diesen Punkten die normalen Pressungen $-a_2$ und $-a_3$, und diese müssen mit der an der Linie angebrachten Kraft P im Gleichgewichte seyn. Die Richtung dieser Kraft muss daher gleichfalls die Linie rechtwinklig schneiden, und wenn F der Angriffspunkt von P ist, so muss sich verhalten:

$$P : a_2 : a_3 = BC : FC : BF.$$

Aus gleichen Gründen sind auch Q und R auf b und c normal, und man hat, wenn G und H die Angriffspunkte dieser Kräfte bezeichnen:

$$Q : b_3 : b_1 = CA : GA : CG,$$
$$R : c_1 : c_2 = AB : HB : AH.$$

Eliminirt man aus diesen 3 einfachen und 3 Doppel-Proportionen die 6 Pressungen, so erhält man zuerst die Verhältnisse zwischen den 3 Kräften:

$$\text{I.} \begin{cases} Q : R = CA \,.\, HB \sin BAN : AB \,.\, CG \sin MAC, \\ R : P = AB \,.\, FC \sin CBL : BC \,.\, AH \sin NBA, \\ P : Q = BC \,.\, GA \sin ACM : CA \,.\, BF \sin LCB; \end{cases}$$

und wenn man diese Verhältnisse zusammensetzt:

$$\text{II.} \quad \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} \cdot \frac{AH}{HB} = \frac{MA}{AN} \cdot \frac{NB}{BL} \cdot \frac{LC}{CM},$$

weil $\sin BAN : \sin NBA = BN : AN$, etc.

Sind daher das Dreieck LMN der drei unbeweglichen Geraden, das eingeschriebene Dreieck ABC der drei beweglichen Geraden und zwei von den drei Angriffspunkten F, G, H gegeben, so finden sich mittelst der Gleichung II. der dritte, und mittelst der Proportionen I. die Verhältnisse zwischen den Kräften

selbst; die Richtungen derselben aber müssen auf den Seiten des Dreiecks ABC normal seyn.

§. 232.

Zusätze. *a.* Das Gleichgewicht des Systems dauert noch fort, wenn zwei der drei Kräfte, etwa Q und R, entfernt und statt derselben zwei unbewegliche Curven β und γ in der Ebene angebracht werden, welche die Geraden b und c zu berühren genöthigt sind und gegenwärtig in G und H berühren.

Ist demnach die Beweglichkeit dreier Geraden a, b, c in einer Ebene dergestalt beschränkt, dass ihre gegenseitigen Durchschnitte A, B, C in drei unbeweglichen Geraden MN, NL, LM der Ebene liegen müssen, und dass zwei derselben, b und c, zwei unbewegliche Curven β und γ der Ebene zu berühren genöthigt sind, so wird eine auf die dritte Gerade a in der Ebene wirkende Kraft nur dann keine Bewegung hervorbringen, wenn ihre Richtung auf a normal ist, und ihr Angriffspunkt F in a und die zwei Berührungspunkte G und H in b und c so liegen, dass der Gleichung II. Genüge geschieht.

b. Werden die Geraden b und c, die Curven β und γ berührend, bewegt, während ihr Durchschnitt A in MN fortgeht, so bewegt sich die durch die Schneidepunkte C und B der Tangenten b und c mit LM und NL gelegte Gerade a als Tangente einer dritten Curve α. Die Beweglichkeit von a wird aber offenbar nicht gemindert, wenn wir diese dritte Curve wirklich hinzufügen und annehmen, dass a sie zu berühren gezwungen ist; und eben so wenig wird die Beweglichkeit von a vermehrt, wenn wir hierauf a ausser Verbindung mit b und c bringen. Es muss da-

her auch jetzt noch bei einer normal auf a in F wirkenden Kraft Ruhe herrschen. Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn F der Berührungspunkt von a mit α ist. Wir schliessen hieraus mit Rücksicht auf die Gleichung II.:

A. Bewegen sich drei Punkte A, B, C willkührlich in den Seiten eines unbeweglichen Dreiecks LMN, so ist immer das Product aus den drei Verhältnissen, nach denen die Seiten des Dreiecks von den Punkten getheilt werden, gleich dem Product aus den drei Verhältnissen, nach denen die Seiten des von den Punkten gebildeten Dreiecks ABC in den Berührungspunkten F, G, H mit den drei Curven getheilt werden, welche diese Seiten bei der gedachten Bewegung als Tangenten erzeugen.

c. Treffen l, m, n, also auch L, M, N, in einem Punkte zusammen, sind also A, B, C in drei Geraden beweglich, welche sich in einem Punkte schneiden, so wird jedes der drei Verhältnisse $MA:AN$, $NB:BL$, $LC:CM = -1$, also auch zufolge II.:

$$(BF:FC)\,(CG:GA)\,(AH:HB) = -1.$$

F, G, H liegen dann folglich in einer Geraden *), und man hat den Satz:

Bewegen sich drei Punkte A, B, C auf beliebige Weise in drei Geraden, die sich in einem Punkte schneiden, so liegen in jedem Augenblicke die drei Punkte F, G, H, in denen die drei Geraden BC, CA, AB die von ihnen als Tangenten erzeugten Curven berühren, in einer Geraden.

d. Der Satz A. kann noch allgemeiner gefasst wer-

*) Vergl. des Verf. Baryc. Calcul §. 198. 2).

den, wenn man die Punkte A, B, C sich in beliebigen unbeweglichen Curven λ, μ, ν bewegen lässt, von denen MN, NL, LM die Tangenten in A, B, C,... sind; er lautet dann also:

B. Hat man ein in einer Ebene sich stetig veränderndes Dreieck ABC, so ist in jedem Augenblicke das Product aus den Verhältnissen, nach denen die Seiten des Dreiecks in den Berührungspunkten F, G, H mit den Curven α, β, γ getheilt werden, welche die Seiten als Tangenten erzeugen, gleich dem Product aus den Verhältnissen, nach denen bei einem zweiten Dreiecke LMN, dessen Seiten die Tangenten der von den Ecken A, B, C, des erstern Dreiecks beschriebenen Curven λ, μ, ν sind, diese Seiten von den Ecken A, B, C, als den Berührungspunkten, getheilt werden.

Dieser allgemeinere Satz lässt sich wiederum specialisiren, indem man an die Stelle der Curven α, β, γ, an denen sich BC, CA, AB als Tangenten fortbewegen, blosse Punkte setzt, und er lautet dann folgendermassen:

C. Wenn sich in einer Ebene die Seiten eines darin enthaltenen Dreiecks ABC um unbewegliche Punkte F, G, H drehen, so ist stets das Product aus den Verhältnissen, nach welchen die Seiten von diesen Punkten getheilt werden, gleich dem Producte aus den Verhältnissen, nach welchen von den Ecken desselben Dreiecks ABC die Seiten eines zweiten Dreiecks LMN getheilt werden, dessen Seiten die von den Ecken des erstern beschriebenen Curven λ, μ, ν berühren.

Wie man sogleich sieht, entspricht dieser Satz dem obigen A. nach dem bekannten Gesetze der Dualität.

Denn so wie dort die Punkte A, B, C sich in unbeweglichen Geraden l, m, n bewegten, und die diese Punkte verbindenden Geraden a, b, c durch ihre Bewegung Curven erzeugten, welche von a, b, c selbst in F, G, H berührt wurden: so drehen sich hier die Geraden a, b, c um unbewegliche Punkte F, G, H, und von den gegenseitigen Durchschnitten A, B, C der Geraden werden Curven beschrieben, die in den Punkten A, B, C selbst die Geraden l, m, n zu Tangenten haben. Den Punkten A, B, C, F, G, H einerseits entsprechen daher die Geraden a, b, c, l, m, n andererseits, und umgekehrt.

Nach dem Gesetze der Dualität müssen daher auch, zufolge des Satzes in c., wenn in C. die drei Punkte F, G, H in einer Geraden liegen, die drei Tangenten der von A, B, C beschriebenen Curven sich in einem Punkte schneiden *).

Uebrigens gelten, wie sich leicht zeigen lässt, die über ein Dreieck aufgestellten Sätze A., B., C. wörtlich auch von jedem mehrseitigen Vielecke.

§. 233.

Der Satz C. des vor. §. lässt sich, eben so wie der

*) Eine leicht hieraus fliessende Folgerung ist, dass, wenn die zwei von A und B beschriebenen Linien gerade sind, auch die dritte von C beschriebene es ist und durch den Durchschnitt der beiden ersten geht. Dies führt zu dem bekannten Satze:

Wenn von zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ die drei Durchschnitte der gleichnamigen Seiten $BC \cdot B'C'$, etc. in einer Geraden liegen, so schneiden sich die drei Geraden AA', etc., welche die gleichnamigen Ecken verbinden, in einem Punkte.

Eben so folgt aus c., dass, wenn die Geraden a und b sich um feste Punkte F und G drehen, auch die dritte c sich um einen festen Punkt H dreht, welcher mit F und G in einer Geraden liegt, und man erhält damit den umgekehrten Satz des vorigen.

Satz A., auch unmittelbar aus statischen Betrachtungen herleiten. Zu dem Ende hat man nur in §. 231. die auf die Geraden a, b, c in F, G, H wirkenden Kräfte als Pressungen auf diese Geraden von unbeweglichen Punkten F, G, H, durch welche sie gehen müssen, und die Pressungen auf die Punkte A, B, C von den unbeweglichen Geraden l, m, n, in denen sie beweglich gesetzt wurden, als an diesen Punkten angebrachte Kräfte zu betrachten; diess führt zu folgender

Aufgabe: Um drei unbewegliche Punkte F, G, H und in der Ebene derselben sind drei gerade Linien a, b, c beweglich. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen drei Kräften p, q, r zu finden, welche in der Ebene auf die gegenseitigen Durchschnitte A, B, C der drei Geraden, d. i. auf Punkte wirken, welche in b und c, c und a, a und b zugleich beweglich sind.

Die Lösung dieser Aufgabe geht ohne Weiteres aus den Formeln in §. 231. hervor. Sind nämlich AS, BT, CU die noch unbekannte Richtung von p, q, r, und sind l, m, n auf dieselben winkelrecht gezogene Gerade, so hat man, wie dort:

$$p : b_1 : c_1 = \sin bc : \sin cl : \sin lb$$
$$= \sin CAB : \cos BAS : \cos SAC,$$
u. eben so: $$q : c_2 : a_2 = \sin ABC : \cos CBT : \cos TBA,$$
$$r : a_3 : b_3 = \sin BCA : \cos ACU : \cos UCB.$$

Eliminirt man hieraus die Pressungen mittelst der schon oben erhaltenen Proportionen:

$$a_2 : a_3 = FC : BF, \quad b_3 : b_1 = GA : CG,$$
$$c_1 : c_2 = HB : AH,$$

so kommt:

$$\text{I}^{\circ}. \begin{cases} q:r = CA.FC.\cos ACU : AB.BF.\cos TBA, \\ r:p = AB.GA.\cos BAS : BC.CG.\cos UCB, \\ p:q = BC.HB.\cos CBT : CA.AH.\cos SAC, \end{cases}$$

und hieraus die Gleichung:

$$\text{II}^{\circ}. \frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GA}\cdot\frac{AH}{HB} = \frac{\cos CBT}{\cos UCB}\cdot\frac{\cos ACU}{\cos SAC}\cdot\frac{\cos BAS}{\cos TBA},$$

in welcher nur noch die Richtungen der Kräfte vorkommen, und wonach, wenn die Richtungen zweier Kräfte gegeben sind, die Richtung der dritten gefunden werden kann. Die Verhältnisse zwischen den Kräften selbst ergeben sich alsdann aus den Proportionen I°.

Werden nun diese Bedingungen erfüllt, und ist daher das System im Gleichgewichte, so kann man auch die Punkte A und B, statt auf sie die Kräfte p und q wirken zu lassen, in unbeweglichen Curven, welche auf den Richtungen von p und q normal sind und daher l und m zu Tangenten haben, beweglich annehmen. Hiermit wird der dritte Punkt C in einer dritten Curve beweglich, welche auf der Richtung von r normal seyn und folglich n zur Tangente haben muss, indem sonst der Punkt C nicht in Ruhe bleiben könnte. Die hierbei allein noch zu berücksichtigende Gleichung II° ist aber, wie man sich leicht überzeugt, mit der obigen Gleichung II. identisch, und giebt damit für den obigen Satz C. den Beweis ab.

Bedingungen des Gleichgewichts bei sich ähnlich bleibenden Figuren.

§. 234.

Aufgabe. Zwei Gerade a und c (Fig. 63.) sind in B unter einem Winkel von unveränderlicher Grösse

fest mit einander verbunden; desgleichen zwei andere Gerade a' und b unter einem unveränderlichen Winkel in C. Die Schenkel a und a' sollen zusammen fallen und an einander verschiebbar seyn, und die Winkel selbst sollen in einer und derselben Ebene liegen. In dieser Ebene wirken auf die Spitzen der Winkel B und C und auf den gegenseitigen Durchschnitt ihrer Schenkel b und c, oder vielmehr auf einen in b und c zugleich beweglichen Punkt A, resp. die Kräfte q, r, p. Welches sind die Bedingungen des Gleichgewichts?

Auflösung. Das gegebene System besteht aus drei beweglichen Stücken: aus dem Winkel ac, dem Winkel $a'b$ und dem Punkte A, und wir haben nun das Gleichgewicht jedes dieser drei Stücke besonders zu untersuchen.

1) Die auf die Spitze B des Winkels ac wirkende Kraft muss mit der Pressung c_1, welche sein Schenkel c rechtwinklig von dem in ihm beweglichen Punkte A erleidet, und mit der Pressung auf seinen andern Schenkel a von dem an a verschiebbaren a' im Gleichgewichte seyn. Da diese Verschiebbarkeit sich dadurch bewerkstelligen lässt, dass man in a' zwei beliebig bestimmte Punkte D und E annimmt, welchen a zu begegnen genöthigt ist, so ist die Pressung von a' auf a zwei auf a in D und E rechtwinkligen Pressungen gleich zu achten, die sich aber, als zwei parallele Kräfte, zu einer einzigen f zusammensetzen lassen, welche den Schenkel a gleichfalls rechtwinklig, etwa in F, trifft. Die Richtung von q und die auf c in A und auf a in F errichteten Normalen müssen sich daher in einem Punkte G schneiden. Nimmt man folglich die Richtung BG von q als willkührlich gegeben an und errichtet in A auf BA eine Normale AG,

welche BG in G schneide, so wird der Fusspunkt einer von G auf BC gefällten Normale der gedachte Punkt F seyn. Auch kann man damit, wenn noch die Intensität von q gegeben ist, die Intensitäten von o_1 und f finden.

2) Beim Winkel $a'b$ ist die Kraft r an der Spitze C desselben im Gleichgewichte mit der normalen Pressung b_1 des Punktes A auf seinen Schenkel b und den von a herrührenden normalen Pressungen auf die Punkte D und E seines Schenkels a', oder der damit gleichwirkenden einzigen Pressung $-f$ auf a' im Punkte F. Die Richtungen von r, b_1 und $-f$ müssen sich daher in einem Punkte begegnen. Trifft demnach eine auf AC in A errichtete Normale die bereits gezogene FG in H, so ist CH die Richtung von r, und es lassen sich mittelst der schon bekannten Intensität von $-f$ die Intensitäten von r und b_1 bestimmen.

3) Am Punkte A muss die auf ihn unmittelbar wirkende Kraft p den Pressungen $-b_1$ und $-o_1$, welche er von den Linien b und c erleidet, das Gleichgewicht halten und kann somit ohne Weiteres gefunden werden, noch leichter aber dadurch, dass p auch im Gleichgewichte mit q und r ist, und dass folglich die Richtung von p, nächst A, noch den Schneidepunkt I der Richtungen BG und CH von q und r treffen muss. Die Intensität von p ergiebt sich alsdann aus denen von q und r.

Nach diesem Allen sind die gesuchten Bedingungen des Gleichgewichts folgende: 1) Die auf A, B, C wirkenden Kräfte müssen eben so, als wären diese Punkte fest mit einander verbunden, im Gleichgewichte seyn, und sich daher in einem Punkte I schneiden. 2) Die resp. Durchschnitte G und H der auf AB

und AC in A errichteten Perpendikel mit den Richtungen BI und CI müssen in einer auf BC normalen Geraden liegen.

§. 235.

Das von den zwei Winkeln ac und $a'b$ gebildete Dreieck ABC ist dergestalt beweglich, dass es erstens, ohne seine Seitenlängen zu verändern, jede beliebige Lage in der Ebene einnehmen kann. Zweitens kann eine Seite desselben, welche man will, durch Verschiebung der Schenkel a und a' an einander jede beliebige Länge erhalten; allein das Dreieck bleibt sich dabei immer ähnlich, weil die zwei unveränderlichen Winkel ac und $a'b$ zugleich Winkel desselben sind. Diesem gemäss lässt sich die vorige Aufgabe auch folgendermassen abfassen:

Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen drei in einer Ebene auf drei Punkte wirkenden Kräften zu finden, wenn die Punkte in der Ebene dergestalt beweglich sind, dass das von ihnen gebildete Dreieck sich immer ähnlich bleibt.

Man kann hiernach erwarten, dass der Ort des Punktes I, in welchem sich die auf A, B, C wirkenden Kräfte schneiden, von der gegenseitigen Lage der A, B, C auf symmetrische Weise abhängen werde; und dies bestätigt sich auch, wenn man die Curve untersucht, in welcher alle nach der im vor. §. erhaltenen Bedingung zu construirenden Oerter von I begriffen sind. Diese Bedingung besteht darin, dass GH, HA, AG resp. auf BC, CA, AB normal sind; es sind folglich die Dreiecke ABC und AGH einander ähnlich, und es verhält sich $AB : AG = AC : AH$. Mithin sind auch die rechtwinkligen Dreiecke BAG und CAH

einander ähnlich, folglich die Winkel *ABI* und *ACI* einander gleich, folglich liegen die drei Angriffspunkte *A*, *B*, *C* der Kräfte und der gegenseitige Durchschnitt *I* ihrer Richtungen in einem Kreise.

Man wird sich hierbei der Untersuchungen erinnern, welche im 7. Kapitel des ersten Theiles über den Mittelpunkt nicht paralleler Kräfte in einer Ebene angestellt worden sind. Von den zwei Kräften *p* und *q*, welche auf die Punkte *A* und *B* wirken und sich in *I* schneiden, ist hiernach der Mittelpunkt derjenige Punkt *C* in der Richtung *CI* ihrer Resultante $-r$, in welchem dieselbe von dem durch *A*, *B*, *I* zu ziehenden Kreise getroffen wird (§. 115.), und dieser Punkt *C* besitzt die Eigenschaft, dass, wenn das Dreieck *ABC* ohne Aenderung seiner Grösse und Gestalt beliebig in seiner Ebene verschoben wird, und die Kräfte *p*, *q* auf *A*, *B* nach Richtungen, die mit ihren anfänglichen parallel sind, zu wirken fortfahren, auch ihre Resultante, der Grösse und Richtung nach sich nicht ändernd, stets durch *C* geht (§. 114.). Wird folglich an *C* eine dieser Resultante gleiche und entgegengesetzte Kraft *r* angebracht, so werden die Kräfte *p*, *q*, *r*, (deren Intensitäten sich nach §. 120. wie die Seiten *BC*, *CA*, *AB* des Dreiecks verhalten müssen,) bei jeder Verrückung des Dreiecks in seiner Ebene im Gleichgewichte verharren. Hieraus ergeben sich aber in Verbindung mit dem Vorigen die merkwürdigen Resultate:

Sind drei Punkte in einer Ebene dergestalt beweglich, dass das von ihnen gebildete Dreieck sich immer ähnlich bleibt, und halten sich drei auf sie wirkende Kräfte das Gleichgewicht, so herrscht auch noch Gleichgewicht bei jeder andern Lage, welche

man den Punkten zufolge ihrer Beweglichkeit geben kann, wenn nur die Kräfte ihren anfänglichen Richtungen parallel bleiben; und umgekehrt:

Sind drei Kräfte, welche auf drei fest mit einander verbundene Punkte in einer Ebene wirken, im Gleichgewichte, und dauert dasselbe noch fort, wenn das System der drei Punkte in seiner Ebene beliebig verschoben wird, die Kräfte aber parallel mit ihren anfänglichen Richtungen fortwirken, so wird das Gleichgewicht auch nicht unterbrochen, wenn man den Punkten eine solche gegenseitige Beweglichkeit noch beilegt, bei welcher das von ihnen gebildete Dreieck sich immer ähnlich bleibt.

§. 236.

Keine Schwierigkeit hat es, auch an vier, fünf, oder mehrern Punkten, die in einer Ebene liegen und darin dergestalt beweglich sind, dass die durch sie bestimmte Figur sich immer ähnlich bleibt, sich das Gleichgewicht haltende Kräfte anzubringen. Denn seyen A, B, C, D vier solche Punkte, an denen sich die Kräfte p, q, r, s das Gleichgewicht halten sollen; zwei derselben, etwa p und q, seyen gegeben. Durch A, B und den Durchschnitt N von p mit q beschreibe man einen Kreis, welcher die Resultante x von p und q ausser in N noch im Punkte X schneide. Denkt man sich nun X als neuen Punkt des Systems, also mit $A, .. D$ in solcher Verbindung, dass er gegen sie immer in ähnlicher Lage bleibt, und bringt man an X die sich aufhebenden Kräfte x und $-x$ an, so sind p, q, $-x$ an A, B, X im Gleichgewichte; mithin müssen es auch x, r, s an X, C, D seyn, und man kann mittelst der bekannten Kraft x und eines durch X,

C, D zu beschreibenden Kreises die Intensitäten und Richtungen von r, s finden.

Sind ferner A, B, C, D, E fünf Punkte in einer Ebene, die in ähnlicher Lage gegen einander verharren sollen; p, q, r, s, t die auf sie wirkenden Kräfte, und von ihnen p, q, r gegeben, so suche man wie vorhin den Mittelpunkt X der Kräfte p, q in ihrer Resultante x und denke sich diesen mit den Kräften x und $-x$ als einen zum Systeme gleichfalls gehörigen Punkt. Da nun p, q, $-x$ an A, B, X im Gleichgewichte sind, so müssen es auch x, r, s, t an X, C, D, E seyn, wenn Gleichgewicht zwischen p, q, r, s, t herrschen soll; und die Aufgabe ist somit auf die vorige, welche ein System von vier Punkten betraf, zurückgeführt.

Ueberhaupt also, — denn auf analoge Weise kann man von 5 Punkten auf 6, u. s. w. schliessen —: Wenn n Punkte in einer Ebene so beweglich sind, dass sie stets in ähnlicher Lage gegen einander bleiben, und wenn auf $n-2$ derselben beliebig gegebene Kräfte in der Ebene wirken, so kann man immer an den zwei übrigen Punkten zwei Kräfte hinzufügen, welche mit erstern Gleichgewicht hervorbringen.

Zugleich aber erhellet, dass dieselbe Construction, womit sich diese zwei Kräfte finden lassen, auch dann anzuwenden ist und die nämlichen zwei Kräfte giebt, die, wenn die n Punkte in unveränderlicher Lage gegen einander genommen werden, am $(n-1)$sten und $n$ten Punkte angebracht werden müssen, damit Gleichgewicht entstehe und bei beliebiger Verrückung des Systems in der Ebene auch fortdaure, sobald nur sämmtliche n Kräfte ihren anfänglichen Richtungen parallel bleiben. Die Bedingungen zwischen den n Kräften sind

in dem einen Falle dieselben, wie in dem andern, wir ziehen hieraus die Folgerung, *dass die zwei zu Ende des vor. §. nicht bloss für drei, son- für jede beliebige Anzahl von Punkten in einer e Gültigkeit haben.*

ch bemerke nur noch, dass eben so, wie in der abe des §. 234. ein sich ähnlich bleibendes Drei- gebildet wurde, auch ein System von jeder grös- Anzahl in ähnlicher Lage bleibender Punkte leicht ruirt werden kann. Denn man hat nur in einer e ein System von Geraden, welche sich unter un- derlichen Winkeln in einem Punkte treffen, mit andern Systeme von derselben Beschaffenheit stalt zu verbinden, dass eine Gerade des einen ms mit einer Geraden des andern zusammenfällt längs derselben verschiebbar ist. Alle Durch- ttspunkte zweier Geraden des einen und andern ms, so wie jeder der zwei Punkte selbst, in wel- alle Geraden eines und desselben Systems zu- nenlaufen, werden dann stets in ähnlicher Lage a einander verharren.

Viertes Kapitel.

on den Bedingungen der Unbeweglichkeit.

§. 237.

Unter den Gleichungen, welche die Bedingungen Gleichgewichts zwischen Kräften ausdrücken, die in System mit einander verbundener, an sich frei be-

weglicher Körper wirken, kommen zu Folge des Grundsatzes I. in §. 190. immer auch diejenigen Gleichungen mit vor, welche erfüllt seyn müssen, sobald die gegenseitige Lage der Körper unveränderlich angenommen wird, und somit sämmtliche Körper einen einzigen frei beweglichen ausmachen. Dieser letztern Gleichungen giebt es im allgemeinsten Falle sechs. Weiss man folglich irgendwoher, dass das Gleichgewicht eines Systems mit einander verbundener, an sich frei beweglicher Körper, auf welche beliebige Kräfte wirken, immer schon durch sechs Gleichungen bedingt ist, so können diese keine andern, als die sechs zum Gleichgewichte eines einzigen Körpers erforderlichen Gleichungen seyn. Aber nicht allein dieses, sondern es kann auch keine gegenseitige Beweglichkeit zwischen den Körpern statt finden.

Um sich von der Richtigkeit des letztern Schlusses vollkommen zu überzeugen, bringe man an den mit einander verbundenen Körpern beliebige Kräfte an. Alsdann ist es immer möglich, an einem der Körper, er heisse a, oder an Punkten, die mit ihm fest verbunden sind, zwei solche Kräfte hinzuzufügen, welche in Vereinigung mit den erstern Kräften den 6 Gleichungen Genüge leisten. Sind nun die 6 Gleichungen die einzigen zum Gleichgewichte erforderlichen Bedingungen, und ist folglich durch Hinzufügung der zwei Kräfte Gleichgewicht zu Wege gebracht worden, so muss dieses auch noch bestehen, wenn man a unbeweglich setzt. Wenn aber, sobald einer der Körper unbeweglich angenommen wird, keine auf die übrigen Körper wirkenden Kräfte Bewegung zu erzeugen vermögen, so findet keine gegenseitige Beweglichkeit statt.

§. 238.

Ob Körper, die auf gegebene Weise mit einander verbunden sind, ihre Lage gegen einander noch ändern können oder nicht, die Beantwortung dieser Frage kann nicht allein in der Mechanik, sondern auch bei rein geometrischen Untersuchungen oft von Interesse seyn. Die Statik bietet uns hierzu ein sehr einfaches Mittel in dem Satze des vor. §. dar, dass es bei gegenseitiger Unbeweglichkeit nicht mehr als 6 Gleichungen des Gleichgewichts giebt. Ich glaube daher, indem ich dieses Princip etwas weiter zu entwickeln suche, nichts Ueberflüssiges zu thun, um so weniger, als der Geometrie wohl nicht immer gleich einfache Mittel zur Aburtheilung über die Beweglichkeit zu Gebote stehen dürften.

Um bei einem Systeme von n mit einander verbundenen Körpern die Bedingungen des Gleichgewichts zu finden, hat man nach §. 215 für jeden einzelnen Körper des Systems die Gleichungen des Gleichgewichts, im Allgemeinen sechs, zwischen den unmittelbar auf ihn wirkenden Kräften und den Pressungen, denen er ausgesetzt ist, zu entwickeln und aus diesen $6n$ Gleichungen die Intensitäten der Pressungen, so wie auch ihre Richtungen, wenn diese unbekannt sind, zu eliminiren. Die somit hervorgehenden Gleichungen, $6n-p$ zum wenigsten, wenn p die Zahl der von den Pressungen herrührenden unbekannten Grössen ist, sind die gesuchten Bedingungen des Gleichgewichts. Man setze daher die Zahl dieser Bedingungsgleichungen $= 6n-p+q$, wo q eine positive ganze Zahl oder auch null ist.

Ist nun jeder Körper des Systems an sich frei beweglich, so giebt es nicht weniger als 6 Bedingungsgleichungen, und wenn es ihrer nur 6 sind, also wenn

$6n - p + q = 6$, d. i. $6(n-1) + q = p$ ist, so können nach vor. §. die Körper ihre Lage gegen einander nicht ändern. Ist dagegen $6(n-1) + q > p$, so herrscht in dem Systeme gegenseitige Beweglichkeit.

Hieraus schliessen wir endlich, dass, wenn $p < 6(n-1)$, stets gegenseitige Beweglichkeit statt findet, und dass, wenn gegenseitige Unbeweglichkeit eintreten soll, $p =$ oder $> 6(n-1)$ seyn muss, dass aber diese Bedingung, wenn auch stets nothwendig, doch nicht immer hinreichend für die Unbeweglichkeit ist.

§. 239.

Berühren sich je zwei Körper des Systems mit ihren Flächen, oder berührt eine Kante oder Ecke eines Körpers die Fläche eines andern, oder kreuzen sich die Kanten zweier Körper unter einem beliebigen endlichen Winkel, so ist die Richtung der daselbst statt findenden Pressungen schon im Voraus bekannt, und p ist der Anzahl der Pressungen selbst, d. i. der Begegnungspunkte, gleich. Begegnen sich daher n Körper auf die eine oder die andere der eben gedachten Arten in weniger als $6(n-1)$ Punkten, so kann immer die gegenseitige Lage derselben verändert werden, ohne dass eine der Begegnungen wegfällt. Nicht mehr ist aber diess jederzeit möglich, wenn sie sich in $6(n-1)$ oder noch mehrern Punkten treffen.

So haben wir bereits oben (§. 193.) bemerkt, dass zwei Körper, die sich in 5 oder weniger Punkten berühren, immer an einander verschoben werden können, im Allgemeinen aber nicht mehr bei 6 oder mehrern Berührungen. Auf gleiche Art findet Verschiebbarkeit im Allgemeinen nicht mehr statt, wenn 6 Ecken des einen Körpers die Fläche des andern treffen, oder wenn

eine Curve in 6 Punkten eine Fläche berührt, oder wenn zwei Curven (von doppelter Krümmung) in 6 Punkten über einander weggehen. — Letztere 6 Punkte können auch paarweise zusammenfallen, so dass die beiden Curven in drei Punkten einander einfach berühren. Auch kann man die 6 Punkte zu dreien zusammenfallen lassen, so dass sich die Curven in zwei Punkten berühren und in jedem derselben eine gemeinschaftliche Krümmungsebene haben, u. s. w. In keinem dieser Fälle lassen sich die Curven an einander verschieben, ohne dass die Arten der Berührung aufgehoben würden.

Sind 6 Punkte des einen Körpers mit 6 Punkten des andern nicht unmittelbar, sondern durch 6 Gerade von unveränderlicher Länge verbunden, so kann gleichfalls die gegenseitige Lage der beiden Körper im Allgemeinen nicht mehr geändert werden. Denn da beim Gleichgewichte des Ganzen jede der 6 Geraden an ihren zwei Endpunkten zwei einander entgegengesetzte aber gleiche Pressungen ausübt, so sind hier nur die Intensitäten der 6 Pressungen unbekannt, und, diese aus den zweimal 6 Gleichungen für das Gleichgewicht der beiden Körper eliminirt, bleiben 6 Bedingungsgleichungen zurück.

§. 240.

Dass die gegenseitige Lage zweier Körper im Allgemeinen nicht mehr veränderlich ist, wenn in der Oberfläche O des einen sechs Ecken, oder überhaupt sechs bestimmte Punkte A, B, C, D, E, F des andern k enthalten seyn sollen, dies lässt sich auch durch folgende Betrachtung einsehen.

1) Sollen nur A, B und C sich in der Fläche O befinden, so kann der Ort von A beliebig in O genommen werden; B ist dann irgend ein Punkt in dem

6n — [illegible] am A mit AB, als Halb-
nach [illegible] Kugelfläche, und C der Durch-
nicht [illegible] zwei Kugelflächen, welche um
in [illegible] Halbmessern AC und BC erzeugt
[illegible] der Körper k um A so gedreht,
[illegible] bleiben, so beschreibt der vierte
[illegible] bestimmte Curve, und wenn D in die-
[illegible] gekommen ist, wo sie von O ge-
[illegible] liegen nunmehr
[illegible] A, B, C, D zugleich in O. Für
[illegible] Ort des A in O giebt es daher im
[illegible] oder auch etliche Lagen des Kör-
[illegible] A auch B, C, D sich in O befin-
[illegible] wenn irgend eine Curve a in O gegeben
[illegible] A sich bewegen soll, die Punkte B, C,
[illegible] zugleich gegebenen und in O liegenden
[illegible] bewegen können. Hat nun bei dieser Be-
[illegible] Körpers k der fünfte Punkt E desselben
[illegible] erreicht, so sind jetzt
[illegible] Punkte $A, \ldots E$ zugleich in O. Für jede
[illegible] O giebt es demnach einen in ihr liegen-
[illegible] (oder etliche, oder auch keine) von der
[illegible], dass wenn A mit ihm coincidirt, auch
[illegible] gebracht werden können. Heissen ähnli-
[illegible] A_1, A_2, … diese Oerter von A für irgend
[illegible] a_1, a_2, … in O. Denkt man sich nun
[illegible] als unmittelbar neben einander liegende
[illegible] als solche, in denen O von unmittelbar
[illegible] folgenden Parallelebenen geschnitten wird,
[illegible] die zunächst auf einander fol-
[illegible] Punkte einer bestimmten Curve a. Sollen folg-
[illegible] Punkte $A, \ldots E$ zugleich in O seyn und bei
[illegible] von k darin bleiben, so muss A in der

urve a liegen und darin fortgehen, wobei auch die rigen Punkte $B, .. E$ nicht mehr beliebige, sondern, ien so wie a, von der Gestalt der Fläche O und der genseitigen Lage der 5 Punkte $A, ... E$ abhängige urven beschreiben werden.

4) Ist endlich bei dieser bestimmten Bewegung von der sechste Punkt F in O getreten, so hört mit der dingung, dass auch F in O bleiben soll, die Beweglichkeit von k völlig auf.

§. 241.

Aus den voranstehenden Betrachtungen ergeben ich leicht einige Fälle, in denen einem Systeme von niger als 6 Punkten, die in unabänderlichen Entfernungen von einander sind, im Allgemeinen keine Begung mehr gestattet ist. Diese Fälle sind:

1) bei einem Systeme von drei Punkten, wenn ein unkt unbeweglich, ein zweiter in einer gegebenen Linie und der dritte in einer gegebenen Fläche beweglich ist, oder

2) wenn die drei Punkte in gegebenen Linien beweglich sind (vergl. §. 203.);

3) bei einem Systeme von vier Punkten, wenn ein unkt unbeweglich und die drei andern in gegebenen lächen beweglich sind, oder

4) wenn zwei Punkte in gegebenen Linien und die wei übrigen in gegebenen Flächen beweglich sind;

5) bei einem Systeme von fünf Punkten, wenn ein unkt in einer gegebenen Linie und die vier andern in gegebenen Flächen beweglich sind.

Die zwei ersten dieser Fälle erhellen aus Nr. 1.; er dritte und vierte aus Nr. 2. und der fünfte aus r. 3. des vor. §.

Durchschnitte von O und der um A mit AB, als Halbmesser, beschriebenen Kugelfläche, und C der Durchschnitt von O und den zwei Kugelflächen, welche um A und B mit den Halbmessern AC und BC erzeugt werden. Wird alsdann der Körper k um A so gedreht, dass B und C in O bleiben, so beschreibt der vierte Punkt D eine bestimmte Curve, und wenn D in dieser Curve bis dahin gekommen ist, wo sie von O geschnitten wird, so liegen nunmehr

2) die 4 Punkte A, B, C, D zugleich in O. Für jeden beliebigen Ort des A in O giebt es daher im Allgemeinen eine oder auch etliche Lagen des Körpers k, wo nächst A auch B, C, D sich in O befinden, so dass, wenn irgend eine Curve a in O gegeben ist, in welcher A sich bewegen soll, die Punkte B, C, D in mit a zugleich gegebenen und in O liegenden Curven sich bewegen können. Hat nun bei dieser Bewegung des Körpers k der fünfte Punkt E desselben die Fläche O erreicht, so sind jetzt

3) die 5 Punkte $A,\ldots E$ zugleich in O. Für jede Curve a_0 in O giebt es demnach einen in ihr liegenden Punkt A_0 (oder etliche, oder auch keine) von der Beschaffenheit, dass wenn A mit ihm coincidirt, auch $B,..E$ in O gebracht werden können. Heissen ähnlicher Weise A_1, A_2,... diese Oerter von A für irgend andere Curven a_1, a_2,... in O. Denkt man sich nun a_0, a_1, a_2,... als unmittelbar neben einander liegende Curven, etwa als solche, in denen O von unmittelbar auf einander folgenden Parallelebenen geschnitten wird, so sind A_0, A_1, A_2,... die zunächst auf einander folgenden Punkte einer bestimmten Curve a. Sollen folglich die 5 Punkte $A,\ldots E$ zugleich in O seyn und bei der Bewegung von k darin bleiben, so muss A in der

urve a liegen und darin fortgehen, wobei auch die rigen Punkte $B,..E$ nicht mehr beliebige, sondern, ten so wie a, von der Gestalt der Fläche O und der gegenseitigen Lage der 5 Punkte $A,...E$ abhängige urven beschreiben werden.

4) Ist endlich bei dieser bestimmten Bewegung von der sechste Punkt F in O getreten, so hört mit der edingung, dass auch F in O bleiben soll, die Bewegchkeit von k völlig auf.

§. 241.

Aus den voranstehenden Betrachtungen ergeben ch leicht einige Fälle, in denen einem Systeme von eniger als 6 Punkten, die in unabänderlichen Entfernungen von einander sind, im Allgemeinen keine Bewegung mehr gestattet ist. Diese Fälle sind:

1) bei einem Systeme von drei Punkten, wenn ein unkt unbeweglich, ein zweiter in einer gegebenen Lie und der dritte in einer gegebenen Fläche beweglich ist, oder

2) wenn die drei Punkte in gegebenen Linien beweglich sind (vergl. §. 203.);

3) bei einem Systeme von vier Punkten, wenn ein unkt unbeweglich und die drei andern in gegebenen lächen beweglich sind, oder

4) wenn zwei Punkte in gegebenen Linien und die rei übrigen in gegebenen Flächen beweglich sind;

5) bei einem Systeme von fünf Punkten, wenn ein unkt in einer gegebenen Linie und die vier andern in gegebenen Flächen beweglich sind.

Die zwei ersten dieser Fälle erhellen aus Nr. 1.; er dritte und vierte aus Nr. 2. und der fünfte aus r. 3. des vor. §.

§. 242.

Wenn bei einem Systeme von n durch Berührung mit einander verbundenen Körpern, deren jeder an sich frei beweglich ist, die gegenseitige Lage der Körper unveränderlich seyn soll, so müssen sie sich in wenigstens 6 $(n-1)$ Punkten berühren (§. 238.). Ob diese Unveränderlichkeit der Lage in irgend einem bestimmten Falle wirklich statt findet, oder nicht, lässt sich im Allgemeinen wohl nicht anders beurtheilen, als dass man die $6(n-1)$ in den Berührungen vorkommenden Pressungen aus den $6n$ ursprünglichen Gleichungen des Gleichgewichts eliminirt. Denn je nachdem dann 6 oder mehr als 6 Gleichungen übrig bleiben, ist die gegenseitige Lage constant oder veränderlich. Indessen giebt es, so lange nicht dergleichen Umstände, wie in §. 193. bemerkt worden, eintreten, mehrere specielle Fälle, in denen man über die gegenseitige Beweglichkeit ohne vorangegangene Rechnung entscheiden kann. So müssen sich z. B. 3 Körper in wenigstens $6 \times 2 = 12$ Punkten berühren, wenn sie nicht mehr an einander sollen verschoben werden können. Auch findet in der That gegenseitige Unbeweglichkeit, im Allgemeinen wenigstens, statt, wenn der erste dem zweiten in 6, und der zweite dem dritten ebenfalls in 6 Punkten begegnet; nicht mehr aber, wenn der erste den zweiten in 7, und der zweite den dritten in 5 Punkten berührt. Denn hängen dann auch der erste und zweite Körper fest zusammen, so ist doch der dritte an dem zweiten verschiebbar.

Ueberhaupt leuchtet ein, dass, je gleichmässiger die 6 $(n-1)$ oder mehrern Berührungen unter den n Körpern vertheilt sind, um so mehr zu erwarten steht, dass die Körper unbeweglich gegen einander seyn wer-

den. Im Allgemeinen wird man sich daher immer von der gegenseitigen Unbeweglichkeit versichert halten können, wenn von den n sich in $6(n-1)$ oder mehreren Punkten berührenden Körpern je zwei sich in gleichviel Punkten berühren.

Wenn von n Körpern je zwei sich in m Punkten berühren, so ist die Anzahl aller Berührungen $= \frac{1}{2}mn(n-1)$. Ist folglich bei diesem Systeme $\frac{1}{2}mn(n-1) =$ oder $> 6(n-1)$ und daher $mn =$ oder > 12, so ist die gegenseitige Lage der Körper unveränderlich.

Wenn demnach

von 12 *oder mehr Körpern je zwei sich in* 1 *Punkte*
oder von 6 — — — — — — — 2 *Punkten*
— — 4 — — — — — — — 3 —
— — 3 — — — — — — — 4 —
— — 2 — — — — — — — 6 —

berühren, so kann, ohne dass Berührungen wegfallen, die gegenseitige Lage der Körper nicht geändert werden.

§. 243.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich bei einem Systeme von Curven, die in einer Ebene beweglich sind, anstellen. Das Gleichgewicht zwischen Kräften, die in einer Ebene auf ein darin bewegliches System fest mit einander verbundener Punkte, oder auf eine in der Ebene bewegliche Curve von unveränderlicher Gestalt wirken, erfordert die Erfüllung von drei Gleichungen. Bei einem Systeme von n Curven, die sich in p Punkten berühren, hat man daher $3n$ Gleichungen, worin p unbekannte Pressungen vorkommen. Aus diesen $3n$ Gleichungen lassen sich zuerst 3 Gleichungen folgern, welche dem Gleichgewichte aller n Curven, als wären sie fest mit einander verbunden, angehören; und wenn

sich ausser diesen drei noch andere von Pressungen freie Gleichungen finden lassen, so sind dies die Bedingungen des Gleichgewichts wegen statt findender gegenseitiger Beweglichkeit der Curven in der Ebene. Eine solche Beweglichkeit giebt es daher immer, wenn $3n - p > 3$, also $p < 3(n-1)$, d. h. wenn sich die n Curven in weniger als $3(n-1)$ Punkten berühren. Bei $3(n-1)$ und mehrern Berührungen dagegen, und wenn je zwei Curven sich in gleichviel Punkten berühren, herrscht im Allgemeinen, nach ähnlichen Schlüssen, wie im vor. §., gegenseitige Unbeweglichkeit. Berühren sich daher je zwei Curven in m Punkten, und ist folglich die Zahl aller Berührungen $= \frac{1}{2} mn(n-1)$, so giebt es keine gegenseitige Beweglichkeit mehr, wenn $\frac{1}{2} mn (n-1) =$ oder $> 3(n-1)$, d. i. wenn $mn =$ oder > 6, und wir ziehen daraus den Schluss:

Wenn in einer Ebene von 6 Curven je zwei sich in 1 Punkte, oder von 3 Curven je zwei sich in 2 Punkten, oder wenn 2 Curven sich in 3 Punkten berühren, so können weder die 6, noch die 3, noch die 2 Curven in der Ebene dergestalt an einander verschoben werden, dass sie einander in eben so viel Punkten, als anfänglich, zu berühren fortfahren, — jedoch mit Ausnahme besonderer Formen der Curven; ist z. B. die eine von zwei Curven ein Kreis, so bleibt gegenseitige Beweglichkeit, in wieviel Punkten sie auch von der andern berührt werden mag.

---

§. 244.

Die Art und Weise über die gegenseitige Beweglichkeit mit einander verbundener Körper zu entscheiden, kann insbesondere dazu nützen, um bei irgend

r geometrischen Figur zu bestimmen, wie viel Stücke selben gegeben seyn müssen, um daraus alle übrifinden zu können. Denn nur dann, wenn von einer unabhängige Stücke der Figur in so grosser Anl vorhanden sind, dass daraus die übrigen sich timmen lassen, haben sie auch eine bestimmte, unveränderliche Lage gegen einander. Reicht r die Anzahl der gegebenen Stücke zur Bestimig der übrigen noch nicht hin, so bleibt auch gegenseitige Lage, zum Theil wenigstens, unbeimt und veränderlich. Finden sich daher, indem Kräfte auf die Figur wirken lässt und die gegeen Stücke von unveränderlicher Grösse und Form immt, nur 6 Bedingungen des Gleichgewichts oder nachdem die Figur einen Raum von 3 Dimensionen immt, oder auf eine Ebene beschränkt ist, so sind e Stücke zur Ermittelung der übrigen hinreid.

§. 245.

Um dieses durch einige Beispiele zu erläutern, en wir zuerst von einem Polyeder sämmtliche Kanihren Längen nach gegeben seyn lassen. Die An derselben heisse k, die der Ecken e und die der chen f. Wir denken uns demnach das Polyeder ein System von an sich frei beweglichen e Punkten, inien und f Ebenen, die dergestalt mit einander unden sind, dass jeder der e Punkte in gewissen oder mehrern der f Ebenen zugleich zu bleiben öthigt ist, jede der k Linien aber von gegebener ge ist und gewisse zwei der e Punkte, die sich an n Enden befinden, in unabänderlicher Entfernung einander hält. Lassen wir nun auf die e Ecken fte wirken, und ist das Ganze im Gleichgewichte,

so muss auch jede Ecke, jede Kante und jede Fläche besonders im Gleichgewichte seyn.

Auf jede Ecke wirken die unmittelbar an ihr angebrachten Kräfte, die Pressungen von den angränzenden Kanten und die Pressungen von den Flächen, in denen sie zugleich sich befindet. Das Gleichgewicht an jeder Ecke zwischen allen diesen Kräften wird durch 3 Gleichungen ausgedrückt, also an allen e Ecken durch $3e$ Gleichungen.

Das Gleichgewicht an jeder Kante ist schon dargestellt, wenn wir die zwei Pressungen, die jede Kante auf die zwei Ecken an ihren Enden ausübt, einander gleich und entgegengesetzt annehmen.

Das Gleichgewicht an jeder Fläche endlich zwischen den Pressungen, welche sie von den in ihr befindlichen Ecken erleidet, führt zu 3 Gleichungen (§. 73.), da diese Pressungen auf der Fläche normal und daher unter sich parallel sind, also das Gleichgewicht an allen f Flächen zu $3f$ Gleichungen.

Man hat demnach in Allem $3e + 3f$ Gleichungen, aus denen aber noch die darin vorkommenden Pressungen eliminirt werden müssen. Diese sind erstlich die k Pressungen der eben so viel Kanten und zweitens $2k$ Pressungen der Flächen. Denn jede Fläche erleidet so viele Pressungen, als sie Ecken, also auch so viele, als sie Kanten hat, und da jede Kante zweien Flächen gemeinschaftlich zugehört, so ist die Anzahl aller Pressungen der Flächen gleich der doppelten Anzahl der Kanten. In Allem sind es daher $3k$ Pressungen. Die Zahl der nach Elimination der Pressungen übrig bleibenden Gleichungen ist folglich $= 3e + 3f - 3k = 6$, da nach Euler's Theorem $e+f-k=2$ ist. Die Theile des Systems haben mithin keine ge-

nseitige Beweglichkeit, und wir schliessen hieraus n übrigens schon bekannten Satz:

Sind sämmtliche Kanten eines Polyeders gegeben, so lassen sich damit alle übrigen Stücke desselben bestimmen.

Doch finden von jener Unbeweglichkeit und mithin ich von diesem Satze in speciellen Fällen Ausnahmen att. Eine solche macht z. B. ein Prisma; denn sind oss die Kanten desselben unveränderlich, so kann, ann die eine Grundfläche unbeweglich angenommen rd, die Richtung der einander parallelen Seitenkann jede beliebige seyn.

§. 246.

Ein Polyeder ist ein System zusammenhängender ener Vielecke im Raume. Projiciren wir jetzt ein rgleichen System auf eine Ebene, oder, was dasibe ist, construiren wir in einer Ebene ein System n Vielecken, bei welchem, eben so wie beim Polyer, jede Kante zwei Vielecken immer zugleich angeirt, so ist wiederum $e+f-k=2$. Dabei wird ber nur in besondern Fällen durch die Kanten allein les Uebrige bestimmt seyn. Denn nimmt man die anten wiederum von unveränderlicher Länge an, und llen Kräfte, die man in der Ebene an den Ecken ibringt, im Gleichgewichte seyn, so hat man für jede cke zwischen den unmittelbar auf sie wirkenden Kräfn und den Pressungen von den angränzenden Kanten vei Gleichungen, also zusammen $2e$ Gleichungen, wenn an die zwei Pressungen, die jede Kante auf die zwei ı sie stossenden Ecken ausübt, schon von vorn herein nander gleich und entgegengesetzt annimmt. Aus iesen $2e$ Gleichungen die k Pressungen der Kanten

eliminirt, müssen daher 3 Gleichungen übrig bleiben, und es muss folglich $2e - k = 3$ seyn, wenn die Theile der Figur keine gegenseitige Beweglichkeit haben sollen. Diess fliesst auch schon daraus, dass bei einem Systeme von e Punkten in einer Ebene $2e - 3$ von einander unabhängige Stücke zur Bestimmung der übrigen hinreichen *).

Weil $e + f - k = 2$, so kann man die Bedingung $2e - k = 3$ auch ausdrücken durch: $e = f + 1$ und $2f = k + 1$, d. h.

Sollen bei einem Systeme zusammenhängender Vielecke in einer Ebene sämmtliche Kanten von einander unabhängig, von ihnen aber alle übrigen Stücke abhängig seyn, so muss die Eckenzahl um Eins grösser als die Flächenzahl seyn; oder, was auf dasselbe hinauskommt: die Kantenzahl muss um Eins geringer als die doppelte Flächenzahl seyn.

Besteht das System in der Ebene aus γ Dreiecken, δ Vierecken, ε Fünfecken, u. s. w., so ist offenbar

$$f = \gamma + \delta + \varepsilon + \ldots \text{ und } 2k = 3\gamma + 4\delta + 5\varepsilon + \ldots$$

Hiermit verwandelt sich die Gleichung $2f = k + 1$ in

*) Bei einem Systeme von e Punkten im Raume sind $3e - 6$ Stücke höchstens von einander unabhängig, und von ihnen alle übrigen abhängig. Ob aber gleich, wie eben gezeigt worden, die Kantenlängen eines Polyeders zur Bestimmung aller übrigen hinreichen, so ist dennoch nicht im Allgemeinen $3e - 6 = k$. Denn hat ein Polyeder nicht bloss Dreiecke, sondern auch Vierecke, Fünfecke etc. zu Grenzflächen, so sind noch die Bedingungen, dass die 4te Ecke jedes Vierecks, die 4te und 5te jedes Fünfecks, etc. in der Ebene der 1sten, 2ten und 3ten Ecke liegen, als gegebene Stücke zu betrachten. Die Gleichung $3e - 6 = k$, also auch die damit identischen $2k = 3f$ und $2e = f + 4$, gelten daher nur für Polyeder, welche bloss von Dreiecken begrünzt sind.

$$\gamma = 2 + \varepsilon + 2\zeta + 3\eta + \ldots,$$

rauo wir schliessen, dass bei derselben Forderung ter den Flächen des Systems wenigstens zwei Dreie seyn müssen, und zwar dann nicht mehr als zwei eiecke, wenn die übrigen Flächen bloss Vierecke d. Dies ist z. B. der Fall, wenn man aus 6 Punk- A, B,... F 2 Dreiecke ABC, DEF und 3 Vierte $ABDE$, $BCEF$, $CAFD$ construirt, wobei $e=6$, $=9$ und $f=5$ ist. Zwei Dreiecke ABC und DEF einer Ebene, deren Ecken durch drei Gerade AD, E und CF von unveränderlicher Länge verbunden d, haben demnach eine unveränderliche Lage gegen ander; oder allgemeiner noch ausgedrückt:

Werden von zwei in einer Ebene enthaltenen und in beweglichen Figuren 3 Punkte der einen mit 3 nkten der andern durch 3 Gerade von unveränderlie Länge verbunden, so ist damit ihre gegenseitige weglichkeit aufgehoben. — Bei zwei Figuren im ume geschah dieses erst durch 6 Verbindungslinien , 230. zu Ende.).

Ein anderes Beispiel dieser Art ist folgendes: Von i Vierecken $ABCD$ und $FGHI$ (Fig. 64.) in einer ene verbinde man die Ecken des einen mit denen andern durch die 4 Geraden AF, BG, CH, DI. rdurch entstehen 4 neue Vierecke AG, BH, CI, F, welche in Verbindung mit den 2 anfänglichen recken und unter der Voraussetzung, dass sämmte 12 Linien von unveränderlicher Länge sind, ein h veränderliches System bilden, weil Dreiecke feh. Fügt man aber noch eine Diagonale eines dieser recke, als eine Linie von constanter Länge, hinzu, B. die Diagonale AC des Vierecks $ABCD$, so verndelt sich dieses Viereck in zwei Dreiecke und es

tritt Unveränderlichkeit ein. Da hierdurch schon das System der 4 Punkte A, B, C, D unveränderlich wird, so werden, wenn wir dieses System unbeweglich setzen, auch die 4 Punkte F, G, H, I unbeweglich, welches folgenden Satz giebt:

Hat man in einer Ebene ein bewegliches Viereck mit constanten Seitenlängen und verbindet die vier Ecken desselben durch vier Linien von gleichfalls constanten Längen mit vier unbeweglichen Punkten der Ebene, so wird damit das Viereck selbst unbeweglich.

Dass dieser Satz auch vom Dreiecke gilt, fliesst unmittelbar aus dem Vorhergehenden. Er gilt aber, wie man sich leicht überzeugen kann, auch von jedem mehrseitigen Vielecke.

§. 247.

Wenn, wie wir in dem letzten Beispiele setzten, das zu untersuchende System unbewegliche Punkte mit enthält, und zwar wenigstens zwei oder drei solcher Punkte, nachdem das System in einer Ebene begriffen ist, oder nicht, so wird die gegenseitige Unbeweglichkeit seiner Theile zu einer absoluten Unbeweglichkeit.

Bei der statischen Untersuchung der absoluten Unbeweglichkeit fallen die 6 Gleichungen für das Gleichgewicht des Systems, als eines festen Ganzen, weg, und man hat bloss darauf zu achten, ob sich aus den Gleichungen für das Gleichgewicht der nicht unmittelbar unbeweglich angenommenen Theile die Pressungen eliminiren lassen, oder nicht. Denn im ersten Falle, wo man, nach Elimination der Pressungen, die beim Gleichgewichte zu erfüllenden Bedingungen erhält, muss noch Beweglichkeit statt finden; im zweiten Falle da-

n, also wenn die Anzahl der Pressungen eben so oder grösser, als die der Gleichungen, ist, ist das m unbeweglich.

Berühren sich z. B. zwei Körper in mehrern Punk- und ist der eine Körper unbeweglich, so hat man die 6 Gleichungen des Gleichgewichts für den n, und so viel Pressungen, als es Berührungen . Bei 6 und mehrern Berührungen wird folglich der andere Körper unbeweglich.

Oder hat man, wie im vor. §., in einer Ebene ein ek *ABC*... mit constanten Seitenlängen und derlichen Winkeln, und verbindet jede Ecke durch Linie von constanter Länge mit einem unbewegli- Punkte der Ebene, *A* mit *A'*, *B* mit *B'*, u. s. w., ebt es, wenn an jeder Ecke eine Kraft angebracht , für das Gleichgewicht jeder Ecke, z. B. der Ecke wei Gleichungen zwischen der angebrachten Kraft den Pressungen auf *B* von den Linien *AB*, *BC* *BB'*. Damit ferner die Seiten *AB*, *BC*,... im hgewichte sind, müsssn die zwei Pressungen, wel- jede auf die an ihren Enden befindlichen Ecken bt, einander gleich und entgegengesetzt seyn, also Richtungen der Seiten selbst haben, und wegen Gleichgewichts der Linien *AA'*, *BB'*,... müssen Pressungen gleicher Weise in sie selbst fallen. giebt daher, wenn das Vieleck *n* Ecken hat, in n 2*n* Gleichungen, und eben so viel unbekannte sungen, nämlich die der *n* Seiten und die der *n* n von den Ecken nach den unbeweglichen Punk- Das System ist mithin unbeweglich.

Hätte es noch Beweglichkeit, so würden sich *A*, . in Kreisen um *A'* *B'*,... als Mittelpunkte bewe- Ein Vieleck in einer Ebene, dessen Seiten von

constanter Länge sind, ist daher unbeweglich, wenn seine Ecken in unbeweglichen Kreisen beweglich sind, also auch überhaupt in unbeweglichen Linien der Ebene, da die Elemente der Linien, in denen sich die Ecken gerade befinden, immer als Elemente von Kreisen angesehen werden können. Auch folgt dieses unmittelbar schon daraus, dass, wenn Punkte in gegebenen Linien so fortgerückt werden, dass der erste von dem zweiten, der zweite von dem dritten, etc. und der vorletzte von dem letzten in ungeänderten Abstande bleibt, im Allgemeinen nicht auch der Abstand des letzten von dem ersten constant bleiben wird.

Zusatz. Aus demselben Grunde fliesst auch die Unbeweglichkeit eines ebenen Vielecks von gerader Seitenzahl, dessen Seiten von unveränderlicher Länge sind, und von denen die eine um die andere, also etwa die 1ste, 3te, 5te etc., einen unbeweglichen Punkt enthält, so dass jede dieser Seiten um ihren unbeweglichen Punkt in der Ebene gedreht, jedoch nicht auch an ihm verschoben werden kann. Denn auch hier sind die Ecken des Vielecks in unbeweglichen Linien beweglich, in Kreisen, welche jene unbeweglichen Punkte zu Mittelpunkten haben.

§. 248.

Auf ähnliche Weise erhellet die Unbeweglichkeit eines Vielecks $ABC\ldots$, dessen Ecken in unbeweglichen Geraden $l, m, n, \ldots$ einer Ebene beweglich, und dessen Seiten von veränderlicher Länge und durch unbewegliche Punkte $F, G, \ldots$ der Ebene zu gehen genöthigt sind. Diese Unbeweglichkeit findet auch noch statt, wenn die Figur nicht mehr eben ist, sondern die Geraden $l, m, n, \ldots$ irgend ein Vieleck im Raume bil-

, und jeder der Punkte F, G, H,... in die Ebene zwei auf einander folgenden Seiten des Vielecks ... fällt, in welchen die Ecken der durch den Punkt enden Seite des Vielecks ABC... sich bewegen nen.

Als ein besonderer Fall hiervon ist der zu betrachten, wenn die Geraden l, m, n,... einander parallel . Man denke sich dieselben vertical und nehme grösserer Einfachheit willen die Punkte F, G, H,... in einer derselben horizontalen Ebene μ enthalten an, so dass in den Durchschnitten von μ mit den verticalen Ebenen lm, mn, etc. liegen, mit welchen Durchschnitten mag auch die Seiten des Vielecks ABC... coincin mögen. Um für diesen Fall die Unbeweglichkeit Figur statisch zu beweisen, lasse man auf die Seiden des Vielecks Kräfte nach gleichfalls verticalen Richtungen wirken. Alsdann giebt es für jede Seite Vielecks 2 Gleichungen, also überhaupt $2n$ Gleichungen, und eben so gross ist die Zahl der verticalen Pressungen, nämlich n Pressungen, welche die Seiten den unbeweglichen Punkten erleiden, und eben so Pressungen an den n Ecken. Mithin ist die Figur beweglich.

§. 249.

In den vorigen zwei §§. liessen wir die Ecken eines Vielecks in unbeweglichen Geraden beweglich seyn, nahmen überdies an, das einemal, dass die Seiten Vielecks von constanter Länge seyen, das andemal, dass die Seiten durch unbewegliche Punkte ge. Beseitigen wir jetzt die unbeweglichen Geraden lassen letztere zwei Bedingungen zugleich statt en, so dass die Seiten eines Vielecks von unver-

änderlicher Länge sind und unbeweglichen Punkten zu begegnen genöthigt sind, so ist das Vieleck, wenn es auf eine Ebene beschränkt ist, gleichfalls unbeweglich.

Denn für das Gleichgewicht jeder Seite hat man zwischen den Kräften, die man an ihr in der Ebene des Vielecks anbringt, und den drei Pressungen, welche sie dann von dem unbeweglichen Punkte, dem sie begegnen muss, und an ihren beiden Enden von den anstossenden Seiten erleidet, drei Gleichungen. Erstere, von dem unbeweglichen Punkte bewirkte Pressung ist auf der Seite normal und nur ihrer Intensität nach unbekannt. Letztere zwei Pressungen kennt man aber auch ihrer Richtung nach nicht. Die Gesammtzahl aller der von letztern Pressungen herrührenden Stücke ist daher $= 2n$, die Zahl der von erstern Pressungen herrührenden $= n$, die Zahl der Gleichungen aber $= 3n$. Mithin herrscht Unbeweglichkeit.

Ist ferner das Vieleck nicht in einer Ebene enthalten, so ist die Anzahl der unbekannten Stücke (Intensitäten und Winkel) wegen der Pressungen der unbeweglichen Punkte auf die an ihnen beweglichen Seiten ersichtlich $= 2n$, und die wegen der Pressungen an den Ecken, $= 3n$; die Anzahl der Gleichungen aber ist $= 5n$, nämlich 5 für jede Seite, da, wie sich leicht zeigen lässt, das Gleichgewicht zwischen Kräften im Raume, welche auf Punkte wirken, die in einer Geraden liegen, schon durch 5 Gleichungen bedingt ist. Das Vieleck ist daher auch in diesem Falle unbeweglich.

Fünftes Kapitel.

Von der unendlich kleinen Beweglichkeit.

§. 250.

Wenn bei einem Systeme mit einander verbunde-
ar Körper, oder überhaupt bei einer Figur, deren
heile einzeln gegen einander beweglich sind, aus den
leichungen des Gleichgewichts, welche für die ein-
lnen Theile zwischen an ihnen angebrachten Kräften
id den dadurch entstehenden Pressungen sich aufstel-
n lassen, entweder gar keine von Pressungen freie
leichungen, oder nur diejenigen sechs oder drei Glei-
ungen gefunden werden können, welche für das
leichgewicht der Figur, als eines fest zusammenhän-
nden Ganzen, erforderlich sind, so ist, wie wir im
rigen Kapitel gesehen haben, die Figur entweder
nz unbeweglich, oder doch die gegenseitige Lage
rer Theile unveränderlich. Nichtsdestoweniger lassen
ch in jedem solchen Falle specielle Bedingungen für
s Verhalten der Theile zu einander ausfindig machen,
ter denen die Unbeweglichkeit aufhört, Bedingungen,
e nicht selten zu noch andern sehr bemerkenswerthen
genschaften der Figur hinführen und daher einer
ihern Erörterung nicht unwerth seyn möchten.

Um die Untersuchung nicht zu weit auszudehnen,
llen wir bloss den Fall in Betracht ziehen, wo die
nzahl der von den Pressungen herrührenden unbekann-
n Grössen eben so gross als die Zahl der Gleichun-
n ist, und wo daher, damit Unbeweglichkeit herrsche,
le der Unbekannten aus den Gleichungen sich be-

stimmen, keine aber von den Unbekannten ganz freie Gleichung sich finden lässt.

Ist eine Pressung nicht bloss ihrer Intensität, sondern auch ihrer Richtung nach unbekannt, so treten einer oder zwei Winkel, wodurch die Richtung in einer gegebenen Ebene oder im Raume überhaupt bestimmt wird, als Unbekannte mit auf. Um aber grösserer Gleichförmigkeit willen es bloss mit unbekannten Intensitäten zu thun zu haben, wollen wir statt einer Pressung, deren unbekannte Richtung in eine gegebene Ebene fällt, zwei setzen, die, an demselben Punkte, wie die erstere, angebracht, nach zwei beliebig angenommenen Richtungen in der Ebene wirken; und wenn auch keine Ebene gegeben ist, in welcher die Richtung begriffen ist, so wollen wir uns die Pressung nach drei willkührlichen Richtungen zerlegt denken und daher statt der einen Pressung drei setzen, welche nach gegebenen Richtungen thätig sind. Die Anzahl der Unbekannten bleibt dabei gehörigermassen unverändert.

Seyen demnach, wie wir uns dieser Bemerkung zufolge ausdrücken können, eben so viel Pressungen als Gleichungen vorhanden, und aus den Gleichungen alle Pressungen bis auf eine eliminirbar. Man führe eine solche Elimination aus. Da alle anfänglichen Gleichungen hinsichtlich der Pressungen sowohl, als der unmittelbaren Kräfte, von linearer Form sind, so wird es auch die durch die Elimination erhaltene seyn. Man setze in dieser Gleichung den Coefficient der einzigen darin noch vorkommenden Pressung, welcher mit s bezeichnet werde, $= 0$, so bleiben in der Gleichung nur noch Kräfte, aber keine Pressungen zurück. Da also jetzt die an der Figur angebrachten Kräfte nur

dann sich das Gleichgewicht halten, wenn dieser zwischen ihnen allein bestehenden Gleichung Genüge geschieht, so schliessen wir:

Unter der Voraussetzung, dass zwischen den Theilen der Figur die Gleichung $\alpha = 0$ statt findet, ist die ohnedies unbewegliche Figur beweglich.

§. 251.

Um die Natur der Bedingungsgleichung $\alpha = 0$ für die Beweglichkeit und der dann nöthig werdenden Gleichung für das Gleichgewicht näher zu untersuchen, wollen wir annehmen, dass in dem Systeme nur drei Pressungen p, q, r vorkommen. Die eben so vielen Gleichungen für das Gleichgewicht der einzelnen Theile der Figur seyen:

$$(1)\quad \begin{cases} S + ap + bq + cr = 0, \\ S' + a'p + b'q + c'r = 0, \\ S'' + a''p + b''q + c''r = 0, \end{cases}$$

wo S, S', S'' lineare Functionen der auf die Figur wirkenden Kräfte vorstellen, und a, b,... c'' gegebene Coefficienten der Pressungen sind. Um nun zwei der drei Pressungen, etwa q und r, zu eliminiren, multiplicire man die 3 Gleichungen resp. mit f, g, h, addire sie und setze zur Bestimmung der Verhältnisse zwischen f, g, h:

$$(2)\ bf + b'g + b''h = 0, \quad (3)\ cf + c'g + c''h = 0.$$

Hiermit wird

$$(4)\quad Sf + S'g + S''h + (af + a'g + a''h)p = 0,$$

worin nur noch die einzige Pressung p enthalten ist. Setzen wir den Coefficienten derselben $= 0$, so kömmt:

$$(5)\quad af + a'g + a''h = 0,$$

und damit $(6)\quad Sf + S'g + S''h = 0,$

von welchen zwei Gleichungen die erstere die Bedingung $\alpha = 0$ für die Beweglichkeit der Figur, die letztere aber die Bedingung für das bei dieser Beweglichkeit statt finden sollende Gleichgewicht ist. Die Gleichung $\alpha = 0$ kann daher auch als das Resultat der Elimination von f, g, h aus (2), (3) und (5) angesehen werden, und man muss folglich immer zu der nämlichen Gleichung $\alpha = 0$ gelangen, welches auch nach Elimination der übrigen Pressungen die noch rückständige ist. Dasselbe folgt auch noch daraus, dass man $\alpha = 0$ als die Bedingung betrachten kann, unter welcher sich p, q, r aus den 3 Gleichungen (1) zugleich eliminiren lassen, so wie auch daraus, dass, weil α bloss aus den Coefficienten a, b, ... c'' von p, q, r zusammengesetzt ist, die Gleichung $\alpha = 0$ aus den 3 Gleichungen (1) hervorgehen muss, wenn man in diesen die Kräfte, und damit S, S', S'' null setzt und hierauf die 2 Verhältnisse zwischen den 3 Pressungen aus (1) eliminirt.

Man bemerke noch, dass durch Zerlegung von (4) in die zwei Gleichungen (5) und (6), also durch Annahme von $\alpha = 0$, der aus (4) zu folgernde Werth von p, und damit auch die Werthe der beiden andern Pressungen q und r unbestimmt werden.

Dieselben Schlüsse lassen sich nun offenbar auch auf jede grössere Anzahl anfänglicher Gleichungen, worin eben so viele Pressungen vorkommen, anwenden, und man gelangt demnach immer zu derselben Bedingungsgleichung für die Beweglichkeit und der dann zu erfüllenden Bedingungsgleichung für's Gleichgewicht, welches auch die Pressung ist, bis auf welche alle übrigen Pressungen aus den Gleichungen eliminirt werden. Beabsichtigt man bloss die Bedingung für die Beweglichkeit zu finden, so kann man die Rechnung

dadurch noch vereinfachen, dass man die Glieder, welche nicht Pressungen, sondern Kräfte enthalten, gleich anfangs weglässt und aus den somit abgekürzten Gleichungen die Pressungen, oder vielmehr die Verhältnisse zwischen denselben, eliminirt. Die Pressungen selbst endlich werden beim Gleichgewichte der beweglich gewordenen Figur jederzeit unbestimmt.

§. 252.

Die Unbeweglichkeit, welche statt findet, wenn die Anzahl der in den Gleichungen vorkommenden Pressungen eben so gross, als die der Gleichungen selbst ist, ist von der Beschaffenheit, dass sie sogleich aufhört, wenn nur eines der unveränderlich gesetzten Stücke der Figur, es heisse a, veränderlich angenommen wird. Denkt man sich nun die Figur in die Bewegung versetzt, die durch die Annahme, dass a veränderlich seyn soll, möglich wird, so werden dabei je zwei zunächst auf einander folgende Werthe von a im Allgemeinen von einander verschieden, und nur dann einander gleich seyn, wenn a ein Maximum oder Minimum geworden ist. Es wird folglich, wenn man das a, sobald es diesen seinen grössten oder kleinsten Werth erreicht hat, wieder unveränderlich werden lässt, der Figur eine, obwohl unendlich kleine, Beweglichkeit übrig bleiben.

Die Bedingungsgleichung $a = 0$, bei welcher die ohnedies unbewegliche Figur Beweglichkeit erhalten soll, kann daher, im Allgemeinen wenigstens, keine andere Relation zwischen den Theilen der Figur ausdrücken, als diejenige, bei welcher a seinen grössten oder kleinsten Werth hat, und wobei die Figur noch um ein unendlich Geringes verrückbar ist.

Die bei $\alpha = 0$ statt findende Beweglichkeit der Figur ist daher im Allgemeinen unendlich klein, und jedes von den unveränderlich gesetzten Stücken der Figur, wie α, hat, wenn man es veränderlich werden, die übrigen aber constant bleiben lässt, bei der Relation $\alpha = 0$ seinen grössten oder kleinsten Werth. Man sieht hieraus, wie die Statik nicht selten mit Vortheil angewendet werden kann, um geometrische Aufgaben über Maxima und Minima zu lösen. Vorausgesetzt, dass je zwei veränderliche Stücke der Figur von einander abhängig sind, dass also, wenn irgend ein Werth eines der veränderlichen gegeben ist, damit die gleichzeitigen Werthe der übrigen veränderlichen bestimmt sind, nehme man das veränderliche Stück, dessen grösster oder kleinster Werth gesucht wird, als unveränderlich an und lasse, nachdem die Figur in einer Ebene oder im Raume überhaupt enthalten ist, zwei oder drei Punkte derselben unbeweglich werden, wenn andere nicht schon unbewegliche Punkte in der angegebenen oder in noch grösserer Zahl darin vorkommen. Durch Ersteres wird die Figur selbst unveränderlich und durch Letzteres unbeweglich. Man bringe nun an der Figur Kräfte an, entwickele die Gleichungen für das Gleichgewicht ihrer einzelnen Theile und eliminire alle darin enthaltenen Pressungen, die immer mit den Gleichungen selbst in gleicher Zahl vorhanden seyn werden, bis auf eine, so wird der Coefficient dieser noch übrigen Pressung, $= 0$ gesetzt, die Bedingung anzeigen, unter welcher jenes veränderliche Stück ein Maximum oder Minimum wird.

Nachfolgende Beispiele werden, diese Betrachtungen zu erläutern, dienen.

§. 253.

Aufgabe. Die Bedingung zu finden, unter wel-
er ein Winkel C eines ebenen Vierecks $ABCD$
'ig. 65.), dessen Seiten unveränderliche Längen ha-
n, seinen grössten oder kleinsten Werth erreicht.

Auflösung. Man nehme den Winkel C unver-
derlich an, lasse die Ecken C und D, und somit
ch B, unbeweglich werden, und untersuche nun, in
lchem speciellen Falle der Ecke A Beweglichkeit
ch übrig bleibt. Zu dem Ende bringe man an A
ne Kraft P nach einer beliebigen Richtung AE in
r Ebene des Vierecks an. Die Pressungen, welche
bei die Ecke A von den Seiten AB und AD er-
hrt, seyen b und d, so hat man für's Gleichgewicht
n A die zwei Gleichungen:

$$P \sin DAE = b \sin BAD, \quad P \sin EAB = d \sin BAD.$$

Aus diesen können aber die Pressungen b und d
r dann herausgehen, wenn $\sin BAD = 0$ ist, also
nn A mit B und D in gerader Linie liegt. Dies
demnach die Bedingung, unter welcher die Ecke
noch eine, wiewohl unendlich kleine, Beweglichkeit
t, und wo folglich der Winkel C, wenn er verän-
rlich betrachtet wird, seinen grössten oder kleinsten
erth erreicht. Man gewahrt übrigens leicht, dass C
 Maximum oder Minimum ist, nachdem A in der
raden BD zwischen oder ausserhalb B und D
gt.

Man bemerke noch, dass, wenn $\sin BAD = 0$,
le der zwei Gleichungen des Gleichgewichts sich auf
$= 0$ reducirt; d. h. ist ein beweglicher Punkt A mit
ei unbeweglichen B und D durch Linien von con-
nten Längen verbunden, und liegt A mit B und D

in einer Geraden, so reicht schon die kleinste Kraft hin, um A aus der Geraden BD, jedoch nur um ein unendlich Weniges, zu entfernen.

§. 254.

Aufgabe. Die Ecken eines ebenen Vierecks $ABCD$, (Fig. 66.), welches Seiten von constanter Länge, aber veränderliche Winkel hat, sind in unbeweglichen in der Ebene des Vierecks enthaltenen Linien f, g, h, i beweglich, und daher das Viereck selbst im Allgemeinen unbeweglich (§. 247.). Die Bedingung, unter welcher es beweglich wird, und damit die Bedingung zu finden, unter welcher, wenn eine Seite des Vierecks veränderlich gesetzt wird, dieselbe ihren grössten oder kleinsten Werth erhält.

Auflösung. Man bringe an den Ecken A, B, C, D resp. die Kräfte P, Q, R, S an und nenne p, q, r, s ihre Richtungen. Die Pressungen, welche dann die Ecken von den Linien, in denen sie beweglich sind, erleiden, und welche daher auf den Linien selbst normal sind, heissen T, U, V, W, ihre Richtungen t, u, v, w. Werden nun die Seiten AB, BC, CD, DA des Vierecks resp. mit a, b, c, d bezeichnet, so hat man (§. 220. zu Ende) für das Gleichgewicht zwischen den auf die Ecken wirkenden Kräften und Pressungen die Gleichungen:

$$\frac{P \sin dp + T \sin dt}{\sin da} = \frac{Q \sin bq + U \sin bu}{\sin ab},$$

oder, weil t, u, v, w auf f, g, h, i normal sind:

$$\frac{P \sin dp + T \cos df}{\sin da} = \frac{Q \sin bq + U \cos bg}{\sin ab},$$

d eben so $\frac{Q\sin aq + U\cos ag}{\sin ab} = \frac{R\sin br + V\cos ch}{\sin bc}$,

$$\frac{R\sin br + V\cos bh}{\sin bc} = \frac{S\sin ds + W\cos di}{\sin cd},$$

$$\frac{S\sin cs + W\cos ci}{\sin cd} = \frac{P\sin ap + T\cos af}{\sin da}.$$

Setzt man nun in diesen vier Gleichungen, der in 251. gegebenen Vorschrift gemäss, die Kräfte P, , R, $S = 0$ und eliminirt hierauf die Pressungen , U, V, W, so kommt

$$(a)\quad \frac{\cos af}{\cos ag}\cdot\frac{\cos bg}{\cos bh}\cdot\frac{\cos ch}{\cos ci}\cdot\frac{\cos di}{\cos df} = 1,$$

s die gesuchte Bedingung.

§. 255.

Zusätze. *a.* Man errichte in A, B, C, D auf g, h, i die 4 Normalen AK, BL, CM, DN. Begne die 1ste derselben der 2ten in L, die 2te der en in M, die 3te der 4ten in N und die 4te der 1sten K, so ist $\cos af = \sin LAB$, $\cos ag = \sin ABL$, d es verhält sich daher

$$\cos af : \cos ag = BL : AL,$$

d eben so $\cos bg : \cos bh = CM : BM$,

s. w. Hiermit wird die erhaltene Bedingungsgleiung:

$$\frac{AK}{AL}\cdot\frac{BL}{BM}\cdot\frac{CM}{CN}\cdot\frac{DN}{DK} = 1,$$

h.: Beschreibt man um das Viereck $ABCD$ ein eites $KLMN$, dessen Seiten auf den Linien, in den die Ecken des ersten beweglich sind, normal sten, so muss das Product aus den Verhältnissen, nach

denen die Seiten des zweiten von den Ecken des ersten getheilt werden, der Einheit gleich seyn.

b. Die Richtigkeit dieser Gleichung lässt sich auch leicht auf rein geometrischem Wege darthun. Man nehme in f, g,.. unendlich nahe bei A, B.. die Punkte A', B', C', D' dergestalt, dass I. $A'B' = AB$, II. $B'C' = BC$, III. $C'D' = CD$, so muss, wenn das Viereck $ABCD$ mit constanten Seitenlängen unendlich wenig im Vierecke $fghi$ verrückbar seyn soll, auch IV. $D'A' = DA$ seyn. Da also $A'B' = AB$, und weil, wegen der rechten Winkel $A'AL$ und $B'BL$, $A'L = AL$ und $B'L = BL$ ist, so ist der Winkel $A'LB' = ALB$, folglich der Winkel $ALA' = BLB'$, und es verhält sich daher

$$AA' : BB' = AL : BL.$$

Eben so fliessen aus II., III. und IV. die Proportionen:

$$BB' : CC' = BM : CM,$$
$$CC' : DD' = CN : DN,$$
$$DD' : AA' = DK : AK.$$

Zur Beweglichkeit ist aber das Zusammenbestehen der 4 Gleichungen I.,..IV. erforderlich, folglich auch das Zusammenbestehen der 4 daraus abgeleiteten Proportionen; diese aber, mit einander verbunden, führen zu der in *a.* erhaltenen Gleichung.

c. Der Winkel $A'B'C'$, in welchen bei Verrückung des Vierecks der Winkel ABC übergeht, ist $= A'B'L + LB'M + MB'C'$. Nach *b.* sind aber die Dreiecke $A'B'L$ und $MB'C'$ den Dreiecken ABL und MBC gleich und ähnlich. Hiermit wird der Winkel $A'B'C' = ABL + LB'M + MBC = ABC + LB'M$. Der Winkel ABC erhält daher bei der Verrückung das Increment $LB'M$, und bleibt folglich nur dann unge-

ändert, wenn *M* mit *L* zusammenfällt. Eben so wird bewiesen, dass der Winkel *BCD* nur dann sich nicht ändert, wenn *N* mit *M* zusammenfällt; u. s. w. Soll folglich das Viereck ohne Aenderung seiner Winkel verrückbar seyn, so müssen die vier auf *f*, *g*, .. in *A*, *B*, .. errichteten Perpendikel sich in einem Punkte, er heisse *O*, schneiden. Dass umgekehrt, wenn diese Bedingung erfüllt ist, jederzeit auch Beweglichkeit statt findet, erhellet sogleich aus der Formel in *a*., in welcher für diesen Fall $AL = AK$, $BM = BL$, etc. ist, aber auch schon daraus, dass, wenn das Viereck mit constant bleibenden Winkeln um den Punkt *O* um ein unendlich Geringes gedreht wird, die Ecken *A*, *B*, .. Normalen auf *OA*, *OB*,... beschreiben und folglich in *f*, *g*, .. fortrücken.

d. Analoge Resultate, wie wir jetzt für ein Viereck gefunden haben, ergeben sich auch für jedes andere Vieleck. Soll insbesondere ein Dreieck *ABC*, dessen Seitenlängen constant sind, mit seinen Ecken in den Seiten *f*, *g*, *h* eines unbeweglichen Dreiecks beweglich seyn, so müssen, weil mit den constant gesetzten Seitenlängen eines Dreiecks auch die Winkel desselben unveränderlich werden, die drei in *A*, *B*, *C* auf *f*, *g*, *h* errichteten Perpendikel sich in einem Punkte *O* schneiden. Das Dreieck *ABC* ist alsdann um *O* ein unendlich Weniges drehbar.

Aehnlicher Weise zeigt sich, dass, wenn in einer Ebene zwei Curven in drei Punkten einander berühren und daher unbeweglich gegen einander sind (§. 243.) eine unendlich kleine Beweglichkeit in dem Falle eintritt, wenn die Normalen in den drei Berührungspunkten in einem Punkte zusammentreffen.

§. 256.

Auf die jetzt behandelte Aufgabe reducirt sich auch der in §. 247. gedachte Fall, wenn die Ecken eines ebenen Vielecks, dessen Winkel sich ändern können, durch Linien von unveränderlicher Länge mit unbeweglichen Punkten in seiner Ebene verbunden sind, z. B. die Ecken $ABCD$ des Vierecks AC (Fig. 64.) mit den Punkten F, G, H, I. Denn alsdann sind A, B,... an sich in Kreisen beweglich, deren Mittelpunkte F, G,.. sind, und die unendlich kleine Beweglichkeit, wenn sie anders möglich ist, besteht darin, dass A, B,.. in Linien fortrücken, welche auf den Verbindungslinien AF, BG,... normal sind. Diese Beweglichkeit findet aber nach §. 255. *a.* dann statt, wenn das Product aus den Verhältnissen, nach welchen die Seiten des von den Verbindungslinien in ihrer Folge gebildeten Vielecks in den darin liegenden Ecken des beweglichen Vielecks geschnitten werden, der Einheit gleich ist.

Wenn die Verbindungslinien verlängert in einem Punkte O zusammentreffen, so wird das Vieleck um O um ein unendlich Weniges drehbar, und seine Winkel bleiben dabei ungeändert. Fallen aber die unbeweglichen Punkte selbst in einem einzigen O zusammen, so kann das Vieleck um O völlig herumgedreht werden, und die unendlich kleine Beweglichkeit wird eine endliche.

Sind die Ecken eines Dreiecks mit drei unbeweglichen Punkten verbunden, so müssen sich, wenn das Dreieck noch um ein unendlich Weniges verrückbar seyn soll, die drei Verbindungslinien in einem Punkte schneiden. Hat man daher überhaupt zwei in einer Ebene bewegliche Figuren und verbindet drei bestimmte

Punkte der einen mit drei bestimmten Punkten der andern durch drei gerade Linien von unveränderlicher Länge (§. 246.), so bleibt nur in dem Falle eine unendlich kleine gegenseitige Beweglichkeit noch übrig, wenn die drei Linien oder ihre Verlängerungen sich in einem Punkte begegnen.

§. 257.

Aufgabe. Vier gerade Linien a, b, c, d (Fig. 67.) von unbestimmter Länge, von denen jede der nächstfolgenden und die letzte der ersten zu begegnen genöthigt ist, liegen in einer horizontalen Ebene und sind resp. um die unbeweglichen Punkte F, G, H, I dieser Ebene in verticalen Ebenen drehbar. Man soll für dieses System, welches im Allgemeinen unbeweglich ist (§. 248.), die Bedingung der Beweglichkeit und die dann nöthige Bedingung des Gleichgewichts finden.

Auflösung. Seyen resp. A, B, C, D die Begegnungspunkte von a und b, b und c, etc. Weil $a, b, ..$ in verticalen Ebenen beweglich sind, so rücken diese Punkte, wenn das System beweglich ist, in verticalen Linien fort. Auf beliebige Punkte P, Q, R, S der Linien a, b, c, d lasse man Kräfte p, q, r, s nach verticalen Richtungen wirken. Dabei seyen t, u, v, w die Pressungen, welche in A, B, C, D auf die Linien a, b, c, d von den Linien b, c, d, a (nach verticalen Richtungen) ausgeübt werden, also $-t, .. -w$ die Pressungen in $A, .. D$ von a, b, c, d auf b, c, d, a. Die Gleichungen für's Gleichgewicht der um $F, .. I$ beweglichen Linien $a, .. d$ sind alsdann:

$$FP \cdot p - FD \cdot w + FA \cdot t = 0,$$
$$GQ \cdot q - GA \cdot t + GB \cdot u = 0,$$
$$HR \cdot r - HB \cdot u + HC \cdot v = 0,$$

$$IS\,.\,s - IC\,.\,v + ID\,.\,w = 0.$$

Eliminirt man hieraus die Pressungen t, u, v, indem man in der 1sten Gleichung für t seinen Werth aus der 2ten, hierauf in der resultirenden Gleichung für u seinen Werth aus der 3ten substituirt, u. s. w. und bezeichnet man noch der Kürze willen die Momente $FP.p$, $GQ.q$,... der Kräfte p, q,.. mit p_1, q_1, r_1, s_1, so kommt:

$$p_1 - FD.w + \frac{FA}{GA}\left(q_1 + \frac{GB}{HB}\left(r_1 + \left(\frac{HC}{IC}\left(s_1 + ID.w\right)\right)\right)\right)$$
$$= 0.$$

Hierin den Coefficienten der noch übrigen Pressung w, $= 0$ gesetzt, ergiebt sich die Bedingung der Beweglichkeit:

$$(A) \quad \frac{FA}{GA}\cdot\frac{GB}{HB}\cdot\frac{HC}{IC}\cdot\frac{ID}{FD} = 1,$$

und die rückständige Gleichung:

$$p_1 + \frac{FA}{GA}\left(q_1 + \frac{GB}{HB}\left(r_1 + \frac{HC}{IC}s_1\right)\right) = 0, \text{ oder}$$

$$(B) \quad f.p.FP + g.q.GQ + h.r.HR + i.s.IS = 0,$$

wo $f:g = GA:FA$, $g:h = HB:GB$, $h:i = IC:HC$, ist die alsdann nöthige Bedingung für's Gleichgewicht.

§. 258.

Zusätze. *a.* Die Bedingungsgleichung für die Beweglichkeit des Vierecks $ABCD$ kann man noch einfacher, als im Vorigen, auf folgende Weise finden. Kommen durch Drehung der Linien a, b, c um F, G, H die Punkte A, B, C, D in den verticalen Linien, worin sie beweglich sind, nach A', B', C', D', so verhält sich offenbar

$$DD' : AA' = FD : FA,$$
$$AA' : BB' = GA : GB,$$
$$BB' : CC' = HB : HC.$$

Damit nun auch die um I drehbare Linie d durch C' und D' gehen könne, muss sich verhalten:

$$CC' : DD' = IC : ID.$$

Hieraus aber folgt in Verbindung mit den drei vorhergehenden Proportionen die obige Bedingungsgleichung. — Man bemerke noch, dass die nachherigen Oerter A', B',.. von A, B,.. abwechselnd über und unter die horizontale Ebene fallen, wenn, wie in der Figur, die unbeweglichen Punkte F, G,.. in den Linien a, b,.. zwischen den Begegnungspunkten A, B,.. dieser Linien, nicht ausserhalb derselben, liegen. Uebrigens sieht man leicht, dass die Beweglichkeit, wenn eine solche statt findet, hier nicht eine unendlich kleine ist, sondern dass bei der vorausgesetzten unbestimmten Länge der Linien a, b,.. die Punkte A, B,.. jeden beliebigen Abstand von der horizontalen Ebene erreichen können.

b. Die Bedingungsgleichung für's Gleichgewicht lässt sich auch durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten entwickeln. Sind nämlich P', Q',.. die Oerter, welche die Angriffspunkte P, Q,.. der Kräfte p, q,.. nach einer unendlich kleinen Verrückung des Systems einnehmen, so sind PP', QQ',... vertical, fallen daher mit den Richtungen von p, q,.. zusammen, und es ist folglich beim Gleichgewichte:

$$PP' . p + QQ' . q + RR' . r + SS' . s = 0.$$

Nun verhält sich

$$PP' : AA' = FP : FA,$$
$$AA' : QQ' = GA : GQ,$$

mithin $PP' : QQ' = GA . FP : FA . GQ$,

u. s. w. übereinstimmend mit dem bereits Gefundenen.

c. Zu ganz analogen Resultaten wird man geführt, wenn statt 4 Linien, 3 oder mehr als 4 Linien auf die vorige Weise mit einander verbunden sind und um unbewegliche Punkte gedreht werden können. Für 3 Linien insbesondere, BC, CA, AB, welche resp. um die Punkte F, G, H drehbar sind, ergiebt sich als Bedingung der Beweglichkeit:

$$\frac{FB}{FC} \cdot \frac{GC}{GA} \cdot \frac{HA}{HB} = 1.$$

Nur also, wenn F, G, H in gerader Linie liegen, (vergl. §. 232. *c*.), ist das Dreieck ABC beweglich. Und in der That lässt es sich dann um die Gerade FGH, als um eine Axe drehen. Die virtuellen Geschwindigkeiten PP', QQ', RR' sind alsdann den Abständen der Punkte P, Q, R von dieser Axe proportional, und die Gleichung $PP'.p + .. = 0$, d. i. die Bedingungsgleichung für's Gleichgewicht, drückt, wie zu erwarten stand, aus, dass das Moment der Kräfte in Bezug auf die Gerade, um welche das Dreieck drehbar ist, null seyn muss.

d. Eben so wie das Dreieck wird auch das Viereck und jedes andere Vieleck, sobald die unbeweglichen Punkte ihrer Seiten in einer Geraden liegen, um diese Gerade drehbar. Dasselbe giebt auch die Bedingungsgleichung zu erkennen, da immer das Product aus den Verhältnissen, nach welchen die Seiten eines ebenen Vielecks von einer beliebigen Geraden geschnitten werden, der (negativen) Einheit gleich ist. Indessen ist diese Beweglichkeit bei Vielecken von mehr als drei Seiten nur als ein specieller Fall zu betrachten,

der sich dadurch noch auszeichnet, dass das anfänglich ebene Vieleck ein solches auch während der Bewegung bleibt, und bei einer nur unendlich kleinen Bewegung seine Form nicht ändert.

e. Zwischen der jetzigen Aufgabe und der vorhergehenden findet in gewissem Sinne ein duales Verhältniss statt. Denn so wie dort die Ecken eines Vielecks in unbeweglichen Geraden beweglich waren, so sind hier die Seiten eines Vielecks um unbewegliche Punkte drehbar. Diese Dualität der beiden Aufgaben giebt sich auch in der Aehnlichkeit der Bedingungsgleichungen (a) und (A) zu erkennen. Denn aus der letztern Gleichung erhält man die erstere, wenn man die grossen Buchstaben in die entsprechenden kleinen verwandelt und von den durch af, ag,... ausgedrückten Winkeln die Cosinus nimmt.

Auf gleiche Art lässt sich aus der Gleichung (B) für's Gleichgewicht der auf beliebige Punkte P, Q,.. der Linien a, b,.. und rechtwinklig auf der Ebene der letztern wirkenden Kräfte p, q,.. die Gleichung für's Gleichgewicht der nach beliebigen Richtungen p q,.. auf die Punkte A, B,.. und in der Ebene der letztern wirkenden Kräfte P, Q,.. herleiten. Es ist nämlich diese Gleichung:

(b) $F.P\cos fp + G.Q\cos gq + H.R\cos hr + I.S\cos is = 0$,

wo $F : G = \cos ga : \cos fa$, $G : H = \cos hb : \cos gb$, etc. Den Beweis dafür wird man sich leicht selbst entwickeln.

Noch eine Betrachtung, die auf beide Aufgaben gleich anwendbar ist, die ich aber der Kürze wegen nur in Bezug auf die letztere anstellen will, enthält der folgende §.

Q, R mit B und C, C und A, A und B auf einer-
Seite von F, G, H liegend annehmen, so dass f',
h' positiv werden. Endlich wollen wir noch die
fte p, q, r mit einerlei Zeichen behaftet, sie selbst
nach einerlei Seite gerichtet, etwa von oben nach
n, annehmen. Zufolge der Gleichungen (M) wer-
dann auch die Pressungen t, u, v nach unten ge-
tet seyn.

In der Figur sind für diesen Fall die Linien a, b,
s Stäbe gezeichnet worden, die in A, B, C derge-
über einander weggehen, dass sie daselbst, bei den
unten gerichteten Pressungen t, u, v, gegen ein-
r drücken, nicht von einander sich zu trennen
ben, und wir somit nicht nöthig haben, sie unzer-
lich mit einander verbunden anzunehmen (§. 189.).

Sey nun zuerst $p=0$, $r=0$, $g'=1$, und wirke
r nur auf den Stab b im Punkte A eine Kraft
. Hiermit werden die Gleichungen (M):

$$= (1-m)\,t,\quad hq = (1-m)\,u,\quad hfq = (1-m)\,v,$$

$t > q$. Diese Verschiedenheit der Pressung t von
Kraft q scheint einen Widerspruch zu enthalten.
n man sollte meinen, dass, wenn an dem Punkte
es Stabes b, und sonst nirgend wo anders am
eme, eine Kraft q wirkt, die dadurch bei A von b
c hervorgebrachte Pressung, sowie die von c auf
ckwärts ausgeübte Pressung, eben so gross als q
t seyn müssten. Dieser Schluss wäre nun aller-
s richtig, sobald die Stäbe b und c bloss in A mit
nder verbunden wären. Allein sie sind es noch
h den Stab a, welcher b und c in C und B be-
, und hierdurch geschieht es, dass die in A von
f c zunächst erzeugte und daher $=q$ zu setzende

10*

denen die Seiten des zweiten von den Ecken des ersten getheilt werden, der Einheit gleich seyn.

b. Die Richtigkeit dieser Gleichung lässt sich auch leicht auf rein geometrischem Wege darthun. Man nehme in $f, g, ..$ unendlich nahe bei $A, B..$ die Punkte A', B', C', D' dergestalt, dass I. $A'B' = AB$, II. $B'C' = BC$, III. $C'D' = CD$, so muss, wenn das Viereck $ABCD$ mit constanten Seitenlängen unendlich wenig im Vierecke $fghi$ verrückbar seyn soll, auch IV. $D'A' = DA$ seyn. Da also $A'B' = AB$, und weil, wegen der rechten Winkel $A'AL$ und $B'BL$, $A'L = AL$ und $B'L = BL$ ist, so ist der Winkel $A'LB' = ALB$, folglich der Winkel $ALA' = BLB'$, und es verhält sich daher

$$AA' : BB' = AL : BL.$$

Eben so fliessen aus II., III. und IV. die Proportionen:

$$BB' : CC' = BM : CM,$$
$$CC' : DD' = CN : DN,$$
$$DD' : AA' = DK : AK.$$

Zur Beweglichkeit ist aber das Zusammenbestehen der 4 Gleichungen I.,..IV. erforderlich, folglich auch das Zusammenbestehen der 4 daraus abgeleiteten Proportionen; diese aber, mit einander verbunden, führen zu der in *a.* erhaltenen Gleichung.

c. Der Winkel $A'B'C'$, in welchen bei Verrückung des Vierecks der Winkel ABC übergeht, ist $= A'B'L + LB'M + MB'C'$. Nach *b.* sind aber die Dreiecke $A'B'L$ und $MB'C'$ den Dreiecken ABL und MBC gleich und ähnlich. Hiermit wird der Winkel $A'B'C' = ABL + LB'M + MBC = ABC + LB'M$. Der Winkel ABC erhält daher bei der Verrückung das Increment $LB'M$, und bleibt folglich nur dann unge-

ändert, wenn *M* mit *L* zusammenfällt. Eben so wird bewiesen, dass der Winkel *BCD* nur dann sich nicht ändert, wenn *N* mit *M* zusammenfällt; u. s. w. Soll folglich das Viereck ohne Aenderung seiner Winkel verrückbar seyn, so müssen die vier auf *f*, *g*,.. in *A*, *B*,.. errichteten Perpendikel sich in einem Punkte, er heisse *O*, schneiden. Dass umgekehrt, wenn diese Bedingung erfüllt ist, jederzeit auch Beweglichkeit statt findet, erhellet sogleich aus der Formel in *a*., in welcher für diesen Fall $AL = AK$, $BM = BL$, etc. ist, aber auch schon daraus, dass, wenn das Viereck mit constant bleibenden Winkeln um den Punkt *O* um ein unendlich Geringes gedreht wird, die Ecken *A*, *B*,.. Normalen auf *OA*, *OB*,... beschreiben und folglich in *f*, *g*,.. fortrücken.

d. Analoge Resultate, wie wir jetzt für ein Viereck gefunden haben, ergeben sich auch für jedes andere Vieleck. Soll insbesondere ein Dreieck *ABC*, dessen Seitenlängen constant sind, mit seinen Ecken in den Seiten *f*, *g*, *h* eines unbeweglichen Dreiecks beweglich seyn, so müssen, weil mit den constant gesetzten Seitenlängen eines Dreiecks auch die Winkel desselben unveränderlich werden, die drei in *A*, *B*, *C* auf *f*, *g*, *h* errichteten Perpendikel sich in einem Punkte *O* schneiden. Das Dreieck *ABC* ist alsdann um *O* ein unendlich Weniges drehbar.

Aehnlicher Weise zeigt sich, dass, wenn in einer Ebene zwei Curven in drei Punkten einander berühren und daher unbeweglich gegen einander sind (§. 243.) eine unendlich kleine Beweglichkeit in dem Falle eintritt, wenn die Normalen in den drei Berührungspunkten in einem Punkte zusammentreffen.

§. 256.

Auf die jetzt behandelte Aufgabe reducirt sich auch der in §. 247. gedachte Fall, wenn die Ecken eines ebenen Vielecks, dessen Winkel sich ändern können, durch Linien von unveränderlicher Länge mit unbeweglichen Punkten in seiner Ebene verbunden sind, z. B. die Ecken *ABCD* des Vierecks *AC* (Fig. 64.) mit den Punkten *F*, *G*, *H*, *I*. Denn alsdann sind *A*, *B*,... an sich in Kreisen beweglich, deren Mittelpunkte *F*, *G*,.. sind, und die unendlich kleine Beweglichkeit, wenn sie anders möglich ist, besteht darin, dass *A*, *B*,.. in Linien fortrücken, welche auf den Verbindungslinien *AF*, *BG*,... normal sind. Diese Beweglichkeit findet aber nach §. 255. *a.* dann statt, wenn das Product aus den Verhältnissen, nach welchen die Seiten des von den Verbindungslinien in ihrer Folge gebildeten Vielecks in den darin liegenden Ecken des beweglichen Vielecks geschnitten werden, der Einheit gleich ist.

Wenn die Verbindungslinien verlängert in einem Punkte *O* zusammentreffen, so wird das Vieleck um *O* um ein unendlich Weniges drehbar, und seine Winkel bleiben dabei ungeändert. Fallen aber die unbeweglichen Punkte selbst in einem einzigen *O* zusammen, so kann das Vieleck um *O* völlig herumgedreht werden, und die unendlich kleine Beweglichkeit wird eine endliche.

Sind die Ecken eines Dreiecks mit drei unbeweglichen Punkten verbunden, so müssen sich, wenn das Dreieck noch um ein unendlich Weniges verrückbar seyn soll, die drei Verbindungslinien in einem Punkte schneiden. Hat man daher überhaupt zwei in einer Ebene bewegliche Figuren und verbindet drei bestimmte

Punkte der einen mit drei bestimmten Punkten der andern durch drei gerade Linien von unveränderlicher Länge (§. 246.), so bleibt nur in dem Falle eine unendlich kleine gegenseitige Beweglichkeit noch übrig, wenn die drei Linien oder ihre Verlängerungen sich in einem Punkte begegnen.

§. 257.

Aufgabe. Vier gerade Linien *a*, *b*, *c*, *d* (Fig. 67.) von unbestimmter Länge, von denen jede der nächstfolgenden und die letzte der ersten zu begegnen genöthigt ist, liegen in einer horizontalen Ebene und sind resp. um die unbeweglichen Punkte *F*, *G*, *H*, *I* dieser Ebene in verticalen Ebenen drehbar. Man soll für dieses System, welches im Allgemeinen unbeweglich ist (§. 248.), die Bedingung der Beweglichkeit und die dann nöthige Bedingung des Gleichgewichts finden.

Auflösung. Seyen resp. *A*, *B*, *C*, *D* die Begegnungspunkte von *a* und *b*, *b* und *c*, etc. Weil *a*, *b*, .. in verticalen Ebenen beweglich sind, so rücken diese Punkte, wenn das System beweglich ist, in verticalen Linien fort. Auf beliebige Punkte *P*, *Q*, *R*, *S* der Linien *a*, *b*, *c*, *d* lasse man Kräfte *p*, *q*, *r*, *s* nach verticalen Richtungen wirken. Dabei seyen *t*, *u*, *v*, *w* die Pressungen, welche in *A*, *B*, *C*, *D* auf die Linien *a*, *b*, *c*, *d* von den Linien *b*, *c*, *d*, *a* (nach verticalen Richtungen) ausgeübt werden, also $-t, .. -w$ die Pressungen in *A*, .. *D* von *a*, *b*, *c*, *d* auf *b*, *c*, *d*, *a*. Die Gleichungen für's Gleichgewicht der um *F*, .. *I* beweglichen Linien *a*, .. *d* sind alsdann:

$$FP.p - FD.w + FA.t = 0,$$
$$GQ.q - GA.t + GB.u = 0,$$
$$HR.r - HB.u + HC.v = 0,$$

$$IS \,.\, s - IC \,.\, v + ID \,.\, w = 0.$$

Eliminirt man hieraus die Pressungen t, u, v, indem man in der 1sten Gleichung für t seinen Werth aus der 2ten, hierauf in der resultirenden Gleichung für u seinen Werth aus der 3ten substituirt, u. s. w. und bezeichnet man noch der Kürze willen die Momente $FP.p$, $GQ.q$,... der Kräfte p, q,.. mit p_1, q_1, r_1, s_1, so kommt:

$$p_1 - FD.w + \frac{FA}{GA}\left(q_1 + \frac{GB}{HB}\left(r_1 + \left(\frac{HC}{IC}\left(s_1 + ID.w\right)\right)\right)\right)$$
$$= 0.$$

Hierin den Coefficienten der noch übrigen Pressung w, $= 0$ gesetzt, ergiebt sich die Bedingung der Beweglichkeit:

$$(A) \quad \frac{FA}{GA} \cdot \frac{GB}{HB} \cdot \frac{HC}{IC} \cdot \frac{ID}{FD} = 1,$$

und die rückständige Gleichung:

$$p_1 + \frac{FA}{GA}\left(q_1 + \frac{GB}{HB}\left(r_1 + \frac{HC}{IC} s_1\right)\right) = 0, \text{ oder}$$

$$(B) \quad f.p.FP + g.q.GQ + h.r.HR + i.s.IS = 0,$$

wo $f:g = GA:FA$, $g:h = HB:GB$, $h:i = IC:HC$, ist die alsdann nöthige Bedingung für's Gleichgewicht.

§. 258.

Zusätze. *a.* Die Bedingungsgleichung für die Beweglichkeit des Vierecks $ABCD$ kann man noch einfacher, als im Vorigen, auf folgende Weise finden. Kommen durch Drehung der Linien a, b, c um F, G, H die Punkte A, B, C, D in den verticalen Linien, worin sie beweglich sind, nach A', B', C', D', so verhält sich offenbar

$$DD' : AA' = FD : FA,$$
$$AA' : BB' = GA : GB,$$
$$BB' : CC' = HB : HC.$$

Damit nun auch die um I drehbare Linie d durch C' und D' gehen könne, muss sich verhalten:

$$CC' : DD' = IC : ID.$$

Hieraus aber folgt in Verbindung mit den drei vorhergehenden Proportionen die obige Bedingungsgleichung. — Man bemerke noch, dass die nachherigen Oerter A', B',.. von A, B,.. abwechselnd über und unter die horizontale Ebene fallen, wenn, wie in der Figur, die unbeweglichen Punkte F, G,.. in den Linien a, b,.. zwischen den Begegnungspunkten A, B,.. dieser Linien, nicht ausserhalb derselben, liegen. Uebrigens sieht man leicht, dass die Beweglichkeit, wenn eine solche statt findet, hier nicht eine unendlich kleine ist, sondern dass bei der vorausgesetzten unbestimmten Länge der Linien a, b,.. die Punkte A, B,.. jeden beliebigen Abstand von der horizontalen Ebene erreichen können.

b. Die Bedingungsgleichung für's Gleichgewicht lässt sich auch durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten entwickeln. Sind nämlich P', Q',.. die Oerter, welche die Angriffspunkte P, Q,.. der Kräfte p, q,.. nach einer unendlich kleinen Verrückung des Systems einnehmen, so sind PP', QQ',... vertical, fallen daher mit den Richtungen von p, q,.. zusammen, und es ist folglich beim Gleichgewichte:

$$PP' \cdot p + QQ' \cdot q + RR' \cdot r + SS' \cdot s = 0.$$

Nun verhält sich

$$PP' : AA' = FP : FA,$$
$$AA' : QQ' = GA : GQ,$$

mithin $PP' : QQ' = GA \,.\, FP : FA \,.\, GQ$,

u. s. w. übereinstimmend mit dem bereits Gefundenen.

c. Zu ganz analogen Resultaten wird man geführt, wenn statt 4 Linien, 3 oder mehr als 4 Linien auf die vorige Weise mit einander verbunden sind und um unbewegliche Punkte gedreht werden können. Für 3 Linien insbesondere, BC, CA, AB, welche resp. um die Punkte F, G, H drehbar sind, ergiebt sich als Bedingung der Beweglichkeit:

$$\frac{FB}{FC} \cdot \frac{GC}{GA} \cdot \frac{HA}{HB} = 1.$$

Nur also, wenn F, G, H in gerader Linie liegen, (vergl. §. 232. *c.*), ist das Dreieck ABC beweglich. Und in der That lässt es sich dann um die Gerade FGH, als um eine Axe drehen. Die virtuellen Geschwindigkeiten PP', QQ', RR' sind alsdann den Abständen der Punkte P, Q, R von dieser Axe proportional, und die Gleichung $PP' . p + \ldots = 0$, d. i. die Bedingungsgleichung für's Gleichgewicht, drückt, wie zu erwarten stand, aus, dass das Moment der Kräfte in Bezug auf die Gerade, um welche das Dreieck drehbar ist, null seyn muss.

d. Eben so wie das Dreieck wird auch das Viereck und jedes andere Vieleck, sobald die unbeweglichen Punkte ihrer Seiten in einer Geraden liegen, um diese Gerade drehbar. Dasselbe giebt auch die Bedingungsgleichung zu erkennen, da immer das Product aus den Verhältnissen, nach welchen die Seiten eines ebenen Vielecks von einer beliebigen Geraden geschnitten werden, der (negativen) Einheit gleich ist. Indessen ist diese Beweglichkeit bei Vielecken von mehr als drei Seiten nur als ein specieller Fall zu betrachten,

der sich dadurch noch auszeichnet, dass das anfänglich ebene Vieleck ein solches auch während der Bewegung bleibt, und bei einer nur unendlich kleinen Bewegung seine Form nicht ändert.

a. Zwischen der jetzigen Aufgabe und der vorhergehenden findet in gewissem Sinne ein duales Verhältniss statt. Denn so wie dort die Ecken eines Vielecks in unbeweglichen Geraden beweglich waren, so sind hier die Seiten eines Vielecks um unbewegliche Punkte drehbar. Diese Dualität der beiden Aufgaben giebt sich auch in der Aehnlichkeit der Bedingungsgleichungen (a) und (A) zu erkennen. Denn aus der letztern Gleichung erhält man die erstere, wenn man die grossen Buchstaben in die entsprechenden kleinen verwandelt und von den durch af, ag,... ausgedrückten Winkeln die Cosinus nimmt.

Auf gleiche Art lässt sich aus der Gleichung (B) für's Gleichgewicht der auf beliebige Punkte P, Q,.. der Linien a, b,.. und rechtwinklig auf der Ebene der letztern wirkenden Kräfte p, q,.. die Gleichung für's Gleichgewicht der nach beliebigen Richtungen p q,.. auf die Punkte A, B,.. und in der Ebene der letztern wirkenden Kräfte P, Q,.. herleiten. Es ist nämlich diese Gleichung:

$$(b)\ F.P\cos fp + G.Q\cos gq + H.R\cos hr + I.S\cos is = 0,$$

wo $F : G = \cos ga : \cos fa$, $G : H = \cos hb : \cos gb$, etc. Den Beweis dafür wird man sich leicht selbst entwickeln.

Noch eine Betrachtung, die auf beide Aufgaben gleich anwendbar ist, die ich aber der Kürze wegen nur in Bezug auf die letztere anstellen will, enthält der folgende §.

§. 259.

Sey ABC (Fig. 68.) das vorhin betrachtete, von den Linien a, b, c gebildete Dreieck mit den unbeweglichen Punkten F, G, H in a, b, c. Diese Punkte sollen nicht in einer Geraden liegen, und daher das Dreieck, welches man sich horizontal denke, unbeweglich seyn. Sind nun p, q, r die an den Punkten P, Q, R der a, b, c angebrachten Kräfte; t, u, v die dadurch in A, B, C erzeugten Pressungen von b, c, a auf c, a, b, und setzt man noch

$$\frac{FB}{FC}=f, \frac{GC}{GA}=g, \frac{HA}{HB}=h,$$

$$\frac{FP}{FC}=f', \frac{GQ}{GA}=g', \frac{HR}{HB}=h',$$

so hat man, wie in §. 257., die Gleichungen:

$$f'p-v+fu=0,\ g'q-t+gv=0,\ h'r-u+ht=0.$$

Hieraus folgt: $g'q-t+g(f'p+f(h'r+ht))=0$,

$$\left.\begin{aligned} &\text{d. i. } gf'p+g'q+fgh'r=(1-m)\,t, \\ &\text{wo } m=fgh, \text{ und eben so} \\ &hg'q+h'r+ghf'p=(1-m)\,u, \\ &fh'r+f'p+hfg'q=(1-m)\,v. \end{aligned}\right\}\ \text{(M)}$$

Wir wollen uns nun über die Art und Weise, wie sich nach diesen Formeln die von den Kräften p, q, r entstehenden Pressungen t, u, v in A, B, C vertheilen, näher zu belehren suchen. Um unsere Aufmerksamkeit auf einen bestimmten Fall zu richten, wollen wir annehmen, dass, wie in der Figur, die Punkte F, G, H ausserhalb B und C, C und A, A und B auf der Seite von B, C, A liegen. Alsdann sind f, g, h, folglich auch m, zwischen 0 und 1 enthalten, und daher f, g, h und $1-m$ positiv. Wir wollen ferner die Punkte

Q, R mit B und C, C und A, A und B auf einer Seite von F, G, H liegend annehmen, so dass f', h' positiv werden. Endlich wollen wir noch die ifte p, q, r mit einerlei Zeichen behaftet, sie selbst nach einerlei Seite gerichtet, etwa von oben nach m, annehmen. Zufolge der Gleichungen (M) wer- dann auch die Pressungen t, u, v nach unten ge- tet seyn.

In der Figur sind für diesen Fall die Linien a, b, s Stäbe gezeichnet worden, die in A, B, C derge- t über einander weggehen, dass sie daselbst, bei den unten gerichteten Pressungen t, u, v, gegen ein- er drücken, nicht von einander sich zu trennen ben, und wir somit nicht nöthig haben, sie unzer- nlich mit einander verbunden anzunehmen (§.189.).

Sey nun zuerst $p=0$, $r=0$, $g'=1$, und wirke r nur auf den Stab b im Punkte A eine Kraft . Hiermit werden die Gleichungen (M):

$$r=(1-m)\,t,\quad hq=(1-m)\,u,\quad hfq=(1-m)\,v,$$

$t>q$. Diese Verschiedenheit der Pressung t von Kraft q scheint einen Widerspruch zu enthalten. n man sollte meinen, dass, wenn an dem Punkte les Stabes b, und sonst nirgend wo anders am eme, eine Kraft q wirkt, die dadurch bei A von b c hervorgebrachte Pressung, sowie die von c auf ckwärts ausgeübte Pressung, eben so gross als q st seyn müssten. Dieser Schluss wäre nun aller- s richtig, sobald die Stäbe b und c bloss in A mit nder verbunden wären. Allein sie sind es noch h den Stab a, welcher b und c in C und B be- t, und hierdurch geschieht es, dass die in A von f c zunächst erzeugte und daher $=q$ zu setzende

Pressung t' in B eine Pressung u' von c auf a, diese in C eine Pressung v' von a auf b, diese in A eine neue Pressung t'' von b auf c hervorbringt, und so fort im Kreise herum ohne Ende. Die wirklichen Pressungen t, u, v in A, B, C werden alsdann die Summen jener partiellen Pressungen in denselben Punkten seyn.

Die Richtigkeit dieser Vorstellung bewährt sich durch die Uebereinstimmung der hiernach sich ergebenden Totalwerthe für t, u, v mit den vorhin gefundenen. In der That hat man

$$u' = ht', \quad v' = fu', \quad t'' = gv',$$
$$u'' = ht'', \quad v'' = fu'', \quad t''' = gv'',$$
$$u''' = ht''', \quad v''' = fu''', \quad t'''' = gv''',$$

u. s. w.

folglich

$$t'' = fght' = mt', \quad t''' = mt'' = m^2t', \quad t'''' = m^3t', \text{ etc.}$$
$$t = t' + t'' + t''' + \ldots = t'(1 + m + m^2 + \ldots) = \frac{t'}{1-m}$$
$$u = u' + u'' + u''' + \ldots = h(t' + t'' + t''' + \ldots) = ht,$$
$$v = v' + v'' + v''' + \ldots = f(u' + u'' + u''' + \ldots) = fht$$

und wenn wir nach dem vorhin Bemerkten noch $t' = q$ setzen:

$$t = \frac{q}{1-m}, \quad u = \frac{hq}{1-m}, \quad v = \frac{fhq}{1-m},$$

welches die bereits oben erhaltenen Werthe der Pressungen sind.

Lassen wir z. B. A, B, C die Mittelpunkte von HB, FC, GA seyn und drücken auf b in A mit einer Kraft $= 1$, so ist auch der Druck von b auf c zunächst $= 1$, der dadurch erzeugte Druck von c auf $a = \frac{1}{2}$; von a auf $b = \frac{1}{4}$; der somit entstehende neue Druck von b auf c, $= \frac{1}{8}$; von c auf a, $= \frac{1}{16}$, u. s. w.; also

der vollständige Druck von b auf c, $= 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{8}{7}$, mithin um $\frac{1}{7}$ grösser, als der unmittelbare Druck auf a; der vollständige Druck von c auf a halb so gross, als der vorhergehende, folglich $= \frac{4}{7}$, und der von a auf b abermals die Hälfte des von c auf a, also $= \frac{2}{7}$.

Ist die Kraft q nicht in A selbst, sondern in irgend einem andern Punkte Q des Stabes b angebracht, so ist sie gleichwirkend mit einer Kraft $\frac{GQ}{GA}\,q = g'q$, deren Angriffspunkt A ist, und die Pressungen sind alsdann die vorigen $\frac{q}{1-m}$, etc., nachdem sie vorher noch mit g' multiplicirt worden. Auf ähnliche Art ergeben sich die Pressungen in A, B, C, wenn auf einen Punkt P des Stabes a eine Kraft p, oder auf einen Punkt R des Stabes c eine Kraft r wirkt. Wenn folglich auf alle drei Stäbe zugleich Kräfte wirken, so hat man nur für jeden der Punkte A, B, C die von jeder Kraft besonders herrührenden Pressungen zu addiren, um die daselbst statt findende Totalpressung zu erhalten, und man kommt somit zu den Gleichungen (M) zurück.

Wie sich ähnliche Betrachtungen bei Vierecken, Fünfecken, etc. anstellen lassen, sieht jeder von selbst.

§. 260.

Aufgabe. Drei Gerade a, b, c von unbestimmter Länge sind in einer Ebene an drei unbeweglichen Punkten F, G, H (Fig. 62.) verschiebbar, ihre gegenseitigen Durchschnitte A, B, C aber können nur in den Seiten l, m, n des unbeweglichen Dreiecks LMN sich bewegen. Die Bedingung zu finden, unter welcher

dieses im Allgemeinen unbewegliche System (§. 248.) eine unendlich kleine Beweglichkeit erlangt.

Auflösung. Die gesuchte Bedingung ist offenbar einerlei mit derjenigen, unter welcher die Seiten des Dreiecks ABC sich um die Punkte F, G, H drehen, und die Ecken desselben in Curven fortgehen, deren Tangenten l, m, n sind. Letztere Bedingung aber, und folglich auch die erstere, besteht nach §. 232. C. in der Erfüllung der Gleichung:

$$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GA}\cdot\frac{AH}{HB}=\frac{MA}{AN}\cdot\frac{NB}{BL}\cdot\frac{LC}{CM}.$$

§. 261.

Aufgabe. Man hat ein in einer Ebene bewegliches Viereck $ABCD$ (Fig. 69.) mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln. Zwei Punkte F und H in zwei einander gegenüberliegenden Seiten AB und CD sind unbeweglich, und damit das Viereck selbst im Allgemeinen unbeweglich (§. 247. Zus.). Die Lage der Punkte F und H so zu bestimmen, dass dem Vierecke noch eine unendlich kleine Beweglichkeit übrig bleibt.

Auflösung. Man lasse auf beliebige Punkte der AB Kräfte wirken, deren Moment in Bezug auf F, $=p_1$ sey; desgleichen bringe man irgendwo an CD Kräfte an, deren Moment in Bezug auf H, r_1 heisse. Die Pressungen, welche deshalb die Seite DA in D und A auf die Seiten CD und AB ausübt, und welche in der Richtung von DA einander gleich und entgegengesetzt sind, nenne man t und $-t$; die Pressungen von BC auf die Enden B und C von AB und CD seyen eben so $=v$ und $-v$. Alsdann hat man für's Gleichgewicht

der AB.... $p_1 - FA.t \sin A + FB.v \sin B = 0$,
der CD,... $r_1 - HC.v \sin C + HD.t \sin D = 0$.

Aus diesen zwei Gleichungen, durch welche das Gleichgewicht des ganzen Systems ausgedrückt ist, eliminire man die eine der beiden Pressungen t und v, und setze den Coefficienten der andern $= 0$, oder setze p_1 und r_1 null und eliminire hierauf das Verhältniss $t : v$, so kommt:

$$FA.HC \sin A \sin C = FB.HD \sin B \sin D,$$

als die gesuchte Bedingung der Beweglichkeit.

§. 262.

Zusätze. *a.* Die gefundene Bedingung lässt sich noch ungleich einfacher darstellen. Wird nämlich FH von DA in K und von BC in L geschnitten, so ist

$$FA \sin A = FK \sin K, \quad FB \sin B = FL \sin L,$$
$$HC \sin C = HL \sin L, \quad HD \sin D = HK \sin K.$$

Hiermit wird die Bedingungsgleichung:

$$FK.HL = FL.HK,$$

mithin $FK : HK = FL : HL$;

die Punkte K und L müssen folglich identisch seyn, d. h. die zwei Seiten DA, BC und die Gerade FH durch die zwei unbeweglichen Punkte müssen sich in einem Punkte K schneiden.

b. Dass nur unter dieser Bedingung das Viereck um ein unendlich Weniges beweglich wird, kann auch aus dem in §. 228. *b.* bewiesenen Satze gefolgert werden, wonach, wenn C und D statt F und H unbeweglich angenommen werden, bei einer unendlich kleinen Verrückung des Vierecks jeder Punkt F der Seite AB ein Linienelement beschreibt, welches auf der von

F nach dem Durchschnitte *K* der beiden andern Seiten geführten Geraden normal ist. Denn soll das Viereck um *F* und *H* bewegt werden können, so muss es auch, wenn *F* frei gelasssen wird, um *C* und *D*, als unbewegliche Punkte, so beweglich seyn, dass die Länge von *HF* unverändert bleibt, dass folglich *F* ein auf *HF* normales Element beschreibt; und da dieses Element zufolge des angeführten Satzes auch auf *FK* normal ist, so müssen *H*, *F* und *K* in einer Geraden liegen.

c. Das Viereck *ABCD* mit den zwei Punkten *F*, *H* in den Seiten *AB*, *CD* ist vollkommen bestimmt und kann construirt werden, wenn die Längen der 7 Linien *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, *AF*, *DH*, *FH* gegeben sind. Lässt man nur sechs dieser Längen gegeben seyn und construirt mit ihnen das Viereck so, dass sich *DA*, *BC*, *FH* in einem Punkte schneiden, so hat dabei die siebente unbestimmt gelassene Länge ihren grössten oder kleinsten Werth (§. 252.). Diess führt uns zu folgenden zwei Sätzen:

1. Bei einem Vierecke *FBCH* mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln ist der gegenseitige Abstand *AD* zweier gegebenen Punkte *A* und *D* in zwei gegenüberliegenden Seiten *FB* und *CH* ein Maximum oder Minimum, wenn die Gerade *AD* den Durchschnitt *K* des andern Paares gegenüberliegender Seiten *BC* und *HF* trifft.

2. Hat man ein Viereck *FBCH* mit constanten Seitenlängen und veränderlichen Winkeln, und bewegt sich bei Veränderung der Winkel ein Punkt *D* in der Seite *CH* so, dass sein Abstand *AD* von einem bestimmten Punkte *A* in der gegenüberliegenden Seite *FB* unveränderlich bleibt, so ist *HD*, so

wie auch CD, ein Maximum oder Minimum, wenn AD, BC und HF sich in einem Punkte begegnen.

§. 263.

Bei dem um F und H beweglichen Vierecke $ABCD$ wollen wir jetzt noch die Bedingung des Gleichgewichts untersuchen.

1) Wirken auf AB und CD Kräfte, und sind ihre Momente rücksichtlich der Punkte F und H, $= p_1$ und r_1, so ist nach §. 261. bei statt findender Beweglichkeit zum Gleichgewichte nöthig, dass

$$p_1 . HD \sin D + r_1 . FA \sin A = 0,$$

oder kürzer, dass $p_1 . HK + r_1 . FK = 0$.

Es folgt hieraus zunächst, dass, wenn von den zwei Momenten p_1 und r_1 das eine null ist, auch das andere null seyn muss. Wirkt daher auf die eine der beiden Linien AB und CD, etwa auf CD, gar keine Kraft, so muss das Moment der an AB angebrachten Kräfte in Bezug auf den unbeweglichen Punkt F von AB null seyn. Dasselbe erhellet auch schon daraus, dass die unendlich kleine Bewegung von AB um F durch den übrigen Theil des Systems nicht gehindert wird, und dass folglich, wenn bloss auf AB Kräfte wirken, diese unter denselben Bedingungen im Gleichgewichte sind, als wenn die übrigen Seiten des Vierecks gar nicht vorhanden wären.

Umgekehrt lässt sich mittelst dieser einfachen Bemerkung sehr leicht die Bedingung für die Beweglichkeit des Vierecks herleiten. Denn ist es beweglich, und bringt man an AB in A und B nach den Richtungen AD und BC zwei Kräfte p und p' an, welche im Gleichgewichte sind, so müssen sie sich wie die von F auf BC und AD gefällten Perpendikel, also wie

$FB \sin B$ zu $FA \sin A$ verhalten. Die Kräfte p und p' werden aber noch im Gleichgewichte seyn, wenn man sie nach denselben Richtungen AD und BC in D und C anbringt. Da sie nun alsdann aus demselben Grunde, wie vorhin, in dem Verhältnisse von $HC \sin C$ zu $HD \sin D$ stehen müssen, so muss sich verhalten $FB \sin B : FA \sin A = HC \sin C : HD \sin D$, welches die zu Ende des §. 261. gefundene Gleichung giebt.

2) Ist an einer der beiden Seiten DA und BC des Vierecks, z. B. an BC, in einem beliebigen Punkte Q nach der Richtung QT eine Kraft q angebracht, so zerlege man dieselbe, um ihre Wirkung zu schätzen, in zwei andere q' und q'' nach den Richtungen BC und QO, wo O der Durchschnitt von AB mit CD ist. Die Kraft q'' nach der Richtung QO lässt sich ferner in zwei andere auf B und C nach BO und CO wirkende zerlegen, und ist daher von gar keiner Wirkung, weil in BO und CO die unbeweglichen Punkte F und H liegen. Die nach QT gerichtete Kraft q ist folglich gleichwirkend mit der nach BC gerichteten Kraft $q' = q \dfrac{\sin TQO}{\sin CQO}$.

3) In dem besondern Falle, wenn AB und CD parallel sind, wird es auch QO mit AB, und daher $q' = q \sin (AB^{\backprime}q) : \sin B$. Alsdann ist folglich die Intensität von q' bloss von der Intensität von q und von dem Winkel $AB^{\backprime}q$ abhängig, d. h. die Wirkung einer an BC im Punkte Q angebrachten Kraft q bleibt ungeändert, wenn die Kraft parallel mit ihrer Richtung an irgend einen andern Punkt von BC verlegt wird.

Dasselbe folgt auch unmittelbar aus der Theorie der Kräftepaare. Denn wirken auf zwei Punkte der Seite BC, oder überhaupt auf zwei Punkte in der

ene des Vierecks, die mit dieser Seite in fester rbindung stehen, zwei Kräfte q und $q_{,}$, welche ein ar ausmachen, so kann man statt desselben ein zwei- s Paar setzen, dessen Moment dem des ersten gleich , und dessen Kräfte, in B und C angebracht, in die rallelen AB und CD fallen. Letzteres Paar aber von keiner Wirkung, weil AB und CD die unbe- glichen Punkte F und H enthalten. Mithin kann ch das erstere Paar keine Bewegung hervorbringen, d es ist folglich q mit $-q_{,}$ gleichwirkend.

Eben so wird bewiesen, dass zwei parallele Kräfte, ren Angriffspunkte mit AD fest verbunden sind, ein- der gleiche Wirkungen haben. — Zum Gleichgewichte ischen Kräften, deren Angriffspunkte zum Theil mit C und zum Theil mit AD fest verbunden sind, wird her nur erfordert, dass, nachdem man sie parallel it ihren Richtungen, die einen an B, die andern an , verlegt hat, ihrer aller Moment in Bezug auf F ll ist.

4) Wenn nicht allein AB mit CD, sondern auch C mit DA parallel ist, so geht das Viereck in ein rallelogramm über, und wird beweglich, wenn die nie durch die unbeweglichen Punkte gleichfalls mit C und DA parallel ist. Diese Beweglichkeit ist aber cht mehr unendlich klein, sondern endlich, weil nach ner unendlich kleinen Drehung um F und H die iereoke AC, AH und FC noch Parallelogramme nd, und daher die Bedingung der Beweglichkeit durch e Drehung nicht verloren geht.

Zwei auf A und B nach AD und BC wirkende räfte, also auch zwei Kräfte, die parallel mit jenen f zwei fest mit AD und BC verbundene Punkte rken, sind hierbei im Gleichgewichte, wenn sie sich

wie BF zu FA verhalten. Bringt man daher FH und damit auch die Seiten DA und BC in verticale Lage, befestigt an diese Seiten irgendwo, in S und Q, zwei horizontale Aerme und hängt an dieselben zwei resp. mit BF und FA proportionale Gewichte, so halten sich letztere das Gleichgewicht und können ohne Störung desselben an den Aermen hin und her geschoben werden. Siehe Fig. 70. Man nennt diese Einrichtung die Roberval'sche Waage, nach ihrem Erfinder Roberval, einem französischen Mathematiker des 17. Jahrhunderts. Da an ihr zwei Gewichte, wenn sie einmal im Gleichgewichte sind, in jeden beliebigen Entfernungen von den unbeweglichen Punkten darin verharren, während bei der gewöhnlichen Waage Gleichgewicht nur dann statt findet, wenn sich die Gewichte umgekehrt, wie ihre Entfernungen vom Drehungspunkte verhalten, so hat man diese Maschine als ein statisches Paradoxon aufgestellt.

Am einfachsten lässt sich das Gesetz des Gleichgewichts an derselben mit Hülfe des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten erklären. Denn jeder mit der Seite AD oder BC fest verbundene Punkt beschreibt bei der Drehung des Parallelogramms AC um F und H einen Weg, der dem Wege von resp. A oder B gleich und parallel ist. Wird daher für zwei an A und B angebrachte Kräfte, die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten erfüllt, so geschieht ihr auch Genüge, wenn man die Kräfte parallel mit ihren anfänglichen Richtungen, an beliebige andere Punkte verlegt, die gegen AD und BC eine unveränderliche Lage haben.

§. 264.

Aufgabe. Die Bedingung für die unendlich kleine

weglichkeit eines ebenen Sechsecks mit constanten
itenlängen und veränderlichen Winkeln zu finden,
i welchem eine Seite um die andere einen unbeweg-
hen Punkt enthält.

Auflösung. Sey *ABCDEF* (Fig. 71.) das Sechs-
k. Die Punkte *G*, *H*, *I* der Seiten *AB*, *CD*, *EF*
yen unbeweglich, und damit das Sechseck selbst im
lgemeinen unbeweglich (§. 247. Zus.) An willkührli-
en andern Punkten derselben drei Seiten bringe man
räfte in der Ebene an. Die Momente derselben in
zug auf *G*, *H*, *I* seyen p_1, q_1, r_1; nämlich p_1 das
oment der auf *AB* wirkenden Kräfte in Bezug auf
, u. s. w. Die Pressungen, welche die Zwischensei-
n *BC*, *DE*, *FA* in ihren Endpunkten auf jene er-
ern Seiten ausüben, seyen *t*, *u*, *v* in *B*, *D*, *F*, und
her $-t$, $-u$, $-v$ in *C*, *E*, *A*. Die Gleichungen
r's Gleichgewicht der Seiten *AB*, *CD*, *EF* sind als-
nn

$$p_1 - v \,.\, GA \sin A + t \,.\, GB \sin B = 0,$$
$$q_1 - t \,.\, HC \sin C + u \,.\, HD \sin D = 0,$$
$$r_1 - u \,.\, IE \sin E + v \,.\, IF \sin F = 0;$$

d hieraus ergiebt sich sogleich die gesuchte Bedin-
ng der Beweglichkeit, wenn man p_1, q_1, r_1 null
tzt und sodann die zwei Verhältnisse zwischen *t*, *u*, *v*
iminirt, nämlich:

$$\frac{GA}{GB} \cdot \frac{HC}{HD} \cdot \frac{IE}{IF} = \frac{\sin B}{\sin A} \cdot \frac{\sin D}{\sin C} \cdot \frac{\sin F}{\sin E}.$$

§. 265.

Zusätze. *a*. Nimmt man die Seite *FA* hinweg,
wird die Figur vollkommen beweglich, und die er-
ltene Gleichung ist nunmehr die Bedingung, unter wel-
er der gegenseitige Abstand der Punkte *F* und *A*

am grössten oder kleinsten wird. Fügt man die Linie FA von constanter Länge wieder hinzu, lässt aber ihren Endpunkt A nicht mehr mit der Linie BG in A fest verbunden, sondern darin beweglich seyn, so erhält die Figur gleichfalls Beweglichkeit, und die Linie AG, so wie AB, wird unter derselben Bedingungsgleichung ein Maximum oder Minimum.

b. Sind K, L, M die gegenseitigen Durchschnitte von AB, CD, EF, so ist:

$$\frac{\sin F}{\sin A}=\frac{AK}{FK},\quad \frac{\sin B}{\sin C}=\frac{CL}{BL},\quad \frac{\sin D}{\sin E}=\frac{EM}{DM},$$

und man kann damit die Bedingungsgleichung auf folgende Weise darstellen:

$$\frac{KA}{AG}\cdot\frac{GB}{BL}\cdot\frac{LC}{CH}\cdot\frac{HD}{DM}\cdot\frac{ME}{EI}\cdot\frac{IF}{FK}=1,$$

Bestimmt man daher in AB, CD, EF drei Punkte G_1, H_1, I_1, von denen G_1 mit K, A, G, B, L; H_1 mit L, C, H, D, M; I_1 mit M, E, I, F, K eine sogenannte geometrische Involution bildet, d. h. welche so liegen, dass

$$\frac{KA}{AG}\cdot\frac{GB}{BL}\cdot\frac{LG_1}{G_1K}=-1,\quad \frac{LC}{CH}\cdot\frac{HD}{DM}\cdot\frac{MH_1}{H_1L}=-1,$$
$$\frac{ME}{EI}\cdot\frac{IF}{FK}\cdot\frac{KI_1}{I_1M}=-1,$$

so zieht sich die Bedingungsgleichung zusammen in:

$$\frac{KG_1}{G_1L}\cdot\frac{LH_1}{H_1M}\cdot\frac{MI_1}{I_1K}=-1,$$

und giebt somit zu erkennen, dass G_1, H_1, I_1 in einer Geraden liegen müssen *).

---

*) Die drei Punkte G_1, H_1, I_1 können durch folgende Construction gefunden werden. Seyen N und O die Durchschnitte von

§. 266.

Aufgabe. *ABCD* (Fig. 72.) ist ein in einer bene bewegliches Viereck mit constanten Seitenlän- n und veränderlichen Winkeln. *F*, *G*, *H*, *I* sind vier ibewegliche Punkte in der Ebene, denen resp. die iten *AB*, *BC*,... zu begegnen genöthigt sind, so ss jede Seite um den ihr zugehörigen Punkt sowohl dreht, als an ihm verschoben werden kann. Hiermit : das Viereck selbst im Allgemeinen unbeweglich . 249.). Die Bedingung zu finden, unter welcher es ner unendlich kleinen Bewegung fähig wird.

Auflösung. Heissen α, β, γ; δ die Winkel, wel- e die Seiten *AB*, *BC*, *CD*, *DA* nach den damit zugleich sgedrückten Richtungen mit einer willkührlich in der ene gezogenen festen Axe machen. Auf die vier ken *A*,..*D* lasse man in der Ebene resp. die Kräfte *q*, *r*, *s* wirken. Hierdurch erleiden die Seiten *AB*, *C*,.... in *F*, *G*, *H*, *I* von den daselbst befindlichen ibeweglichen Punkten Pressungen, welche auf den iten selbst normal sind und daher mit der festen

---

? mit *FA* und *FG*, und *P* der Durchschnitt von *EF* mit *LO*, so giebt sich G_1 als der Durchschnitt von *AB* mit *NP*. Denn die Sei- n des Dreiecks *OPF* schneiden *AB* in *K*, G_1, *L*, und die drei Gera- n von *N* nach den drei Ecken *O*, *P*, *F* desselben treffen *AB* in *B*, ,, *A*. (Baryc. Calcul. §. 291.). Aehnlicher Weise lassen sich auch ch H_1 und I_1 finden.

Umgekehrt kann man, wenn G_1 gegeben ist, den Punkt *G* durch ehung der Geraden G_1NP, *POL* und *OGF* bestimmen. Sind da- : von den drei unbeweglichen Punkten *G*, *H*, *I* irgend zwei, etwa und *I*, gegeben, und soll der dritte so bestimmt werden, dass das chseck beweglich wird, so bestimme man mit *H* und *I* die Punkte und I_1, verbinde letztere durch eine Gerade, welche *AB* in G_1 hneide, und suche mit G_1 den Punkt *G*.

Axe die Winkel $90^\circ+\alpha$, $90^\circ+\beta$,... machen. Man bezeichne diese Pressungen resp. mit $2t$, $2u$, $2v$, $2w$, so dass die Pressung $2t$ positiv zu nehmen ist, wenn ihre Richtung in der That durch $90^\circ+\alpha$ bestimmt wird, negativ, wenn sie die entgegengesetzte ist, u. s. w.

Das Gleichgewicht dauert nun fort, wenn wir die unbeweglichen Punkte F, G,.. weglassen und dafür den Pressungen $2t$, $2u$,... gleiche Kräfte nach den Richtungen $90^\circ+\alpha$, $90^\circ+\beta$,... an denselben Stellen F, G,... der Seiten anbringen; es dauert noch fort, wenn wir jede dieser Kräfte in zwei mit ihr parallele zerlegen, welche auf die Endpunkte der jedesmaligen Seite wirken. Wir zerlegen daher $2t$ in die zwei damit parallelen Kräfte an A und B:

$$\frac{FB}{AB}\cdot 2t=(1+a)\,t \text{ und } \frac{AF}{AB}\cdot 2t=(1-a)\,t,$$

wenn $\frac{FB}{AB}=\frac{1}{2}(1+a)$, folglich $\frac{AF}{AB}=\frac{1}{2}(1-a)$ gesetzt wird, und wo daher

$$\frac{FB-AF}{AB}=a$$

ist. Setzen wir eben so

$$\frac{GC-BG}{BC}=b,\quad \frac{HD-CH}{CD}=c,\quad \frac{IA-DI}{DA}=d,$$

so ist die Kraft $2u$ gleichwirkend mit den zwei ihr parallelen Kräften $(1+b)\,u$ und $(1-b)\,u$ an B und C, u. s. w.

Hiernach haben wir es jetzt mit einem Vierecke zu thun, dessen Ecken allein der Wirkung von Kräften ausgesetzt sind; nämlich auf A wirken die Kräfte p, $(1-d)\,w$, $(1+a)\,t$; auf B die Kräfte q, $(1-a)\,t$, $(1+b)\,u$; u. s. w., und es sind nunmehr die Gleichun-

gen für das Gleichgewicht dieses Systems zu entwickeln. Da wir aber nur die Bedingung der unendlich kleinen Beweglichkeit suchen wollen, so können wir in diesen Gleichungen die ursprünglichen Kräfte $p, .. s$ auch eglassen und somit auf A bloss die Kräfte $(1-d)w$ und $(1+a)t$ nach den Richtungen $90°+\delta$ und $90°+\alpha$; an B bloss die Kräfte $(1-a)t$ und $(1+b)u$ nach den Richtungen $90°+\alpha$ und $90°+\beta$; u. s. w. wirkend annehmen. Die Elimination von t, u, v, w aus den Gleichungen für das Gleichgewicht dieser Kräfte wird uns hierauf zu der gesuchten Bedingung hinführen. Die Gleichungen selbst sind nach §. 220. zu Ende:

$$\Big((1-d)w\sin(90°+\delta-\delta)+(1+a)t\sin(90°+\alpha-\delta)\Big)\sin(\beta-\alpha)$$

$$=$$

$$\Big((1-a)t\sin(90°+\alpha-\beta)+(1+b)u\sin(90°+\beta-\beta)\Big)\sin(\alpha-\delta),$$

d. i.

$$(1)\quad t[\sin(\beta-2\alpha+\delta)+a\sin(\beta-\delta)]$$
$$=(1+b)u\sin(\alpha-\delta)-(1-d)w\sin(\beta-\alpha),$$

und eben so noch drei andere Gleichungen, die sich schon aus (1) durch gehörige Vertauschung der Buchstaben ergeben, nämlich:

$$(2)\quad u[(\sin\gamma-2\beta+\alpha)+b\sin(\gamma-\alpha)]$$
$$=(1+c)v\sin(\beta-\alpha)-(1-a)t\sin(\gamma-\beta),$$

u. s. w. Statt der dritten und vierten Gleichung aber wollen wir diejenigen zwei bei weitem einfacheren Gleichungen gebrauchen, welche ausdrücken, dass die 8 Kräfte $(1\pm a)t$, $(1\pm b)u$, etc., wenn sie parallel mit ihren Richtungen $90°+\alpha$, $90°+\beta$, etc. an einen und denselben Punkt getragen werden, einander, — obwohl eigentlich den Kräften p, q, r, s, — das Gleich-

gewicht halten. Diese zwei Gleichungen, die aus jenen vier Gleichungen durch gehörige Verbindung derselben ebenfalls hervorgehen müssen, sind:

$$t\sin\alpha + u\sin\beta + v\sin\gamma + w\sin\delta = 0,$$
$$t\cos\alpha + u\cos\beta + v\cos\gamma + w\cos\delta = 0,$$

wofür wir, das einemal w, das anderemal v eliminirend, auch setzen können:

$$(3)\quad v\sin(\delta-\gamma) = t\sin(\alpha-\delta) + u\sin(\beta-\delta),$$
$$(4)\quad w\sin(\delta-\gamma) = t\sin(\gamma-\alpha) + u\sin(\gamma-\beta).$$

Es ist nun noch übrig, aus (1), (2), (3), (4) die drei Verhältnisse zwischen t, u, v, w wegzuschaffen. Die Substitution der Werthe von w und v aus (4) und (3) in (1) und (2) verwandelt letztere zwei Gleichungen in:

$$(5)\quad Tt + Uu = 0,\quad (6)\quad T't + U'u = 0,$$

wo
$$T = [\sin(\beta-2\alpha+\delta) + a\sin(\beta-\delta)]\sin(\delta-\gamma) + (1-d)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\beta-\alpha)$$
$$U = -(1+\delta)\sin(\alpha-\delta)\sin(\delta-\gamma) + (1-d)\sin(\gamma-\beta)\sin(\beta-\alpha)$$
$$T' = -(1+c)\sin(\alpha-\delta)\sin(\beta-\alpha) + (1-a)\sin(\gamma-\beta)\sin(\delta-\gamma)$$
$$U' = [\sin(\gamma-2\beta+\alpha) + b\sin(\gamma-\alpha)]\sin(\delta-\gamma) - (1+e)\sin(\beta-\delta)\sin(\beta-\alpha).$$

Zufolge der bekannten Formel

$$(^*)\sin f\sin(g-h) + \sin g\sin(h-f) = \sin h\sin(g-f)$$

ist aber

$$\sin(\gamma-\alpha)\sin(\beta-\alpha) + \sin(\beta-2\alpha+\delta)\sin(\delta-\gamma) = \sin(\delta-\alpha)\sin(\beta-\alpha+\delta-\gamma),$$
$$\sin(\gamma-\beta)\sin(\beta-\alpha) + \sin(\gamma-\delta)\sin(\alpha-\delta) = \sin(\alpha-\delta+\gamma-\beta)\sin(\beta-\delta),$$
$$\sin(\delta-\gamma)\sin(\gamma-\beta) + \sin(\delta-\alpha)\sin(\beta-\alpha) = \sin(\beta-\alpha+\delta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha),$$
$$\sin(\delta-\gamma)\sin(\gamma-2\beta+\alpha) + \sin(\delta-\beta)\sin(\beta-\alpha) = \sin(\beta-\alpha+\delta-\gamma)\sin(\gamma-\beta).$$

Setzen wir daher zur Abkürzung:

$\sin(\alpha-\beta) = A$, $\sin(\beta-\gamma) = B$, $\sin(\gamma-\delta) = C$, $\sin(\delta-\alpha) = D$, $\sin(\alpha-\gamma) = F$, $\sin(\beta-\delta) = G$, $\sin(\alpha-\beta+\gamma-\delta) = M$,

so wird:
$$T = -MD - aCG - dAF,$$
$$U = MG - bCD - dAB,$$
$$T' = MF - aBC - cAD,$$
$$U' = MB + bCF + cAG.$$

Aus (5) und (6) folgt nun nach Elimination des Verhältnisses $t:u$
$$(7)\quad T'U - TU' = 0.$$

Vermöge der eben aufgestellten Werthe von $T, .. U'$ aber ergiebt sich
$$T'U - TU' = (M^2 + ab.C^2 + cd.A^2)(FG + BD) + (ac.G^2 + ad.B^2 + bc.D^2 + bd.F^2)AC;$$
und da, wie man mit Hülfe der Formel (*) leicht findet,
$$FG + BD = CA$$
ist, so reducirt sich die Gleichung (7) auf:
$$0 = M^2 + cd.A^2 + ad.B^2 + ab.C^2 + bc.D^2 + bd.F^2 + ac.G^2.$$

Dividirt man noch mit $abcd$ und setzt für M, A, B,... die damit bezeichneten Sinus, so erhält man folgende durch ihre Form in der That merkwürdige Gleichung:
$$0 = \frac{\sin(\alpha-\beta+\gamma-\delta)^2}{abcd} + \frac{\sin(\alpha-\beta)^2}{ab} + \frac{\sin(\beta-\gamma)^2}{bc} + \frac{\sin(\gamma-\delta)^2}{cd} + \frac{\sin(\delta-\alpha)^2}{da} + \frac{\sin(\alpha-\gamma)^2}{ac} + \frac{\sin(\beta-\delta)^2}{bd},$$
als die Bedingung, unter welcher das Viereck um ein unendlich Weniges beweglich wird.

§. 267.

Zusätze. *a.* Ist das Viereck ein Parallelogramm, so hat man $\gamma = 180° + \alpha$, $\delta = 180° + \beta$, und die Gleichung wird
$$0 = \frac{\sin 2(\alpha-\beta)^2}{abcd} + \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da}\right)\sin(\alpha-\beta)^2,$$

d. i. $0 = 4\cos(\alpha - \beta)^2 + (a + c)(b + d)$.

Ist das Parallelogramm ein Rechteck, so ist noch $\alpha - \beta = 90^\circ$, also

$$0 = (a + c)(b + d)$$

die Bedingung der Beweglichkeit, und es muss folglich entweder $a + c = 0$, oder $b + d = 0$ seyn.

b. Weil $a = \frac{FB - AF}{AB} = \frac{AB - 2AF}{AB}$ und

$c = \frac{2HD - CD}{CD}$ so ist $a + c = \frac{2HD}{CD} - \frac{2AF}{AB}$. Nimmt man nun die Linien AB und CD nach den eben so ausgedrückten Richtungen mit einerlei Zeichen, so sind beim Rechtecke (so wie beim Parallelogramme) AB und CD einander gleich, auch dem Zeichen nach. Die Gleichung für die Beweglichkeit: $a + c = 0$, wird hiernach identisch mit: $HD = AF$, und zeigt dadurch an, dass die Gerade FH mit den Seiten BC und DA parallel seyn muss (Fig. 72*). Dass unter dieser Bedingung das Rechteck sich um ein unendlich Weniges verrücken lässt, ist leicht einzusehen. Dreht man nämlich die Seite AB um einen unendlich kleinen Winkel um den Punkt F, so verschieben sich BC und DA an G und I, ohne sich zu drehen, rücken also in sich selbst fort, und die Seite CD dreht sich um H um denselben Winkel und nach derselben Richtung, wie AB.

Eben so wird durch die Gleichung $b + d = 0$ der Parallelismus von GI mit AB und CD ausgedrückt. In diesem Falle besteht die Verrückung des Vierecks darin, dass sich BC und DA um G und I drehen, während sich AB und CD an F und G verschieben.

c. Sind F, G, H, I die Mittelpunkte der Seiten AB, BC,..., so sind a, b, c, $d = 0$. In diesem Falle reducirt sich die allgemeine Gleichung auf

$$\sin(\alpha - \beta + \gamma - \delta) = 0,$$

und giebt damit zu erkennen, dass die Summe zweier gegenüberliegender Winkel des Vierecks 2 oder 4 rechten Winkeln gleich seyn muss, dass also um das Viereck ein Kreis beschrieben werden können muss. Und in der That, ist $ABCD$ ein in einem Kreise beschriebenes Viereck, und nimmt man in dem Kreise nach einerlei Seite zu die Bögen AA', BB', CC', DD' einander gleich und unendlich klein, so sind die Geraden AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, etc. paarweise einander gleich und halbiren sich gegenseitig.

Sechstes Kapitel.

Vom Gleichgewichte an Ketten und an vollkommen biegsamen Fäden.

§. 268.

Die einfachste Art, auf welche mehrere Körper mit einander verbunden seyn können, besteht darin, dass von ihnen, in einer gewissen Ordnung genommen, jeder mit dem nächstvorhergehenden und dem nächstfolgenden, keiner also mit mehr als zweien der übrigen, verbunden ist. Ein solches System, bei welchem übrigens noch vorauszusetzen ist, dass je zwei mit einander verbundene Körper noch gegenseitige Beweglichkeit haben, indem sie sonst als ein einziger Körper zu betrachten wären, nennt man eine Kette, die einzelnen Körper selbst: die Glieder der Kette. Ist der

letzte Körper noch mit dem ersten verbunden, so heisst die Kette geschlossen.

In dem Vorhergehenden sind dergleichen Systeme schon oft in Betracht gezogen worden. Denn jedes Vieleck, als ein System in gewisser Folge paarweise mit einander verbundener gerader Linien, ist eine solche Kette. Von diesen Betrachtungen werden sich die nun folgenden hauptsächlich dadurch unterscheiden, dass wir jetzt die Glieder einer Kette nach allen Dimensionen unendlich klein und in unendlicher Zahl annehmen, und somit die Kette in einen unendlich dünnen und vollkommen biegsamen Faden übergehen lassen.

§. 269.

Aufgabe. Man hat eine Reihe frei beweglicher Körper, von denen jeder mit dem nächstvorhergehenden und dem nächstfolgenden in einem Punkte verbunden ist. Die Bedingungen des Gleichgewichts zu finden, wenn auf den ersten Körper der Reihe eine Kraft P und auf den letzten eine Kraft Q wirkt.

Auflösung. Seyen $m_{,}$, m, m', m'',... (Fig. 73.) unmittelbar auf einander folgende Körper der Reihe; A, A', A'',... die Berührungspunkte von $m_{,}$ mit m, von m mit m', etc. Man setze in A an $m_{,}$ und m die Pressungen oder Gegenkräfte T und $-T$, in A' an m und m' die Gegenkräfte T' und $-T'$, in A'' an m' und m'' die Gegenkräfte T'' und $-T''$, u. s. w. Da nun auf m ausser den Pressungen $-T$ und T' keine weitere Kraft wirkt, so müssen sich $-T$ und T' allein das Gleichgewicht halten und daher einander gleich und direct entgegengesetzt seyn. Dasselbe gilt auch von den Pressungen $-T'$ und T'', welche m' erleidet, desgleichen von den auf m'' wirkenden Pres-

ungen, u. s. w. Sämmtliche Pressungen $T, T', T'', \ldots$ nd daher einander gleich, und ihre Richtungen fallen ebst den Berührungspunkten $A, A', A'', \ldots$ in eine nd dieselbe Gerade. Ist nun etwa $m_{,}$ der erste und $''$ der letzte Körper der Reihe, so muss an $m_{,}$ die ressung T mit der Kraft P, und an m'' die Pressung $-T''$ mit der Kraft Q im Gleichgewichte seyn. Dies ihrt zu folgenden zwei Bedingungen für das Gleichgeicht des ganzen Systems:

1) Die Berührungspunkte der Körper müssen in ner Geraden liegen.

2) Die zwei Kräfte P und Q müssen in dieser Geden nach entgegengesetzten Richtungen wirken und nander gleich seyn.

§. 270.

Das Gleichgewicht jedes einzelnen Gliedes der eben trachteten Kette, und mithin das Gleichgewicht der nzen Kette selbst, ist sicher, oder unsicher, jenachm die zwei Kräfte am Anfang und Ende derselben e Glieder von einander zu entfernen streben, oder e gegen einander drücken. Im letztern Falle wächst e Unsicherheit des Gleichgewichts mit der Anzahl r Glieder, so dass bei physischen Körpern, obschon ch diese nicht in mathematischen Punkten, sondern kleinen Flächen berühren, auch gegenseitigen Reiungen unterworfen sind, ein solches Gleichgewicht ır dann noch erhalten werden kann, wenn die Anzahl erselben sehr gering ist. Bei einer Reihe unendlich eler und unendlich kleiner Körper, d. i. bei einem ollkommen biegsamen Faden, kann daher von einem sichern Gleichgewichte nicht mehr die Rede seyn.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines

vollkommen biegsamen und frei beweglichen Fadens, auf dessen Enden zwei Kräfte wirken, sind demnach

1) *dass der Faden eine gerade Linie bildet, und*

2) *dass die Kräfte einander gleich sind und, nach entgegengesetzten in die Fadenlinie fallenden Richtungen wirkend, die Enden der Linie von einander zu entfernen streben.*

Die Pressungen oder die Kräfte, mit denen bei diesem Gleichgewichte je zwei nächstfolgende Elemente des Fadens auf einander wirken, sind zufolge des vor. §. den Kräften an den Enden des Fadens gleich und so gerichtet, dass die Elemente nicht gegen einander drücken, sondern in der Richtung der Fadenlinie sich von einander zu trennen suchen; es sind daher keine eigentlichen Pressungen, sondern Spannungen (§. 200.) — so wie auch bei jedem andern Systeme von Kräften, welche an einem Faden im Gleichgewichte sind, die Elemente des Fadens, wegen der Unmöglichkeit eines unsichern Gleichgewichts, nur spannend auf einander wirken können.

Beim Gleichgewichte zwischen zwei Kräften, welche an den Enden eines freien und vollkommen biegsamen Fadens angebracht sind, herrscht also in jedem Punkte des Fadens eine Spannung, deren Richtung in die Fadenlinie fällt, und deren Intensität der gemeinschaftlichen Intensität der beiden Kräfte gleich ist.

§. 271.

Wir wollen jetzt die in §. 269. untersuchte Kette nicht mehr vollkommen frei beweglich, sondern der Bedingung unterworfen seyn lassen, dass ihre Glieder eine

unbewegliche Fläche berühren. Mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen seyen noch B, B',.. (Fig. 74.) die Berührungspunkte der Glieder m, m',... mit der Fläche, und R, R',... die daselbst von letzterer auf erstere ausgeübten Pressungen. Halten sich nun zwei auf das erste und letzte Glied wirkende Kräfte das Gleichgewicht, so müssen an jedem Mittelgliede besonders die Spannungen, welche es von dem vorhergehenden und folgenden Gliede erleidet, und die von der Fläche auf dasselbe erzeugte Pressung im Gleichgewichte mit einander seyn. Die drei auf der Oberfläche von m in A, A' und B zu errichtenden Normalen, als die Richtungen der auf m wirkenden Kräfte T, T' und R, müssen sich folglich in einem Punkte C schneiden und in einer Ebene liegen, und es muss sich verhalten

$$T : T' : R = \sin BCA' : \sin ACB : \sin ACA'.$$

Auf gleiche Art treffen wegen des Gleichgewichts von m' die drei in A', A'' und B' auf m' zu errichtenden Normalen in einem Punkte C' zusammen und liegen in einer Ebene, und man hat

$$T' : T'' : R' = \sin B'C'A'' : \sin A'C'B' : \sin A'C'A'',$$

folglich in Verbindung mit dem Verhältnisse zwischen T und T':

$$\frac{T}{T''} = \frac{\sin BCA'}{\sin ACB} \cdot \frac{\sin B'C'A''}{\sin A'C'B'}$$

und ähnlicher Weise:

$$\frac{T}{T'''} = \frac{\sin BCA'}{\sin ACB} \cdot \frac{\sin B'C'A''}{\sin A'C'B'} \cdot \frac{\sin B''C''A'''}{\sin A''C''B''};$$

und eben so ergiebt sich das Verhältniss auch zwischen irgend zwei andern Spannungen, folglich auch das Verhältniss zwischen P und Q, indem die Spannung des ersten Gliedes der Kette durch ein vorhergehendes

Glied die Kraft P, und die Spannung des letzten Gliedes durch ein folgendes die Kraft Q vertritt. Ist folglich m das erste Glied und $m^{(n)}$ das letzte, CA die Richtung von P und $C^{(n)}A^{(n+1)}$ die Richtung von Q, so hat man:

$$\frac{P}{Q}=\frac{\sin BCA'}{\sin ACB}\cdot\frac{\sin B'C'A''}{\sin A'C'B'}\cdots\frac{\sin B^{(n)}C^{(n)}A^{(n+1)}}{\sin A^{(n)}C^{(n)}B^{(n)}}.$$

Die Bedingungen des Gleichgewichts bestehen daher gegenwärtig darin:

1) dass die Normalen in der Berührung des ersten (letzten) Gliedes mit der unbeweglichen Fläche und mit dem zweiten (vorletzten) Gliede und die Richtung der Kraft P (Q) in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte schneiden;

2) dass eben so die Normalen in der Berührung jedes Mittelgliedes mit dem vorhergehenden und folgenden Gliede und mit der Fläche in einer Ebene liegen und in einem Punkte zusammentreffen, und

3) dass zwischen den Intensitäten von P und Q das eben gefundene Verhältniss zwischen den Sinussen der von den Normalen und den Richtungen von P und Q gebildeten Winkel statt findet.

§. 272.

Um jetzt von der eben betrachteten Kette *zu einem über eine unbewegliche Fläche gelegten und an seinen Enden durch Kräfte gespannten Faden* überzugehen, wird es am einfachsten seyn, uns die Glieder der Kette als unendlich kleine einander gleiche Kugeln zu denken. Denn sind die Glieder kugelförmig, so braucht die Bedingung, dass bei jedem Gliede die Normalen in den drei Berührungen mit der Fläche und den

ei angrenzenden Gliedern sich in einem Punkte schnei-
n, nicht ausdrücklich erwähnt zu werden, da sämmt-
he Normalen auf der Oberfläche einer Kugel in ih-
m Mittelpunkte zusammentreffen. Rücksichtlich der
genseitigen Lage der Kugeln bleibt daher bloss die
dingung übrig, dass bei jeder die gedachten drei
rmalen in einer Ebene liegen, oder, was auf das-
lbe hinauskommt, dass die Mittelpunkte C, C', C''
n je drei auf einander folgenden Kugeln m, m', m''
it dem Punkte B', in welchem die mittlere Kugel m'
e Fläche berührt, in einer Ebene enthalten sind.

Indem wir nun die Kugeln unendlich klein und ein-
der gleich annehmen, lassen sich CC', $C'C''$, ...
s Elemente einer von der Fläche überall um den
albmesser der Kugeln abstehenden Curve, d. i. eines
er die Fläche gelegten Fadens, ansehen, und die
tztere Bedingung drückt dann aus, dass je zwei nächst-
lgende Elemente des Fadens, und die Normale der
läche an derselben Stelle in einer Ebene liegen, d. h.
ss in jedem Punkte der von dem Faden gebildeten
urve die Krümmungsebene derselben auf der Fläche
chtwinklig steht. Bekanntlich ist dieses die charak-
ristische Eigenschaft der kürzesten Linie, welche auf
ner gegebenen Fläche zwischen zwei gegebenen Punk-
n derselben sich ziehen lässt *). *Mithin muss der*

*) Dies gilt wenigstens im Allgemeinen. In jedem Falle aber
rd man eine Curve, die jene charakteristische Eigenschaft besitzt,
Theile zerlegen können, deren jeder ein Minimum zwischen seinen
dpunkten ist, sollte auch nicht die ganze Curve die möglich kleinste
ischen ihren Endpunkten seyn. Zerlegt man z. B. den Bogen ei-
s grössten Kreises auf einer Kugel, der grösser als ein Halbkreis
, in Theile, deren jeder kleiner als ein Halbkreis ist, so ist
ler dieser Theile die kürzeste Linie auf der Kugel zwischen
ren Endpunkten. Dagegen ist der ganze Bogen unter allen

Faden zwischen seinen beiden Endpunkten so liegen, dass er die kürzeste Linie ist, die auf der Fläche von dem einen Endpunkte desselben zum andern gezogen werden kann, oder doch so, dass genugsam kleine Theile desselben die kürzesten Linien zwischen ihren

---

einfach gekrümmten Linien, die sich auf der Kugel zwischen seinen Enden ziehen lassen, die längste, und die Ergänzung dieses Bogens zu einem ganzen Kreise die kürzeste auf der Kugel.

Dass bei der kürzesten Curve, die sich auf einer gegebenen Fläche zwischen zwei Punkten der letztern ziehen lässt, die Krümmungsebene der Curve überall rechtwinklig auf der Fläche steht, lässt sich folgendergestalt geometrisch darthun. Seyen *AB*, *BC* (Fig. 75.) zwei nächstfolgende Elemente der Curve, und *MO*, *MP* die Elemente der Fläche, in denen erstere Elemente enthalten sind. Die Elemente der Curve wollen wir uns geradlinig und die der Fläche eben denken, und *MN* sey die Gerade, in welcher sich die letztern schneiden. Da nun die ganze Curve die kürzeste Linie seyn soll, welche zwischen ihren Endpunkten auf der Fläche gezogen werden kann, so muss auch der Theil *ABC* derselben die kürzeste Linie unter allen seyn, welche von *A* geradlinig nach einem Punkte der *MN* und von da geradlinig nach *C* sich ziehen lassen. Da ferner die Länge dieser gebrochenen Linie sich nicht ändert, wenn das eine der beiden Flächenelemente *MO* und *MP*, oder beide zugleich, mit den Linienelementen *AB* und *BC*, welche sie enthalten, um *MN* als Axe gedreht werden, so wird diejenige Linie *ABC* die kürzeste seyn, welche nach einer Drehung, wodurch *MP* in die erweiterte Ebene von *MO* fällt, zu einer ungebrochenen Geraden, als der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten in einer Ebene, wird. Kommt daher *C* nach dieser Drehung nach *C'*, so muss *B* in die Gerade *AC'* fallen. Nun beschreibt bei dieser Drehung die Gerade *BC* die Fläche eines geraden Kegels, von welchem *MN* die Axe ist. Ein Element dieser Kegelfläche ist der Winkel *CBC'*; die durch die Axe gehenden Ebenen *MBC* und *MBC'* müssen folglich mit der Ebene des Winkels *CBC'* unendlich nahe rechte Winkel machen, d. h., weil *BC'* die geradlinige Verlängerung von *AB* ist: die Berührungsebenen *MO* und *MP* der Fläche müssen auf der Krümmungsebene *ABC* der Curve rechtwinklig seyn.

ndpunkten sind. Dies ist die erste Bedingung des leichgewichts.

Sodann sind wegen der Gleichheit und unendlichen leinheit der Kugeln die Winkel ACB, BCA', $A'C'B'$, c. unendlich wenig von rechten Winkeln, mithin ihre nus um unendlich kleine Grössen der zweiten Ordmg von der Einheit verschieden. Zufolge der Prortion: $T : T' = \sin BCA' : \sin ACB$, ist daher der Unrschied je zweier nächstfolgenden Spannungen nur ein endlich Kleines der zweiten Ordnung, also erst der nterschied zweier Spannungen, zwischen welche eine endliche Menge anderer fallen, d. i. der Spannungen zwei um einen endlichen Theil des Fadens von nander entfernten Stellen, von der ersten Ordnung, h. *die Spannung des Fadens ist überall von gleier Grösse; ihre Richtung aber ist die der Tannte der Fadencurve.*

Da nun am ersten (letzten) Elemente die Kraft P 2) mit der vom zweiten (vorletzten) Elemente auf daslbe hervorgebrachten Spannung das Gleichgewicht haln muss, und dieses Element, gleich den übrigen, an r unbeweglichen Fläche beweglich ist, so ergiebt ch als zweite Bedingung für das Gleichgewicht des adens, *dass jede der beiden Kräfte, welche auf den nfang und das Ende des Fadens wirken, mit der ormale der Fläche und der Tangente des Fadens selbst in einer Ebene liegt, und dass, wenn man ie Kräfte nach diesen Richtungen zerlegt, die tanentialen Kräfte einander (und der Spannung des 'adens) gleich sind und den Faden nach entgegenesetzten Seiten zu ziehen suchen.*

§. 273.

Noch verdient die vom Faden auf die Fläche ausgeübte Pressung näher betrachtet zu werden. Die Pressung, welche die Fläche von einem der unendlich kleinen einander gleichen Kügelchen erleidet, aus denen wir uns den Faden zusammengesetzt vorstellten, ist nach §. 271: $R = T\frac{\sin ACA'}{\sin BCA'} = T\sin ACA'$, (Fig. 74.), weil BCA' unendlich nahe $= 90°$. Es ist aber $\sin ACA' = \sin C_{,}C'CC'$, und der Sinus des Winkels, den zwei einander gleiche Elemente $C_{,}C$ und CC' der Curve mit einander machen, ist gleich dem einen der Elemente, dividirt durch den Krümmungshalbmesser der Curve. Mithin ist $R = Tk : r$, wenn r den Krümmungshalbmesser und k die Länge eines der Elemente, oder, was dasselbe ist, den Durchmesser einer der Kugeln bezeichnet.

Von n auf einander folgenden Kugeln, die einen so kleinen Theil $= nk$ des Fadens einnehmen, dass der Krümmungshalbmesser von einem Punkte des Theils zum andern unveränderlich angesehen werden kann, und dass die Pressungen, welche die Kugeln einzeln erzeugen, sowohl ihrer Grösse, als ihrer Richtung nach, nicht merklich von einander verschieden sind, von n solchen Kugeln ist daher nach dem Princip der Zusammensetzung paralleler Kräfte, die Gesammtpressung $= nTk : r$

$$= T\frac{ds}{r},$$

wenn wir die Länge des Fadentheils $= ds$ setzen. Dieses Resultat ist um so richtiger, je kleiner wir ds annehmen, und hängt nur noch insofern von k ab, als ds ein gewisses Vielfache von k ist. Da uns aber nichts hin-

rt, k noch unendlich kleiner als ds, also von der eiten Ordnung zu nehmen, während wir ds als eine endlich kleine Linie der ersten Ordnung betrachten, kann ds, als solche, jede beliebige Länge haben.

Die von einem Elemente des Fadens hervorgebrachte ressung steht demnach zu der Spannung des Fans in demselben Verhältnisse, wie die Länge des lements zu seinem Krümmungshalbmesser.

§. 274.

Zusätze. *a.* Zu dem eben erhaltenen Resultate man auch durch folgende einfache Betrachtung langen. Auf jedes Element AB (Fig. 76.) des über e Fläche gespannten Fadens wirken an seinen En n nach den tangentialen Richtungen AC und BD einander gleichen Spannungen T, und die Resultate derselben muss mit den Pressungen im Gleichgewichte seyn, welche das Element von der Fläche erdet. Betrachten wir nun AB als einen unendlich einen Bogen eines Kreises, und ist M der Mittelpunkt e letztern und N der Durchschnitt der Tangenten, halbirt die Gerade NM den Winkel CND, ist folgh die Richtung jener Resultante, und die Intensität rselben ist

$$T \cdot \frac{\sin CND}{\sin CNM} = T \sin AMB = T\frac{ds}{r},$$

nn wiederum ds die Länge des Elements AB, und seinen Krümmungshalbmesser MA bezeichnet. Eben gross, nur von entgegengesetzter Richtung, ist also ch die Resultante der auf das Element ausgeübten essungen.

b. Der Coefficient von ds in dem Ausdrucke für e Pressung dieses Elements ist nichts anderes, als die

§. 273. …einheit gleichen Li-

Noch verdient die vom F… derselben nach paral-
geübte Pressung näher betr… Pressungen, und zwar
sung, welche die Fläche … gleiche Linienelement
nen einander gleichen … Fadenelement, erfahren,
wir uns den Faden … r die Pressung für einen, dem
…gen, Punkt des Fadens nennen
nach §. 271: $R =$ …dem Punkte des Fadens zum an-
weil BCA' un… und das Product aus derselben in
$= \sin C_{\prime}C'C''$ … mit begreifendes Fadenelement giebt
einander gl… dieses letztern, — eben so, wie man bei
einander … förmig dichten Körper durch Multiplica-
dividirt … tigkeit an einer gewissen Stelle in ein da-
Mith… dliches Raumelement die Masse dieses Ele-
me… der bei einem mit veränderlicher Geschwin-
d… sich bewegenden Punkte durch Multiplication
… in einem gewissen Zeitpunkte statt findenden Ge-
…digkeit in ein diesen Zeitpunkt mit enthaltendes
…element das während dessen beschriebene Raum-
element erhält.

c. Da die Spannung des Fadens überall von gleicher Grösse ist, so verhalten sich die Pressungen für verschiedene Punkte des Fadens umgekehrt, wie die Krümmungshalbmesser, also direct wie die Krümmungen selbst, so dass, wenn der Faden sich geradlinig über die Fläche fortzieht, er eine Pressung weder erleidet, noch ausübt.

d. Ist die Krümmung des Fadens überall gleich gross, so ist auch seine Pressung von einer Stelle zur andern dieselbe. Dies ereignet sich z. B. bei einem Faden, welcher über eine Kugel, oder über einen geraden Cylinder mit kreisförmiger Basis gespannt ist. Denn im erstern Falle ist die Curve ein grösster Kreis

'ztern im Allgemeinen eine cylindrische 'inie). Da, wie sich leicht zeigen halbmesser einer solchen Spirale . man den Halbmesser des Cylin- .uadrat des Sinus des Winkels divi- .iemente der Spirale mit der Axe des .chen, so ist bei gleicher Spannung die des spiralförmigen Fadens diesem Quadrate .ional, mithin desto stärker, je mehr sich der .nkel der Spirale mit der Axe einem rechten nähert; am stärksten, wenn dieser Winkel ein rechter ist, und damit die Spirale in einen auf der Axe normalen Kreis übergeht; am schwächsten dagegen, oder vielmehr null, wenn der Faden parallel mit der Axe und daher geradlinig ist.

a. Die zwei Kräfte am Anfange und Ende des Fadens müssen dergestalt gerichtet seyn, dass sie den Faden spannen, d. h. die Elemente desselben von einander zu trennen, nicht sie gegen einander zu drücken streben, indem sonst wegen der Unsicherheit des Gleichgewichts jedes Elements das Gleichgewicht des Ganzen keinen Bestand haben könnte. Da ferner in der Wirklichkeit der Faden über die Fläche nur gelegt, nicht unzertrennlich mit ihr verbunden ist, so muss die Pressung, welche Faden und Fläche auf einander ausüben, ein gegenseitiger Druck seyn, und der Faden muss daher der Fläche seine hohle Seite zukehren. — Wäre der Faden gegen die Fläche erhaben und würde er von den Kräften gespannt, so würde er sich von der Fläche trennen, sein Gleichgewicht aber würde ein sicheres seyn, wenn die Trennung auf irgend eine Weise verhindert werden könnte. — Wenn dagegen der gegen die Fläche erhabene Faden von den Kräften an beiden

Gesammtpressung einer der Längeneinheit gleichen Linie, wenn je zwei gleiche Theile derselben nach parallelen Richtungen gleich grosse Pressungen, und zwar jedes dem Fadenelemente *ds* gleiche Linienelement dieselbe Pressung, wie das Fadenelement, erfahren. Dieser Coefficient, den wir die Pressung für einen, dem Elemente *ds* zugehörigen, Punkt des Fadens nennen können, ist von einem Punkte des Fadens zum andern veränderlich, und das Product aus derselben in ein den Punkt mit begreifendes Fadenelement giebt die Pressung dieses letztern, — eben so, wie man bei einem ungleichförmig dichten Körper durch Multiplication der Dichtigkeit an einer gewissen Stelle in ein daselbst befindliches Raumelement die Masse dieses Elements, oder bei einem mit veränderlicher Geschwindigkeit sich bewegenden Punkte durch Multiplication der in einem gewissen Zeitpunkte statt findenden Geschwindigkeit in ein diesen Zeitpunkt mit enthaltendes Zeitelement das während dessen beschriebene Raumelement erhält.

c. Da die Spannung des Fadens überall von gleicher Grösse ist, so verhalten sich die Pressungen für verschiedene Punkte des Fadens umgekehrt, wie die Krümmungshalbmesser, also direct wie die Krümmungen selbst, so dass, wenn der Faden sich geradlinig über die Fläche fortzieht, er eine Pressung weder erleidet, noch ausübt.

d. Ist die Krümmung des Fadens überall gleich gross, so ist auch seine Pressung von einer Stelle zur andern dieselbe. Dies ereignet sich z. B. bei einem Faden, welcher über eine Kugel, oder über einen geraden Cylinder mit kreisförmiger Basis gespannt ist. Denn im erstern Falle ist die Curve ein grösster Kreis

der Kugel, im letztern im Allgemeinen eine cylindrische Spirale (Schraubenlinie). Da, wie sich leicht zeigen lässt, der Krümmungshalbmesser einer solchen Spirale gefunden wird, wenn man den Halbmesser des Cylinders durch das Quadrat des Sinus des Winkels dividirt, den die Elemente der Spirale mit der Axe des Cylinders machen, so ist bei gleicher Spannung die Pressung des spiralförmigen Fadens diesem Quadrate proportional, mithin desto stärker, je mehr sich der Winkel der Spirale mit der Axe einem rechten nähert; am stärksten, wenn dieser Winkel ein rechter ist, und damit die Spirale in einen auf der Axe normalen Kreis übergeht; am schwächsten dagegen, oder vielmehr null, wenn der Faden parallel mit der Axe und daher geradlinig ist.

e. Die zwei Kräfte am Anfange und Ende des Fadens müssen dergestalt gerichtet seyn, dass sie den Faden spannen, d. h. die Elemente desselben von einander zu trennen, nicht sie gegen einander zu drücken streben, indem sonst wegen der Unsicherheit des Gleichgewichts jedes Elements das Gleichgewicht des Ganzen keinen Bestand haben könnte. Da ferner in der Wirklichkeit der Faden über die Fläche nur gelegt, nicht unzertrennlich mit ihr verbunden ist, so muss die Pressung, welche Faden und Fläche auf einander ausüben, ein gegenseitiger Druck seyn, und der Faden muss daher der Fläche seine hohle Seite zukehren. — Wäre der Faden gegen die Fläche erhaben und würde er von den Kräften gespannt, so würde er sich von der Fläche trennen, sein Gleichgewicht aber würde ein sicheres seyn, wenn die Trennung auf irgend eine Weise verhindert werden könnte. — Wenn dagegen der gegen die Fläche erhabene Faden von den Kräften an beiden

Enden gedrückt würde, so würde er damit auch gegen die Fläche angedrückt, das Gleichgewicht aber wegen der Unsicherheit nicht bestehen können. — Wäre endlich der Faden gegen die Fläche hohl, und drückten ihn die Kräfte an beiden Enden, so würde Trennung von der Fläche und Unsicherheit des Gleichgewichts zugleich die Folge seyn. — Es giebt daher hinsichtlich der Richtungen der Kräfte und der Lage des Fadens gegen die Fläche in Allem vier denkbare Fälle, von denen aber der ersterwähnte allein in der Wirklichkeit vorkommen kann.

§. 275.

Sollen zwei auf die Enden C und D (Fig. 76.) eines Fadens $CABD$ wirkende Kräfte P und Q sich das Gleichgewicht halten, und ist nur der Theil AB des Fadens über eine Fläche gelegt, sind aber die Theile CA und BD frei, so muss nach dem allgemeinen Gesetze, dass die einzelnen Theile für sich im Gleichgewichte sind, der Theil AB die kürzeste Linie bilden, welche auf der Fläche von A bis B gezogen werden kann; die Theile CA und BD aber müssen geradlinig seyn, und die in C, D angebrachten Kräfte P, Q müssen die Richtungen AC, BD haben. Es müssen ferner unter der Voraussetzung, dass die Fläche bloss vermöge ihrer Undurchdringlichkeit auf den Faden wirkt, CA, BD Tangenten der Curve AB in A, B seyn, und die Kräfte P, Q müssen einander gleich seyn. — Denn heisst T die Spannung des Theiles AB, und wäre AC nicht die Fortsetzung der Tangente NA von AB, so müsste doch, wegen des Gleichgewichts der nach AC und AN gerichteten Spannungen P und T am Endpunkte A von AB, die Richtung AC mit der Tangente AN und der Normale AM der Fläche

einer Ebene liegen, und es müsste, wenn man die
pannung P in A nach tangentialer und normaler Rich-
ng zerlegte, die tangentiale Kraft der Spannung T
leich und entgegengesetzt seyn (§. 272.). Weil aber
e Richtung AC nicht in das Innere des von der Flä-
e begränzten Körpers gehen kann, so würde auch
e normale Kraft nach aussen zu gerichtet seyn, folg-
ch den Punkt A vom Körper abwärts treiben und da-
it das Gleichgewicht aufheben. Die normale Kraft
uss folglich null, und daher die Spannung P der
pannung T in A gleich und entgegengesetzt seyn.
ehnliches wird rücksichtlich der Spannungen T und
des Punktes B bewiesen. Mithin sind CA und BD
e Tangenten an AB in A und B, und $P=T=Q$.

§. 276.

Wir haben bisher die Fläche, über welche ein Fa-
m gespannt ist, als unbeweglich betrachtet. Ist sie
eses nicht, sondern entweder zum Theil, oder voll-
mmen frei beweglich, so muss man noch das Gleich-
wicht berücksichtigen, welches am Körper, dem die
läche zur Grenze dient, die vom Faden auf ihn aus-
übte Pressung mit den übrigen auf ihn wirkenden
räften hält. Da aber am Faden die Pressung, welche
von der Fläche erleidet, mit den Spannungen der
rei Punkte des Fadens im Gleichgewichte ist, in de-
n er nach tangentialer Richtung von der Fläche ab-
ht, so kann man statt der Pressung des Fadens ge-
n die Fläche auch diese zwei Spannungen, d. h. zwei
nander und der Spannung gleiche Kräfte, setzen,
elche in den besagten zwei Punkten nach den gerad-
ig fortgehenden Richtungen des Fadens wirken. Auch
hellet dieses sogleich daraus, dass man, unbeschadet

des Gleichgewichts des Ganzen, den auf der Fläche liegenden Theil des Fadens sich mit der Fläche fest vereinigen lassen kann. Denn alsdann ist von Pressung nicht mehr die Rede, sondern es kommen nur die zwei erwähnten Spannungen in Betracht. Zu mehrerer Erläuterung mag folgende Aufgabe dienen.

§. 277.

Aufgabe. Ein in sich zurücklaufender Faden *ABCDEF* (Fig. 77.) ist um drei frei bewegliche Körper *l*, *m*, *n* gelegt. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen drei auf diese Körper wirkenden Kräften *P*, *Q*, *R* zu finden.

Auflösung. Seyen *BC*, *DE*, *FA* die freien und daher geradlinigen Theile des Fadens, welche zwischen den Körpern *l* und *m*, *m* und *n*, *n* und *l* liegen und sie resp. berühren; *T* die constante Spannung des Fadens; *p*, *q*, *r* die Richtungen der Kräfte *P*, *Q*, *R*. Hiernach sind am Körper *l* zwei Kräfte, jede $= T$, nach den Richtungen *AF*, *BC* wirkend, im Gleichgewichte mit der nach *p* gerichteten Kraft *P*; mithin müssen die drei Geraden *AF*, *BC*, *p* in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte schneiden, und der von den zwei erstern gebildete Winkel muss von der dritten halbirt werden. Gleiches findet statt in Bezug auf die zwei übrigen Körper *m* und *n*. Sämmtliche drei geradlinige Theile des Fadens müssen daher in einer Ebene liegen, also ein Dreieck *GHI* bilden, und die Richtungen der Kräfte müssen durch die Ecken dieses Dreiecks gehen und die Winkel daselbst halbiren. Die Verhältnisse aber, in welchen die Kräfte zu der Spannung des Fadens und zu einander stehen müssen, sind:

$$P : T = \sin G : \sin \tfrac{1}{2} G = 2 \cos \tfrac{1}{2} G : 1,$$
$$Q : T = 2 \cos \tfrac{1}{2} H : 1, \quad R : T = 2 \cos \tfrac{1}{2} I : 1.$$

Damit übrigens der Faden durch die Kräfte wirk-
ch gespannt werde, müssen sie von dem Innern des
reiecks GHI nach aussen gerichtet seyn.

§. 278.

Zusätze. *a.* Da das Gleichgewicht noch fortbe-
eht, wenn die gegenseitige Lage der Theile des Sy-
ems unveränderlich angenommen wird, so müssen sich
q, r in einem Punkte schneiden, welches zu dem
kannten Satze der Elementargeometrie führt, dass
e drei Geraden, welche die Winkel eines Dreiecks
lbiren, in einem Punkte zusammentreffen.

b. Untersuchen wir ähnlicher Weise das Gleichge-
icht zwischen vier Kräften, welche auf vier frei be-
gliche mit einem Faden umschlungene Körper wir-
n, so müssen von den vier freien und daher gerad-
igen Theilen des Fadens je zwei auf einander fol-
nde in einer Ebene liegen, und der von ihnen gebil-
te Winkel muss von der Richtung der Kraft, welche
f den dazwischen begriffenen Körper wirkt, halbirt
rden. Da hiernach diese vier Theile des Fadens, in
rer Aufeinanderfolge und genugsam verlängert, ein
Allgemeinen nicht in einer Ebene enthaltenes Vier-
k bilden, dessen Winkel von den Richtungen der
räfte halbirt werden, und da vier Kräfte, die sich an
nem freien Körper das Gleichgewicht halten, falls sie
cht in einer Ebene sind, eine hyperboloidische Lage
ben (§. 99. *a.*), so gewinnen wir folgenden Satz:

Die vier Geraden, welche die Winkel eines nicht
in einer Ebene enthaltenen Vierecks halbiren, haben
eine solche Lage gegen einander, dass jede Gerade,

welche dreien derselben begegnet, auch die vierte trifft.

§. 279.

Das Gleichgewicht eines über eine Fläche gespannten Fadens wird nicht unterbrochen, wenn man die Fläche wegnimmt und statt der Pressungen, welche sie auf den Faden ausübte, Kräfte nach denselben Richtungen und von denselben Intensitäten auf ihn wirken lässt, Kräfte also, deren Richtungen überall normal auf dem Faden sind, in seiner Krümmungsebene liegen und von seiner hohlen Seite nach der erhabenen zu gehen, deren Intensität aber für jeden einzelnen Punkt des Fadens als verschwindend zu betrachten ist, indem die Resultante aller der auf einen unendlich kleinen Theil ds des Fadens wirkenden Kräfte ebenfalls unendlich klein, $= Pds$ ist, wo P die Spannung, dividirt durch den Krümmungshalbmesser, bedeutet (§. 273.).

Soll umgekehrt ein frei beweglicher Faden im Gleichgewichte seyn, wenn dessen Anfangs- und Endpunkt unbeweglich sind, und wenn normal auf jedes seiner Elemente ds eine Kraft Pds wirkt, wo P eine von einem Punkte des Fadens zum andern nach einem noch zu bestimmenden Gesetze veränderliche Grösse ist, so muss die Richtung der Kraft in der Krümmungsebene des Elements liegen, und P dem Krümmungshalbmesser umgekehrt proportional seyn. Denn am Elemente ds oder AB (Fig. 76.) halten sich die Kraft Pds und die zwei Spannungen an den Endpunkten A und B des Elements das Gleichgewicht. Die Kraft Pds muss daher mit den an die Fadencurve in A und B gelegten Tangenten AC und BD, als den Richtun-

n der Spannungen, in einer Ebene, also in der Krümmungsebene des Elements, liegen. Sie muss ferner rch den Durchschnitt *N* dieser Tangenten, und weil zugleich auf dem Elemente normal seyn soll, durch n Mittelpunkt *M* seiner Krümmung gehen. Da hierch die Richtung von *Pds* den Winkel *CND* halbirt, sind die Spannungen in *A* und *B*, und eben so in zwei andern unendlich nahe auf einander folgenden nkten gleich gross, also die Spannung in allen Punkn des Fadens von constanter Grösse. Diese Spanng aber verhält sich zur Kraft *Pds* wie sin *ANM* zu *AMB* (§. 274. *a.*), d. i. wie *AM* oder der Krümngshalbmesser zu *AB*, $= ds$, woraus das Uebrige n selbst folgt.

---

§. 280.

Die so eben angestellte Betrachtung über das leichgewicht eines Fadens, auf welchen überall norale Kräfte wirken, wollen wir jetzt ganz verallgemeirn und die Bedingungen des Gleichgewichts zu bemmen suchen, wenn auf jedes Element *ds* eines vollmmen biegsamen und bis auf seine zwei befestigten dpunkte frei beweglichen Fadens eine der Länge des ements proportionale, übrigens aber ihrer Intensität d Richtung nach beliebig gegebene, Kraft *Pds* wirkt.

Sey demnach in Bezug auf ein rechtwinkliches ordinatensystem die Kraft *P* aus den drei mit den ordinatenaxen parallelen Kräften *X*, *Y*, *Z* zusammengesetzt, und diese Kräfte irgend welche Functionen der Coordinaten *x*, *y*, *z*, welche einem Punkte des ements *ds* zugehören. Den Faden wollen wir uns, e im Obigen, aus einander sich berührenden einanr gleichen Kugeln gebildet vorstellen, deren jede

einen Durchmesser $= ds$ hat. Sey m (Fig. 78.) eine dieser Kugeln, welche die vorhergehende $m_{,}$ in A und die folgende m' in A' berühre. Die Mittelpunkte von $m_{,,}$ m, m', seyen $C_{,}$, C, C', so ist $AA' = C_{,}C = CC' = ds$, und wenn x, y, z die Coordinaten von C bezeichnen, so sind $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die Coordinaten von C'. Die auf den Fadentheil $AA' = ds$, also bei der gegenwärtigen Vorstellung, auf die Kugel m, wirkende Kraft Pds haben wir uns am Mittelpunkte C der Kugel angebracht zu denken. Sie muss im Gleichgewichte seyn mit den Spannungen, welche die Kugel m von den anliegenden $m_{,}$ und m' in A und A' erleidet. Man setze deshalb die von m auf $m_{,}$ in A nach der Richtung $C_{,}C$ ausgeübte Spannung $= T$, und die von m' auf m in A' nach der Richtung CC' ausgeübte $= T'$. Diese Spannungen werden bei der Allgemeinheit der jetzigen Untersuchung nicht mehr, wie im Vorigen, einander gleich, sondern als Functionen der Coordinaten von A und A' anzusehen seyn, so dass, weil $AA' = ds$ ist, T' eben so von $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, wie T von x, y, z, abhängt, und daher $T' = T + dT$ ist. Die Spannung T, nach den Coordinatenaxen zerlegt, gebe die Kräfte U, V, W; sie sind, weil T die Richtung des Elements $C_{,}C$ hat:

$$(1)\quad U = T\frac{dx}{ds},\quad V = T\frac{dy}{ds},\quad W = T\frac{dz}{ds},$$

sind also gleichfalls Functionen von x, y, z. Die Spannung T', nach denselben Axen zerlegt, wird daher die Kräfte $U + dU$, $V + dV$, $W + dW$ geben.

Die an der Kugel m sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte sind demnach: erstens die Kraft Pds oder (Xds, Yds, Zds); zweitens die von m' ausgeübte,

nach CC' gerichtete Spannung T' oder $(U + dU, V + dV, W + dW)$, und drittens die von m, nach der Richtung $CC_{,}$ ausgeübte und durch $(-U, -V, -W)$ auszudrückende Spannung, da sie der Spannung T oder (U, V, W) gleich und entgegengesetzt ist. Sämmtliche drei Kräfte schneiden sich, wie gehörig, in einem Punkte C, und wir haben somit nach §. 67. Zus. die drei Bedingungsgleichungen: $Xds + U + dU - U = 0$, etc. d. i.

(2) $Xds + dU = 0, \quad Yds + dV = 0, \quad Zds + dW = 0,$

oder $Xds + d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad Yds + d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0,$

$$Zds + d\left(T\frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

Aus den Gleichungen (2) und den vorigen (1) sind nun, wie bei jedem andern Problem der Statik, welches ein System mit einander verbundener Körper betrifft, noch die Spannungen zu eliminiren; dies aber kann hier nur durch Infinitesimalrechnung geschehen. In der That folgt aus (2) durch Integration:

(3) $\int Xds + U = 0, \quad \int Yds + V = 0, \quad \int Zds + W = 0.$

wo die noch hinzuzufügenden Constanten unter dem Zeichen mit begriffen sind. Hieraus aber fliessen in Verbindung mit (1) die zwei Bedingungen des Gleichgewichts:

$$(4) \quad \frac{dx}{\int Xds} = \frac{dy}{\int Yds} = \frac{dz}{\int Zds}.$$

§. 281.

Zusätze. *a.* Die gemachte Voraussetzung, dass die Elemente ds von gleicher Länge seyen, braucht bei den erhaltenen Gleichungen nicht mehr beachtet zu

werden, da in ihnen nur Differentiale der ersten Ordnung vorkommen. Es kann daher, statt ds, auch von einer der übrigen veränderlichen Grössen das erste Differential constant gesetzt werden, so dass je zwei nächstfolgende ds um ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung von einander verschieden sind. Auch sieht man leicht, dass die zu Anfange des vor. §. gemachten Schlüsse an Richtigkeit nicht verlieren, wenn man die Durchmesser je zweier an einander liegenden Kügelchen um die zweite Ordnung von einander verschieden seyn lässt.

b. Den Gleichungen (4) kann man nach Wegschaffung der Bruchform, und wenn man von neuem integrirt, auch die Gestalt der drei Integralgleichungen geben:

$$(4^*)\quad\begin{cases}\int dz\int Yds-\int dy\int Zds=0,\\ \int dx\int Zds-\int dz\int Xds=0,\\ \int dy\int Xds-\int dx\int Yds=0,\end{cases}$$

von denen jede eine Folge der beiden übrigen ist, und wo die neu hinzuzufügenden Constanten unter den neuen Integrationszeichen mit begriffen sind.

Diese Gleichungen lassen sich noch unter einer besondern Bedeutung auffassen. Man kann nämlich, mit Anwendung der bekannten Reductionsformel $\int udv=uv-\int vdu$, statt der dritten Gleichung z. B., — die, wenn die Kräfte, und mithin auch die Fadencurve, in einer einzigen Ebene (der x, y) enthalten sind, die alleinige Bedingung des Gleichgewichts ist, — auch schreiben:

$$(a)\quad y\int Xds-\int yXds-x\int Yds+\int xYds=0.$$

Hierin gehören die Coordinaten x, y, welche ausserhalb des Zeichens $\int$ stehen, dem Punkte der Fadencurve an, bis zu welchen man integrirt, während

e unter dem Zeichen befindlichen x, y sich auf alle m Anfangspunkte bis dahin liegenden Zwischenpunkte r Curve beziehen. Bezeichnet man daher erstere oordinaten, um sie von den letztern zu unterscheiden, rch x', y', so kann man für (α) auch setzen:

$$\int[(x-x')\,Yds-(y-y')\,Xds]=0.$$

Da nun x, y die Coordinaten des Elements ds sind, id daher das in Klammern Eingeschlossene nichts anres, als das Moment der auf ds wirkenden Kraft Xds, Yds) in Bezug auf den Punkt (x', y') ist, so ückt die Gleichung unter dieser Form aus, dass das oment aller auf den Faden von seinem Anfange bis m Punkte (x', y') wirkenden Kräfte in Bezug auf m letztern Punkt null ist.

Ist die Curve nicht in einer Ebene, oder doch nicht der Ebene der x, y, begriffen, so zeigt dieselbe leichung an, dass das Moment der Kräfte, welie auf den Faden von seinem Anfange bis zum unkte (x', y', z'), bis zu welchen man die Integration streckt, wirken, in Bezug auf eine durch den letzrn Punkt parallel mit der Axe der z gelegte Axe ill ist. Analoge Bedeutung haben die zwei ersten leichungen in (4*) rücksichtlich der Axen der x und er y.

Der unmittelbare Grund dieses Ergebnisses liegt ffenbar darin, dass, wenn der Faden im Gleichgeichte ist, an jedem Theile desselben die auf die Eleente des Theils wirkenden Kräfte und die Spannunen am Anfange und Ende des Theils eben so, wie an inem frei beweglichen festen Körper, im Gleichgewichte iit einander seyn müssen. Zugleich folgt hieraus, dass ian zu den drei Integralen $\int Xds$, $\int Yds$, $\int Zds$ die nach

den drei Coordinatenaxen zerlegte Spannung in dem Punkte, von welchem man die Integrale anfangen lässt, als Constanten hinzuzufügen hat.

c. Umgekehrt kann man mit Hülfe des Princips, dass bei jedem vom Anfange des Fadens an gerechneten Theile desselben die Kräfte an den Elementen mit den Spannungen am Anfange und Ende des Theils das Gleichgewicht halten, ganz leicht die Bedingungsgleichungen (4*) herleiten. Denn, um dieses nur für den Fall zu zeigen, wenn die Kräfte in einer und derselben Ebene wirken, so wird das gedachte Gleichgewicht nach §. 38. durch die drei Gleichungen bedingt:

$$\int X ds + U = 0, \quad \int Y ds + V = 0,$$
$$\int x Y ds + x V - \int y X ds - y U = 0,$$

wo (U, V) die Spannung am unbestimmten Ende (x, y) des Theils ist, die Spannung am bestimmten Anfange aber unter dem Zeichen mit begriffen ist. Werden nun hieraus U und V eliminirt, so kommt nach gehöriger Reduction die bereits erhaltene Gleichung:

$$\int dy \int X ds - \int dx \int Y ds = 0.$$

Dass die Spannung (U, V) im Punkte (x, y) in tangentialer Richtung wirkt, ist eine unmittelbare Folge aus diesen Gleichungen. Denn es verhält sich nach ihnen:

$$dx : dy = \int X dx : \int Y ds = U : V.$$

d. Jedes der drei Integrale $\int X ds$, $\int Y ds$, $\int Z ds$ enthält eine willkührliche Constante. Die Gleichung für die Fadencurve in einer Ebene enthält daher drei willkührliche Constanten, und die zwei von einander unabhängigen Gleichungen für die Curve im Raume begreifen fünf Constanten in sich.

Jene drei Constanten bei einer Curve in einer

me, so wie diese fünf bei einer Curve im Raume, en sich unter andern dadurch bestimmen, dass man i Punkte, durch welche die Curve gehen soll, und Länge des dazwischen begriffenen Stückes der ve gegeben seyn lässt. Denn soll eine Curve einen ebenen Punkt enthalten, so müssen, nachdem die ve eben ist, oder nicht, zwischen den Coordinaten Punktes und den Constanten in der einen oder den i Gleichungen der Curve eine oder zwei Bedingungs-ichungen erfüllt seyn; und die Forderung, dass der schen zwei gegebenen Punkten der Curve enthaltene eil derselben von gegebener Länge sey, führt, die ve mag eben seyn, oder nicht, zu einer einzigen ichung zwischen der gegebenen Länge und den stanten der Curve. Man hat daher in jedem der len Fälle eben so viel Gleichungen, als zu bestimmde Constanten.

§. 282.

Die Gleichungen für das Gleichgewicht am Faden den in §. 280. aus den Gleichungen (1) und (2) ch Elimination der Spannung hergeleitet. Diese nination kann aber nicht allein, wie dort geschah, ch Integration, sondern auch durch Differentiation erkstelligt werden. Setzt man zu diesem Ende die ferentialquotienten

$$(5)\quad \frac{dx}{ds}=\xi,\ \frac{dy}{ds}=\eta,\ \frac{dz}{ds}=\zeta, \text{ wo daher}$$

$$(6)\quad \begin{cases}\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1, \text{ und}\\ \xi d\xi+\eta d\eta+\zeta d\zeta=0,\end{cases}$$

folgt aus (1) durch Differentiation: $dU = Td\xi +$ T, etc., und wenn man diese Werthe von dU, dV, V in (2) substituirt:

$$(2^*)\quad \begin{cases} Xds + Td\xi + \xi dT = 0, \\ Yds + Td\eta + \eta dT = 0, \\ Zds + Td\zeta + \zeta dT = 0. \end{cases}$$

Um nun zuerst aus diesen Gleichungen T und dT mit einem Male zu eliminiren, multiplicire man sie resp. mit den Coefficienten l, m, n, addire sie und bestimme die Coefficienten so, dass

$$(a)\quad \begin{cases} l\xi + m\eta + n\zeta = 0, \\ ld\xi + md\eta + nd\zeta = 0, \end{cases}$$ so ist auch

$$(b)\quad lX + mY + nZ = 0.$$

Aus (a) aber folgt $l : m : n = \eta d\zeta - \zeta d\eta :$ etc., mithin

$$(7)\quad X(\eta d\zeta - \zeta d\eta) + Y(\zeta d\xi - \xi d\zeta) + Z(\xi d\eta - \eta d\xi) = 0,$$

eine von der Spannung freie Gleichung, welche zu erkennen giebt, *dass die Richtung der Kraft* (X, Y, Z) *oder* P *in der Krümmungsebene der Fadencurve liegen muss.* Denn nehmen wir den Punkt (x, y, z) zum Anfangspunkte der Coordinaten, so geht diese Ebene durch die drei auf einander folgenden Punkte der Curve: $(0, 0, 0)$, (dx, dy, dz) oder $(\xi ds, \eta ds, \zeta ds)$ und $(2dx + d^2x, 2dy + d^2y, 2dz + d^2z)$ oder $(2\xi ds + d\xi ds + \xi d^2s, \ldots)$. Setzen wir daher die Gleichung der durch den jetzigen Anfangspunkt gehenden Krümmungsebene:

$$lu + mv + nw = 0,$$

wo u, v, w die Coordinaten bezeichnen, so muss seyn:

$$l\xi ds + m\eta ds + n\zeta ds = 0,$$
$$l[\xi(2ds + d^2s) + d\xi ds] + \ldots = 0;$$

und diese zwei Gleichungen lassen sich, wie man augenblicklich wahrnimmt, auf die Gleichungen (a) reduciren. Der Gleichung (b) zufolge ist aber auch die Richtung von (X, Y, Z) in dieser Ebene begriffen.

Der statische Grund, aus welchem die Kraft P in

r Krümmungsebene enthalten seyn muss, liegt be-
eiflich darin, dass die Krümmungsebene des Elements
durch die zwei an den Anfangs- und Endpunkt des
lements gelegten Tangenten bestimmt wird, und dass
it den zwei nach diesen Tangenten wirkenden Span-
ungen des Elements die Kraft Pds das Gleichgewicht
ilt.

— Ausser der Gleichung (7) kann man aus (2*)
och eine von T und dT freie Gleichung erhalten, in-
m man daraus T und dT einzeln bestimmt und als-
ann den Werth von dT dem Differentiale des Wer-
es von T gleich setzt. Die auf diese Weise sich
gebende Gleichung enthält daher noch die Differen-
ale von X, Y, Z; sie vertritt in Verbindung mit (7)
e Stelle der zwei Integralgleichungen (4).

§. 283.

Zusätze. *a.* Um die Werthe von T und dT aus
n drei Gleichungen (2*) zu finden, hat man jedesmal
r zwei der letztern zu berücksichtigen nöthig. Sollen
er diese Werthe zugleich eine symmetrische Form ha-
n, so kann man folgendergestalt verfahren. Man
ltiplicire die Gleichungen (2*) resp. mit ξ, η, ζ und
dire sie, so kommt mit Anwendung von (5) und (6):

$$(8)\quad Xdx + Ydy + Zdz + dT = 0.$$

Eben so findet sich durch Addition derselben Glei-
ungen, nachdem man sie zuvor mit $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ mul-
plicirt hat:

$$(Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta)ds + T(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) = 0,$$

ler, wenn r den Krümmungshalbmesser bezeichnet:

$$(9)\quad Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta + T\frac{ds}{r^2} = 0;$$

denn bekanntlich ist $r = \frac{ds}{\sqrt{(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)}}$ *).

b. Berechnet man aus (2°) noch die Quadrate von X, Y, Z und addirt sie, so kommt:

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)ds^2 = T^2 (d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) + dT^2,$$

oder einfacher, weil $X^2 + Y^2 + Z^2 = P^2$, und mit Einführung von r:

$$(10) \quad P^2 = \frac{T^2}{r^2} + \frac{dT^2}{ds^2}.$$

c. Weil $X, Y, Z = P$, resp. multiplicirt in die Cosinus der Winkel, welche die Richtung von P mit den Coordinatenaxen macht, und weil dx, dy, $dz = ds$, resp. multiplicirt in die Cosinus der Winkel von ds mit denselben Axen, so ist, wenn φ den Winkel von P mit ds bezeichnet: $Xdx + Ydy + Zdz = P \cos\varphi\, ds$. Hiermit reducirt sich die Gleichung (8) auf

$$(11) \quad P \cos\varphi\, ds + dT = 0,$$

---

*) Diese Formel für den Krümmungshalbmesser dürfte sich am einfachsten also beweisen lassen. — Seyen ds und ds' zwei nächstfolgende, und daher ihrer Länge nach höchstens um ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung verschiedene Curvenelemente. Man denke sich dieselben als geradlinig und nenne ω den unendlich kleinen Winkel, den ds' mit der Verlängerung von ds macht, so ist, wie man weiss, $r = \frac{ds}{\omega}$. Man beschreibe hierauf um den Anfangspunkt der Coordinaten, als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser = 1, eine Kugel und lege durch ihren Mittelpunkt mit ds und ds' zwei Parallelen, welche die Kugelfläche in S und S' treffen, so ist $SS' = \omega$. Da nun nach (5), ξ, η, ζ die Cosinus der Winkel sind, welche das Element ds mit den Coordinatenaxen bildet, so sind ξ, η, ζ zugleich die Coordinaten von S, und eben so $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$ die Coordinaten von S', folglich $\omega = SS' = \sqrt{(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)}$, woraus obenstehender Ausdruck für r hervorgeht.

und wenn wir den hieraus fliessenden Werth von dT in (10) substituiren und die Wurzel ausziehen:

$$(12) \quad P\sin\varphi = \frac{T}{r}.$$

d. Aus (11) und (12) folgt nach Wegschaffung von T:

$$(13) \quad Pr\sin\varphi + \int P\cos\varphi\, ds = 0.$$

Diese Gleichung und die Gleichung (7), oder der Satz, dass die Richtung der Kraft überall in der Krümmungsebene der Fadencurve liegen muss, enthalten demnach ebenfalls sämmtliche Bedingungen für das Gleichgewicht des Fadens.

e. Man sieht leicht, wie man zu den sehr einfachen Gleichungen (11) und (12) auch unmittelbar gelangen kann. Sind nämlich C,C und CC' (Fig. 78.) zwei auf einander folgende Elemente des Fadens und bezeichnet man den unendlich kleinen Winkel von C,C mit CC' durch ω, so müssen an C in der Ebene C,CC' die drei Kräfte Pds, T, T', deren Richtungen mit CC' resp. die Winkel φ, $180^\circ + \omega$, 0 machen, im Gleichgewichte seyn. Dies führt zu den zwei Gleichungen:

$$P\cos\varphi\, ds - T\cos\omega + T' = 0,$$
$$P\sin\varphi\, ds - T\sin\omega = 0,$$

welche mit der Bemerkung, dass $T\cos\omega$ von T nur um ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung verschieden ist, und dass $ds : \sin\omega = ds : \omega = r$, in (11) und (12) übergehen.

f. In dem besonderen Falle, wenn jede Kraft Pds auf ihrem Elemente normal, also φ immer $= 90^\circ$ ist, wird nach (11) $dT = 0$, und nach (12) $P = T : r$, also T constant, und P umgekehrt dem r proportional, — beides übereinstimmend mit den schon oben (§. 279.) für diesen Fall erhaltenen Resultaten.

Setzen wir umgekehrt $dT = 0$, so folgt aus (11) $\varphi = 90°$, und aus (12) $P = T : r$, d. h. P ist auf der Fadencurve normal und im umgekehrten Verhältnisse mit r. Hieraus fliesst folgender für die analytische Geometrie bemerkenswerthe Lehrsatz:

Sind x, y, z die rechtwinklichen Coordinaten einer Curve im Raume, und X, Y, Z solche Functionen von x, y, z, dass den Gleichungen

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$
$$\frac{dx}{\int Xds} = \frac{dy}{\int Yds} = \frac{dz}{\int Zds}$$

Genüge geschieht, so hat eine durch den Punkt (x, y, z) der Curve gelegte gerade Linie, von welcher X, Y, Z die rechtwinkligen Projectionen auf die drei Coordinatenebenen sind, die Richtung des Krümmungshalbmessers daselbst und ist ihrer Länge nach demselben umgekehrt proportional, welche daher, wenn a eine gewisse, noch zu bestimmende Constante bezeichnet, $= a : \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$ ist.

Ist die Curve in einer Ebene enthalten, und lässt man diese die Ebene der x, y seyn, so werden z und Z null, und die vorigen Gleichungen reduciren sich auf

$$Xdx + Ydy = 0,$$
$$dx \int Yds = dy \int Xds.$$

Man setze nun $X = -P\frac{dy}{ds}$, so wird wegen der erstern dieser Gleichungen $Y = P\frac{dx}{ds}$, mithin $P = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$, und die letztere verwandelt sich in:

$$dx \int Pdx + dy \int Pdy = 0.$$

Diese einfache Gleichung besitzt demnach die merkwürdige Eigenschaft, dass der durch sie bestimmte

Werth von P umgekehrt dem Krümmungshalbmesser der ebenen Curve proportional ist, von welcher x und y die rechtwinkligen Coordinaten sind *).

§. 284.

Untersuchen wir noch die Bedingungen des Gleichgewichts, wenn der in allen seinen Theilen der Wirkung von Kräften unterworfene Faden nicht mehr frei, wie in den vorigen §§., sondern auf einer gegebenen Fläche beweglich ist. Alsdann wirkt auf jedes Element ds desselben ausser der Kraft Pds noch der Druck der Fläche. Dieser Druck ist auf der Fläche rechtwinklig, und kann, da er der Länge des Elements gleichfalls proportional ist, $= Rds$ gesetzt werden. Man kann daher aus den obigen für das Gleichgewicht eines freien Fadens gegebenen Formeln sogleich die für den

*) Dies lässt sich auch leicht geradezu darthun. Sey zu dem Ende $dy = pdx$, so wird die Gleichung

$$-\int Pdx = p\int Ppdx$$

und wenn man differentiirt:

$$-Pdx = dp\int Ppdx + Pp^2dx.$$

Bringt man diese Gleichung unter die Form

$$\frac{Ppdx}{\int Ppdx} = -\frac{pdp}{1+p^2}$$

und integrirt dann wiederum, so kommt:

$$\log \int Ppdx = \log C - \tfrac{1}{2}\log(1+p^2),$$

wo $\log C$ die hinzuzufügende Constante ist. Eine abermalige Differentiation der letztern Gleichung, nachdem sie vorher auf die Form

$$\int Ppdx = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}}$$

gebracht worden, giebt endlich

$$-\frac{C}{P} = (1+p^2)^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{dp}.$$

Dieser dem P umgekehrt proportionale Ausdruck ist aber bekanntlich der des Krümmungshalbmessers.

jetzigen Fall herleiten, indem man statt Pds die Resultante von Pds und Rds setzt.

Ist nun $F=0$ die Gleichung für die gegebene Fläche, so sind $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$ den Cosinussen der Winkel, welche die Normale der Fläche, also die Richtung von Rds, mit den Axen der x, y, z macht, proportional. Diese partiellen Differenzen, dividirt durch die Quadratwurzel aus der Summe ihrer Quadrate, sind mithin die Cosinus selbst, welche wir, als durch F bestimmte Functionen von x, y, z, resp. $=u$, v, w setzen wollen. Die Kraft Rds, nach den drei Axen zerlegt, giebt daher die Kräfte $Ruds$, $Rvds$, $Rwds$ und die Gleichungen (2) in §. 280. werden damit:

$$(14)\quad \begin{cases} Xds + Ruds + d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0, \\ Yds + Rvds + d\left(T\frac{dy}{ds}\right)=0, \\ Zds + Rwds + d\left(T\frac{dz}{ds}\right)=0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen R und T, — am vortheilhaftesten aber ist es, diese Elimination in jedem speciellen Falle besonders zu verrichten, — so erhält man die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts. Sind X, Y, Z gegebene Functionen von x, y, z, so lässt diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung für die Fläche die zum Gleichgewichte nöthige Curve des Fadens erkennen.

§. 285.

Zusatz. Aus der Gleichung für die Fläche: $F=0$, folgt:

$$\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}dz=0,$$

mithin auch, weil u, v, w den partiellen Differenzen von F nach x, y, z proportional sind:

$$udx + vdy + wdz = 0.$$

Multiplicirt man daher die Gleichungen (14) resp. mit dx, dy, dz und addirt sie hierauf, so kommt, wie im §. 283. *a.*, bei einem freien Faden:

$$Xdx + Xdy + Zdz + dT = 0.$$

Wenn folglich nur auf den Anfang und das Ende des über die Fläche gelegten Fadens ihn spannende Kräfte wirken, und daher X, Y, $Z = 0$ sind, so ist auch $dT = 0$, d. h. die Spannung ist von einem Punkte des Fadens zum andern constant. In diesem Falle lassen sich die Gleichungen (14) also schreiben:

(14*) $Ruds = -Td\xi$, $Rvds = -Td\eta$, $Rwds = -Td\zeta$,

wo ξ, η, ζ die in §. 282. angegebene Bedeutung haben. Es folgt hieraus:

$$u(\eta d\zeta - \zeta d\eta) + v(\zeta d\xi - \xi d\zeta) + w(\xi d\eta - \eta d\xi) = 0.$$

Die durch den Punkt (x, y, z) gehende Gerade, deren Projectionen auf die Axen der x, y, z sich wie u, v, w verhalten, d. i. die Normale der Fläche im Punkte (x, y, z), ist demnach in der Krümmungsebene der Fadencurve enthalten (§. 282.), oder mit andern Worten: in jedem Punkte des Fadens ist seine Krümmungsebene auf der Fläche normal.

Addirt man endlich die Quadrate der Gleichungen (14*), so erhält man, weil u, v, w die Cosinus der drei Winkel einer Geraden mit den Coordinatenaxen sind, und daher $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ ist:

$$R^2 = \frac{T^2(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)}{ds^2} = \frac{T^2}{r^2} \text{ (§. 283.}a.\text{)},$$

d. h. der Druck der Fläche ist der Spannung, dividirt

durch den Krümmungshalbmesser gleich, — Alles übereinstimmend mit den schon in §. 272. und §. 273. gefundenen Resultaten.

§. 286.

Die Kraft P in dem Ausdrucke Pds ist, wie bereits erinnert worden (§. 274. *b.*), die Resultante von Kräften, welche auf eine Linie, deren Länge $= 1$, nach parallelen Richtungen wirken, dergestalt, dass jedes Element der Linie, welches mit dem Elemente ds des Fadens gleiche Länge hat, von derselben Kraft, wie dieses ds, afficirt wird. Da aber in der Wirklichkeit jedes Element des Fadens ein kleiner physischer Körper ist und, als solcher, eine gewisse Masse hat, und da die Schwerkraft und die andern in der Natur vorkommenden Kräfte sich über alle Theilchen eines Körpers, der Masse der Theilchen proportional, verbreiten, so pflegt man die auf ein Fadenelement wirkende Kraft dadurch zu bestimmen, dass man die Stärke der Kraft bei einer Masse $= 1$ angiebt, also annimmt, dass an einem Körper, dessen Masse $= 1$, auf jedes Theilchen, dessen Masse der des Fadenelements gleich ist, eine eben so grosse Kraft, als auf dieses Element, nach paralleler Richtung wirke, und von allen diesen parallelen Kräften die Resultante bestimmt.

Hat nun die Kraft P diese letztere Bedeutung, so muss man sie, um ihre Wirkung auf das Element ds zu erhalten, in die Masse des Elements multipliciren. Letztere ist, wenn die Dichtigkeit des Elements $= \varrho$, und der auf seiner Länge rechtwinklige Durchschnitt $= \varepsilon$ gesetzt wird, $= \varrho \varepsilon ds$, und folglich $P\varrho\varepsilon ds$ der dann statt des vorigen Pds zu substituirende Ausdruck. Auf

gleiche Art hat man statt der vorigen X, Y, Z dieselben Grössen, noch mit $\varrho\varepsilon$ multiplicirt, zu setzen. Dabei sind ϱ und ε, als von einem Punkte des Fadens zum andern im Allgemeinen veränderliche Grössen, Functionen der von seinem Anfangspunkte bis zum Punkte (x, y, z) gerechneten Länge s des Fadens, also auch Functionen von x, y, z selbst.

Von der Kettenlinie.

§. 287.

Die bisher vorgetragene allgemeine Theorie des Gleichgewichts an einem vollkommen biegsamen Faden wollen wir jetzt auf den einfachen Fall anwenden, *wenn sämmtliche auf die Elemente des Fadens wirkende Kräfte einander parallel sind, der Faden selbst aber nur mit seinen beiden Endpunkten befestigt, sonst frei beweglich ist.* Man lege zu dem Ende das Coordinatensystem so, dass die Axe der y parallel mit den Kräften wird, so ist durchweg $X = 0$, $Z = 0$, folglich $\int X ds = A$, $\int Z ds = C$, wo A und C noch zu bestimmende Constanten bedeuten, und man erhält nach den Formeln (4) in §. 280:

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{\int Y ds} = \frac{dz}{C}.$$

Hieraus fliesst durch nochmalige Integration

$$Az = Cx + D,$$

d. h. *die Fadencurve ist in einer* mit der Axe der y, also *mit den Kräften parallelen Ebene enthalten.* Werde diese Ebene zu der Ebene der x, y genommen. Weil $z = 0$ die Gleichung der letztern ist, so werden

damit $C=0$ und $D=0$, und wir haben nur noch die Gleichung

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{\int Y ds} \text{ oder } \int Y ds = Ap, \text{ wo } p=\frac{dy}{dx},$$

zu berücksichtigen, woraus sich, wenn Y, als Function von x und y, gegeben ist, die Gleichung für die Fadencurve, und umgekehrt, wenn letztere gegeben ist, die Function Y finden lässt.

Die Spannung T des Fadens im Punkte (x, y) ist aus den zwei mit den Axen der x und y parallelen Theilen $U=-\int X ds=-A$ und $V=-\int Y ds=-Ap$ zusammengesetzt (§. 280.), mithin

$$T=-A\sqrt{1+p^2}=-A\frac{ds}{dx}.$$

Die Spannung ist daher in jedem Punkte umgekehrt dem Sinus des Winkels proportional, den die den Faden daselbst Berührende mit der Axe der y, d. i. mit der Richtung der Kräfte, macht.

Sind demnach NK und $N'K'$ (Fig. 79.) zwei an zwei Punkte N und N' des Fadens gelegte Tangenten und schneiden dieselben eine mit den Kräften parallel gezogene Gerade IKK' in K und K', sich selbst aber in L, so verhalten sich die Spannungen in N und N', wie die Sinus von $IK'N'$ und IKN, also auch wie KL und $K'L$, d. h.:

Zwei einen Faden, der unter Einwirkung paralleler Kräfte im Gleichgewichte ist, berührende Seiten eines Dreiecks, dessen dritte Seite mit den Kräften parallel ist, verhalten sich wie die Spannungen des Fadens in den Berührungspunkten.

§. 288.

Der in der Wirklichkeit am häufigsten vorkommende ıd am meisten interessirende Fall ist derjenige, wenn r Faden überall gleiche Dicke und Dichtigkeit hat, ıd wenn die auf ihn wirkende Kraft die Schwerkraft . Die unter diesen Umständen vom Faden gebildete ırve heisst vorzugsweise die **Kettenlinie.** Da die hwerkraft nach verticaler Richtung von oben nach ten auf gleiche Massen gleiche Wirkung ausübt, so ;, wenn wir ihre Wirkung auf einen Fadentheil, desn Länge $= 1$ ist, oder das Gewicht dieses Theils, g nnen, g eine constante Grösse, und wir haben, wenn r die positive Richtung der Axe der y vertical, von ten nach oben gehend, annehmen, $Y = -g$ zu tzen. Hiermit wird $\int Yds = -gs + B$, und die obige dingungsgleichung geht über in:

$$-gs + B = Ap.$$

Von welchem Punkte aus die Fadenlänge, nach der nen Seite zu positiv, nach der andern negativ, gehnet wird, ist noch willkührlich. Werde hierzu dernige Punkt S (Fig. 80.) genommen, in welchem die angente der Curve horizontal, also $p = 0$ ist. Weil ernach s und p zugleich null werden sollen, so wird ıch die Constante $B = 0$, und die Gleichung reducirt h auf

$$hs = p,$$

nn man noch $-\frac{g}{A} = h$ setzt.

Dies ist demnach die Gleichung der Kettenlinie, ıd zwar in der möglich einfachsten Form. Sie beeht zwischen den von S aus gerechneten Bogen s ıd der trigonometrischen Tangente p des Winkels, n die an die Curve gelegte Berührende mit der ho-

rizontalen Axe der x macht. Da der Gleichung zufolge je zwei einander gleichen, aber entgegengesetzten Werthen von s auch gleiche und entgegengesetzte Werthe von p zugehören, so leuchtet ein, dass die Curve von einer durch S gelegten Verticale in zwei symmetrische Hälften getheilt wird, und dass daher S in derselben Bedeutung, wie bei andern geometrischen Curven, der Scheitel der Kettenlinie ist.

Durch Worte ausgedrückt, würde hiernach die Gleichung $hs = p$ also lauten:

Jeder von dem Scheitel an gerechnete Bogen einer Kettenlinie ist der trigonometrischen Tangente des Winkels proportional, welchen die an den Endpunkt des Bogens gelegte Berührende mit der Berührenden am Scheitel macht.

Da übrigens die Curve eines im Gleichgewichte befindlichen Fadens der Richtung, nach welcher die Kräfte wirken, stets ihre erhabene Seite zukehrt (vergl. §. 274. *e.*), so ist die Kettenlinie nach unten zu erhaben, und der Scheitel S, in welchem die Tangente horizontal liegt, muss der tiefste Punkt der Linie seyn.

§. 289.

Um die Kettenlinie construiren zu können, wollen wir noch ihre Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y entwickeln. Sey deshalb der Winkel der an die Curve im Punkte (x, y) gelegten Tangente mit der Axe der y, $=\psi$, so ist

$$dx = ds \,.\, \sin\psi, \quad dy = ds \,.\, \cos\psi, \quad p = \cot g\,\psi.$$

Die Differentialgleichung $hds = dp$ der vorigen: $hs = p$, wird damit

$$\frac{hdx}{\sin\psi} = \frac{hdy}{\cos\psi} = -\frac{d\psi}{\sin\psi^2},$$

folglich $hdx = -\frac{d\psi}{\sin\psi}$, $hdy = -\frac{d.\sin\psi}{\sin\psi^2}$, woraus durch Integration

$$hx = -\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi + c,\ hy = \frac{1}{\sin\psi} + c'$$

fliesst. Die Werthe der Constanten c und c' hängen von der Wahl des Anfangspunktes der Coordinaten ab. Man bestimme diesen, der Einfachheit willen, so, dass c und c' null werden, dass also für $\psi = 90°$, d. h. für den Scheitel, $x = 0$ und $y = 1 : h$ wird, dass folglich der Anfangspunkt O vertical unter dem Scheitel und von ihm um einen Abstand $OS = 1 : h$ entfernt liegt. Hiermit werden die vorigen zwei Gleichungen:

$$hx = -\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi \text{ oder } \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi = e^{-hx},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, und

$$hy = 1 : \sin\psi = \tfrac{1}{2}(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\psi + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi),$$

mithin, wenn man ψ eliminirt:

$$hy = \tfrac{1}{2}\left(e^{hx} + e^{-hx}\right),$$

oder in noch einfacherer Form:

$$hy = \cos(hx\sqrt{-1}).$$

Dies ist demnach die gesuchte Gleichung der Kettenlinie zwischen x und y. Die Linie $1 : h$, — denn h ist von der Dimension -1, — drückt den Parameter der Curve aus. Die jetzige Axe der x, also die Horizontale, welche um einen dem Parameter gleichen Abstand unter dem Scheitel liegt, wollen wir die Directrix der Kettenlinie nennen.

§. 290.

Zusätze. *a.* Da sich in der erhaltenen Gleichung der Werth von y nicht ändert, wenn man den von x

in den entgegengesetzten verwandelt, so bestätigt sich damit die obige Bemerkung (§. 288.), dass durch die Axe der y die Curve symmetrisch getheilt wird.

b. Die Kettenlinie ist eine rectificirbare Curve. Denn man hat für den vom Scheitel anfangenden Bogen s:

$$hs = p = \cot g\,\psi = \tfrac{1}{2}(\cot g\,\tfrac{1}{2}\psi - \tang\,\tfrac{1}{2}\psi),$$

$$\text{also } hs = \tfrac{1}{2}\left(e^{hx} - e^{-hx}\right),$$

$$\text{oder } hs = -\sqrt{-1}\,\sin(hx\sqrt{-1}).$$

So wie daher, wenn man den Parameter zur Linieneinheit nimmt, die Ordinate y der Cosinus der imaginär genommenen Abscisse ist, so ist von derselben imaginären Grösse der Bogen s der imaginär und negativ genommene Sinus *).

Aus den durch x ausgedrückten Werthen von y und s folgt ferner:

$$h(y+s) = e^{hx},\; h(y-s) = e^{-hx},$$

und hieraus: $h^2(y^2 - s^2) = 1$, d. h.

---

*) Diese Bemerkung führt zu einer unzähligen Menge von Relationen bei der Kettenlinie; denn jede goniometrische Formel lässt sich damit in eine solche umwandeln. So folgt z. B. aus den Formeln, welche den Sinus und Cosinus des Unterschiedes zweier Bögen durch die Sinus und Cosinus der Bögen selbst ausdrücken, der Satz:

Ist O (Fig. 80.) der unter dem Scheitel S liegende Punkt der Directrix, M_1 und N_1 zwei beliebige andere Punkte der Directrix und P_1 ein dritter Punkt derselben, welcher so liegt, dass $OP_1 = M_1N_1$; sind ferner M, N, P die über M_1, N_1, P_1 befindlichen Punkte der Kettenlinie, so ist:

$$SO \,.\, SP = SN \,.\, MM_1 - SM \,.\, NN_1,$$

$$SO \,.\, PP_1 = MM_1 \,.\, NN_1 - SM \,.\, SN.$$

Eben so entspricht der goniometrischen Formel: $\cos a^2 + \sin a^2 = 1$, die Gleichung: $MM_1^2 - SM^2 = SO^2$, u. s. w.

Das Quadrat eines vom Scheitel an gerechneten ogens einer Kettenlinie ist dem Quadrate der Ent- rnung des Endpunktes des Bogens von der Direc- ix, vermindert um das Quadrat des Parameters, eich.

c. Die Differentiation der letzterhaltenen Gleichung ebt:

$$ydy = sds$$

und weil $hsdx = dy$ (§. 288.),

so ist auch $hydx = ds$

und $h \int ydx = s$, d. h.

Das Flächenstück, welches von einem Bogen ei- r Kettenlinie, den von den Endpunkten des Bo- ns auf die Directrix gefällten Perpendikeln und m dazwischen enthaltenen Theile der Directrix grenzt wird, ist dem Producte aus dem Bogen in n Parameter gleich, und daher dem Bogen selbst oportional.

§. 291.

Die Spannung T der Kettenlinie im Punkte (x, y) $= -A\sqrt{1+p^2}$ (§. 287.). Nach §. 288. ist aber $= -g : h$, und $p = hs = \operatorname{cotg}\psi$ (§. 289.), folglich

$$T = \frac{g}{h}\sqrt{1+h^2 s^2} = \frac{g}{h \sin\psi} = gy.$$

Im Scheitel ist $s = 0$, und daher die Spannung selbst $= g : h$. Bezeichnen wir sie mit τ, so wird

$$T^2 = \tau^2 + g^2 s^2.$$

Die Spannung ist demnach im Scheitel am klein- n, und der Unterschied der Quadrate der Span- ngen im Scheitel und in irgend einem andern nkte der Kettenlinie ist dem Quadrate des Ge-

wichts des zwischen beiden Punkten begriffenen Theiles der Kette gleich.

Die Richtigkeit dieser Gleichung erhellet auch schon daraus, dass alle Kräfte, welche auf einen vom Scheitel *S* (Fig. 80.) anfangenden Theil *SM* der Kettenlinie wirken, auch dann noch sich das Gleichgewicht halten, wenn sie parallel mit ihren Richtungen an einen und denselben Punkt getragen werden. Diese Kräfte sind die Spannungen τ und T in S und M und die Resultante gs aller Wirkungen der Schwerkraft auf den zwischen S und M enthaltenen Theil des Fadens. Die Richtungen von τ und gs schneiden sich aber rechtwinklig; folglich etc.

Die andere Gleichung für die Spannung, $T=gy$, giebt zu erkennen, *dass die Spannung in irgend einem Punkte M der Kettenlinie dem Gewichte eines Theils des Fadens gleich ist, welcher den Abstand des Punktes M von der Directrix zur Länge hat. Das Gleichgewicht des die Kettenlinie bildenden Fadens wird daher nicht unterbrochen, wenn man letztern in M über eine unendlich kleine daselbst angebrachte Rolle führt und bis zu der Directrix frei herabhängen lässt.*

Ist folglich, — so können wir umgekehrt schliessen, — *ein über zwei unendlich kleine Rollen gelegter und mit beiden Enden frei herabhängender Faden im Gleichgewichte, so liegen die beiden Enden in einer Horizontalen, nämlich in der Directrix der vom mittlern Theile des Fadens zwischen den Rollen gebildeten Kettenlinie.*

§. 292.

Zusätze. *a.* Eine unmittelbare Folgerung aus

rem Satze ist, *dass, wenn man einen in sich zu- 'aufenden Faden über zwei unendlich kleine Rol- l und B* (Fig. 81.) *hängt, die zwei Kettenlinien und ASʹB, welche er somit bildet, eine ge- chaftliche Directrix haben.* Denn lässt man von der beiden Rollen, *A*, einen Faden frei herab- m, von solcher Länge *AC*, dass sein Gewicht der ıung im Punkte *A* des in sich zurücklaufenden ıs gleich ist, so wird, weil *A* als gemeinschaftli- Punkt der beiden Kettenlinien zu betrachten ist, urch *C* gelegte Horizontale *CD* sowohl der einen, r andern Kettenlinie, als Directrix zugehören.

. Sey *D* der Fusspunkt des von der andern Rolle f die gemeinschaftliche Directrix gefällten Per- kels, und *S*, *Sʹ* die Scheitel der beiden Ketten- , so ist

$$CA^2 - AS^2 = DB^2 - SB^2$$

m Quadrate des Parameters der Kettenlinie *ASB* 30. *b.*), und eben so

$$CA^2 - AS'^2 = DB^2 - S'B^2;$$

ch $(SB+AS)(SB-AS)=(S'B+AS')(S'B-AS')$. egt man nun durch die tiefere der beiden Rollen, e *A* sey, eine Horizontale, die den Kettenlinien und *ASʹB* in *U* und *Uʹ* begegne, so ist der Bo- $AS = SU$ und $AS' = S'U'$. Hiermit wird die rhaltene Gleichung:

$$ASB \,.\, UB = AS'B \,.\, U'B,$$

: *Wird ein in sich selbst zurücklaufender Fa- über zwei unendlich kleine Rollen gehängt, so lten sich die zwei von ihm gebildeten Kettenli- ihrer Länge nach umgekehrt, wie die Theile lben, welche oberhalb der durch die tiefere der n Rollen gezogenen Horizontale liegen.*

So wie im Punkte (x, y) der Kettenlinie die Spannung $T = gy$ ist, so ist sie in irgend einem andern Punkte (x', y') der Linie, $= gy'$, und daher, wenn letztere Spannung T' genannt wird:

$$T' - T = g(y' - y),$$

eine Gleichung, welche auch unmittelbar durch Integration der Gleichung (8) in §. 283. hervorgeht, wenn man darin, wie es hier der Fall ist, $X = 0$, $Y = -g$, $Z = 0$ setzt. Sie drückt den Satz aus, dass der Unterschied zwischen den Spannungen in zwei Punkten des die Kettenlinie bildenden Fadens dem Gewichte eines Theils desselben Fadens gleich ist, dessen Länge die Höhe des einen Punktes über den andern misst.

Dieser Satz lässt sich übrigens auch ohne Anwendung der bisher vorgetragenen Theorie durch folgende einfache Betrachtung darthun. — Seyen M und N (Fig. 80.) zwei Punkte einer Kettenlinie, M der tiefere, N der höhere, und L ein dritter Punkt, welcher mit M in einer Verticalen und mit N in einer Horizontalen liegt. Man befestige in M, N und L drei unendlich kleine Rollen und lege von L bis N einen geraden horizontalen Steg. Man führe hierauf den über N hinausgehenden Theil des Fadens über die Rolle N und den Steg NL bis L, und den über M hinaus sich erstreckenden Theil des Fadens unter der Rolle M weg in verticaler Richtung gleichfalls bis L und verknüpfe ihn über der in L angebrachten Rolle mit dem ersten Theile, so dass man einen über drei Rollen gelegten, in sich zurücklaufenden Faden erhält. Ist nun dieser Faden, sich selbst überlassen, in Ruhe, — denn eine continuirliche Bewegung desselben anzunehmen, streitet gegen die Unmöglichkeit einer solchen — so wird jeder seiner drei Theile noch die vorige Form

haben. Vom Theile LN ist dieses für sich klar. Wäre ferner der frei von L bis M herabgehende Theil nicht geradlinig, sondern gekrümmt, so müsste, weil L und M in einer Verticalen liegen, ein Theil von LM seine hohle Seite nach unten zu kehren, welches wegen der nach unten zu gerichteten Schwerkraft nicht möglich ist. Der frei von M bis N sich erstreckende Theil wird daher noch die anfängliche Länge und damit auch die anfängliche Gestalt haben. Denn es darf wohl als Grundsatz zugestanden werden, dass es für einen schweren Faden von gegebener Länge, der mit seinen Enden in zwei Punkten aufgehängt wird, nur eine einzige Form giebt, unter welcher er im Gleichgewichte ist.

Da also der Fadentheil MN noch die anfängliche Form hat, so sind auch seine Spannungen in M und N, welche T und T' heissen, dieselben geblieben. Nach §. 270. ist nun die Spannung in jedem Punkte von LN, also auch in L, eben so gross, als in N selbst, folglich $= T'$. Denn die auf den Theil NL wirkende Schwerkraft wird von dem horizontalen Stege, auf welchem er liegt, aufgehoben und kann daher auf die Spannung keinen Einfluss äussern. Von der andern Seite würde die Spannung in L, so wie in jedem andern Punkte von ML, eben so gross, als in M, mithin $= T$ seyn, wenn der Fadentheil ML keine Schwere hätte. Weil aber die Schwerkraft auf ihn gleichfalls einwirkt, so ist die Spannung in L der um das Gewicht von ML vermehrten Spannung in M gleich, also $T' = T + g \cdot ML$, wie zu erweisen war.

d. Ist, wie im vor. §., τ die Spannung im Scheitel S, T die Spannung in irgend einem andern Punkte M, und sind in Bezug auf eine beliebige unterhalb S in der Ebene der Kettenlinie gezogene Horizontale, als

Axe der x, die Ordinaten von S und M, $=f$ und y, so ist $T-\tau=g\,(y-f)$. Es ist ferner, wenn der Bogen $SM=s$ gesetzt wird: $T^2=\tau^2+g^2s^2$. Die Elimination von T aus diesen zwei Gleichungen giebt:

$$(\tau+g\,(y-f))^2=\tau^2+g^2s^2,$$

oder einfacher, wenn man die horizontale Abscissenlinie so legt, dass $gf=\tau$ wird:

$$y^2=f^2+s^2.$$

Da nun, wie so eben und im vor. §. gezeigt worden, die zwei Gleichungen für T sich geradezu aus der Natur der Kettenlinie, ohne Anwendung der Rechnung des Unendlichen, herleiten lassen, so sind wir damit eben so einfach zu der zwischen y und s bestehenden Gleichung der Kettenlinie selbst gelangt. Dass dabei f der im Obigen durch $1:h$ ausgedrückte Parameter ist, bedarf keiner Erinnerung.

e. Auch die Fundamentalgleichung $hs=p$ (§. 283) kann auf ganz elementare Weise hergeleitet werden. Da nämlich die Spannung T, welche mit der Axe der y den Winkel ψ macht, die Resultante der Spannung τ und der Kraft gs ist, wenn letztere beide nach den positiven Richtungen der Axen der x und der y wirkend angenommen werden, so hat man

$$T\sin\psi=\tau,\quad T\cos\psi=gs,$$

$$\text{folglich}\quad \cot g\,\psi=\frac{gs}{\tau},\ \text{d. i.}\ p=\frac{s}{f}=hs.$$

f. Nach der Gleichung (12) in §. 283, und weil $P=-g$, $\varphi=-\psi$ und $T\sin\psi=\tau$ ist, hat man:

$$r=\frac{T}{P\sin\varphi}=\frac{T^2}{g\tau}=\frac{T^2}{h\tau^2}.$$

Die Kettenlinie besitzt daher noch die merkwürdige Eigenschaft, *dass in jedem ihrer Punkte der Krüm-*

ungshalbmesser dem Quadrate der Spannung proportional ist.

Im Scheitel, wo $T = t$ ist, wird $r = 1 : h$, d. h. *der Krümmungshalbmesser im Scheitel ist dem Parameter gleich.*

§. 293.

Aufgabe. Ein gleichförmig schwerer Faden von gegebener Länge l wird mit seinen Enden an zwei gegebenen unbeweglichen Punkten M und N (Fig. 80.) befestigt. Die Elemente der von ihm gebildeten Kettenlinie zu bestimmen.

Auflösung. Die Linie ist in der durch M und N zu legenden Verticalebene enthalten. In Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem in dieser Ebene, in welchem die Directrix der Kettenlinie die Abscissenlinie, und der Punkt O der Directrix, welcher vertical unter dem Scheitel S liegt, der Anfangspunkt der Abscissen ist, in Bezug auf dieses System seyen x, y die Coordinaten von M, und $x+a$, $y+b$ die Coordinaten von N; sey ferner der Parameter der Kettenlinie $= 1 : h$, und der Bogen $SM = s$, also der Bogen $SN = s + l$, wo die Bögen s und l positiv zu nehmen sind, wenn es ihre Projectionen auf die Axe der x sind. Alsdann ist nach §. 290. b. für den Punkt M:

$$(a) \quad \begin{cases} h(y+s) = e^{hx}, \\ h(y-s) = e^{-hx}; \end{cases}$$

und eben so für den Punkt N:

$$(b) \quad \begin{cases} h(y+b+s+l) = e^{h(x+a)}, \\ h(y+b-s-l) = e^{-h(x+a)}. \end{cases}$$

Durch die gegebene gegenseitige Lage von M und N sind nun a und b gegeben; es sind nämlich die Co-

ordinaten von N in Bezug auf ein System, dessen Anfangspunkt M, und dessen Abscissenlinie die durch M gelegte Horizontale in der durch MN gelegten Verticalebene ist. In Beziehung auf dasselbe System sind $-x$ und $-y$ die Coordinaten von O, also $-x+(1:h)$ und $-y+(1:h)$ die Coordinaten des Scheitels. Indem wir daher aus den 4 Gleichungen (a) und (b) den Bogen s eliminiren und die 3 Unbekannten h, x, y durch die Gegebenen l, a, b ausdrücken, wird sich die Grösse und Lage der Kettenlinie bestimmen lassen, und damit unsere Aufgabe gelöst seyn. Die hierzu nöthige Rechnung ist folgende.

Durch Subtraction der Gleichungen (a) von (b) folgt:

$$(c)\qquad \begin{cases} h(b+l)=e^{hx}(e^{ha}-1), \\ h(b-l)=e^{-hx}(e^{-ha}-1), \end{cases}$$

und hieraus $h^2(l^2-b^2)=e^{-ha}(e^{ha}-1)^2$, oder wenn man

$$(d)\ \frac{\sqrt{(l^2-b^2)}}{a}=c \text{ und } (e)\ ah=z \text{ setzt:}$$

$$(f)\qquad c=\frac{1}{z}(e^{\frac{1}{2}z}-e^{-\frac{1}{2}z}).$$

Um hiernach die Unbekannte z aus der durch l, a, b gegebenen Grösse c zu finden, muss man entweder versuchsweise verfahren, oder eine Tafel construiren, welche für jeden Werth von c den zugehörigen für z giebt.

Hat man somit die transcendente Gleichung (f) aufgelöst, so macht die Bestimmung der Gesuchten h, x und y keine Schwierigkeit mehr. Denn h findet sich alsdann aus (e), x aus einer der Gleichungen (c), und

y aus der Gleichung $2hy = e^{hx} + e^{-hx}$ (§. 289.), welche durch Addition der Gleichungen (a) hervorgeht.

§. 294.

Zusätze. *a.* Die Entwickelung der transcendenten Function von x in eine Reihe giebt:

$$1 + \frac{x^2}{1.2.3.2^2} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5.2^4} + \ldots$$

Zufolge der Gleichung (f) muss daher $c > 1$, und mithin, wegen (d), $l^2 > a^2 + b^2$ seyn, was auch schon daraus fliesst, dass $\sqrt{a^2+b^2}$ die Sehne des Bogens l ist.

b. Setzt man $b = 0$ und $a = 1$, so wird nach (d) und (e), $l = c$ und $h = x$. Die nach (f) zu construirende Tafel giebt daher zunächst und unmittelbar den Parameter $1 : x$ einer Kettenlinie, deren Länge $= c$ ist, und deren Aufhängepunkte, wegen $b = 0$, in einer Horizontalen sind und in einem Abstande $a = 1$ von einander liegen. Die Bestimmung des Parameters einer in irgend zwei Punkten aufgehängten Kette wird folglich immer auf den einfachen Fall zurückgebracht, wenn die Gerade durch die zwei Aufhängepunkte eine Horizontale ist.

c. Ueberhaupt ersieht man aus den Gleichungen (d), (e) und (f), dass der gesuchte Parameter $1:h$ bloss von a und $\sqrt{l^2 - b^2}$ abhängig ist, und dass mithin die durch l, a, b bestimmte Kettenlinie denselben Parameter, als eine andere hat, deren Aufhängepunkte in einer Horizontalen um einen Abstand $= a$ von einander entfernt liegen, und deren Länge $= \sqrt{l^2 - b^2}$ ist.

Werden daher mehrere gleichförmig schwere Fäden in einem Punkte P (Fig. 82.) befestigt und von da

geradlinig bis zu Punkten ... $N_,$, N, N', N'',..., die in einer Verticalen liegen, fortgeführt, und wird hierauf der Punkt P in einer horizontalen Ebene näher an diese Verticale, etwa bis M, gerückt, so haben die Kettenlinien, zu welchen sich nunmehr die Fäden krümmen, einander gleiche Parameter und sind daher, in unendlicher Ausdehnung gedacht, einander gleich und ähnlich. Denn schneidet die Horizontalebene, in welcher P und M liegen, die Verticale in N, so ist für die verschiedenen Kettenlinien $a = MN$ und $l^2 - b^2 = PN_,^2 - NN_,^2 = PN^2 = PN'^2 - NN'^2 =$ etc.

Von allen diesen Kettenlinien liegen übrigens die Scheitel gleichfalls in einer Kettenlinie, welche M zum Scheitel und denselben Parameter, wie die vorigen, aber eine umgekehrte Lage hat, so dass M die höchste Stelle einnimmt. Hiervon kann man sich durch eine sehr einfache, von der Natur der Kettenlinie ganz unabhängige, Betrachtung überzeugen. Wird nämlich der Bogen $S_,TM$ einer Kettenlinie, von welcher $S_,$ der Scheitel ist, in seiner Ebene um den Mittelpunkt seiner Sehne $S_,M$ halb herumgedreht, bis er in die Lage $MSS_,$ kommt, so vertauschen $S_,$ und M ihre Stellen, und der Scheitel ist nunmehr in M. Beschreibt man folglich in der Ebene einer Kettenlinie $S_,TM$ mit demselben Parameter eine zweite, welche die umgekehrte Lage der erstern und irgend einen Punkt M der erstern zum Scheitel hat, so geht diese zweite durch den Scheitel $S_,$ der erstern.

§. 295.

Bei der im Obigen entwickelten allgemeinen Theorie des Gleichgewichts eines Fadens wurde in §. 284. noch der Fall in Betracht gezogen, wenn der Faden

nicht vollkommen frei beweglich ist, sondern auf einer unbeweglichen Fläche liegt. Um von den für diesen Fall entwickelten Formeln die Anwendung an einem leichten Beispiele zu zeigen, wollen wir einen gleichförmig schweren Faden auf einer gegen den Horizont geneigten Ebene liegend annehmen. Einfacherer Rechnung willen lasse man diese Ebene die Ebene der x, y seyn. Die Axe der x sey darin horizontal, also die Ebene der y, z vertical, und der Winkel einer Verticalen mit der Fadenebene gleich dem Winkel der Verticalen mit der Axe der y. Heisse α dieser Winkel, wenn die verticale Richtung nach oben zu positiv genommen wird, und bezeichne $-g$, wie im Vorigen, die Schwerkraft.

Die Schwerkraft, nach den Axen der x, y, z zerlegt, giebt hiernach die drei Kräfte: $X=0$, $Y=-g\cos\alpha$, $Z=-g\sin\alpha$. Nun ist die Gleichung der Ebene der x, y, also der Fadenebene: $z=0$, mithin (§. 284.) $F=z$ und $u=0$, $v=0$, $w=1$. Mit diesen Werthen für X, Y, Z, u, v, w werden die dortigen Gleichungen:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0,\quad -g\cos\alpha . ds+d\left(T\frac{dy}{ds}\right)=0,$$
$$-g\sin\alpha ds+Rds=0.$$

Die zwei erstern derselben sind einerlei mit denen, welche man findet, wenn der Faden nicht auf einer Fläche liegt, sondern frei ist, und die Axe der y eine verticale Lage hat, nur dass die Constante g hier noch von dem Factor $\cos\alpha$ begleitet ist. Von dem Werthe dieser Constanten ist aber nach §.293. die Curvenform eines in zwei Punkten frei aufgehängten Fadens unabhängig, und wir schliessen daher:

Wird ein auf einer schiefen Ebene liegender

gleichförmig schwerer Faden mit seinen Enden an zwei Punkten der Ebene befestigt, so ist die von ihm auf der Ebene gebildete Curve dieselbe Kettenlinie, welche er annimmt, wenn die Ebene durch Drehung um eine in ihr enthaltene Horizontale in eine verticale Lage gebracht, und damit ihre Einwirkung auf den Faden aufgehoben wird.

Durch Drehung der Ebene um eine in ihr gezogene horizontale Axe wird also die Fadencurve nicht geändert, was auch schon daraus einleuchtet, dass in jedem Augenblicke der Drehung auf gleiche Elemente ds des Fadens gleiche und auf der Drehungsaxe normale Kräfte $-g\cos\alpha . ds$ in der Ebene wirken. Aus demselben Grunde erhellet, dass bei jeder durch die Drehung hervorgebrachten Neigung der Ebene die (bei der verticalen Lage durch gy bestimmten) Spannungen in den verschiedenen Punkten des Fadens in den nämlichen Verhältnissen zu einander stehen, dass aber die Spannung in einem und demselben Punkte von einer Neigung zur andern dem Sinus der Neigung gegen den Horizont $(90° - \alpha)$ proportional ist, und daher bei horizontaler Lage ganz verschwindet.

Endlich bemerke man noch, dass zufolge der dritten Gleichung die schiefe Ebene von jedem Curvenelemente ds einen auf ihr normalen Druck $=$ dem Gewichte gds des Elements, multiplicirt in den Cosinus der Neigung, erleidet.

Siebentes Kapitel.

Analogie zwischen dem Gleichgewichte an einem Faden und der Bewegung eines Punktes.

§. 296.

Es dürfte gewiss schon von Manchem bemerkt worden seyn, dass zwischen dem Gleichgewichte an einem Faden und der Bewegung eines materiellen Punktes in mehrfacher Beziehung Aehnlichkeit statt findet; dass z. B. eben so, wie ein Faden, auf den nur an seinen Enden Kräfte wirken, sich geradlinig ausdehnt, auch ein Punkt, auf den nur ein anfänglicher Stoss wirkt, geradlinig fortgeht; dass auf gleiche Art, wie ein über eine krumme Fläche gespannter Faden die kürzeste Linie bildet, die sich auf der Fläche von einem Punkte zum andern ziehen lässt, auch ein auf einer Fläche durch einen Stoss in Bewegung gesetzter Punkt die kürzeste Linie bei seiner Bewegung wählt, und dass, wie dort die Spannung, so hier die Geschwindigkeit von einem Punkte zum andern constant ist; u. s. w. Gleichwohl erinnere ich mich nicht, eine Vergleichung dieser Theorieen des Gleichgewichts und der Bewegung irgendwo angestellt gefunden zu haben. Da indessen eine solche Vergleichung nicht nur an sich interessant ist, sondern auch die eine Theorie durch die andere, und namentlich die des Gleichgewichts durch die der Bewegung, mir Gewinn zu ziehen scheint, so will ich in diesem Kapitel den zwischen beiden Theorieen obwaltenden Zusammenhang

näher entwickeln und zeigen, wie jeder Satz der einen seinen entsprechenden in der andern hat.

§. 297.

Seyen $A_{,}A$, AA', $A'A''$,... (Fig. 83.) mehrere auf einander folgende Elemente eines Fadens, an welchem Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Die auf die genannten Elemente wirkenden Kräfte seyen resp. $P_{,}.A_{,}A$, $P.AA'$, $P'.A'A''$, etc. (§. 280.). Wegen der unendlichen Kleinheit der Elemente kann man sich diese Kräfte an beliebigen Punkten derselben angebracht vorstellen. Seyen daher resp. $A_{,}$, A, A',... die Angriffspunkte der Kräfte und $A_{,}B_{,}$, AB, $A'B'$,... ihre Richtungen. Endlich seyen $T_{,,}$, T, T',... die Spannungen der Elemente $A_{,}A$, AA',... .

Hiernach sind am Punkte A die Kräfte $T_{,}$, $P.AA'$, und T nach den Richtungen $AA_{,}$, AB und AA' im Gleichgewichte, folglich die ersten zwei Kräfte nach den Richtungen $A_{,}A$, BA gleichwirkend mit der dritten nach der Richtung AA'. Bewegt sich daher ein als materieller Punkt zu denkender Körper nach der Richtung $A_{,}A$, und erhält er in A einen Stoss, welcher ihm nach der Richtung BA eine Geschwindigkeit ertheilt, die sich zu seiner Geschwindigkeit in $A_{,}A$, wie $T_{,}$ zu $P.AA'$ verhält, so wird er nach AA' mit einer der Spannung T proportionalen Geschwindigkeit fortgehen. Auf gleiche Art wird ihn ein neuer Stoss, den er in A' empfängt, und der ihm nach der Richtung $B'A'$ eine Geschwindigkeit beibringt, die in demselben Verhältnisse, wie vorhin, mit $P'.A'A''$ proportional ist, sich nach $A'A''$ mit einer der Spannung T' proportionalen Geschwindigkeit zu bewegen nöthigen u. s. w., so dass der Punkt, wenn immer neue Stösse nach demselben

Gesetze, wie die vorigen, auf ihn einwirken, ein Fadenelement nach dem andern mit einer der Spannung überall proportionalen Geschwindigkeit beschreiben wird.

In welchen Verhältnissen die Längen der Elemente zu einander stehen sollen, hängt von unserer Willkühr ab und hat auf das Endresultat keinen Einfluss. Zur Vereinfachung der Betrachtung wollen wir jedes Element der in ihm herrschenden Spannung, also auch der Geschwindigkeit, mit welcher es von dem Punkte beschrieben wird, proportional setzen. Alsdann sind die Zeitelemente, in denen sie beschrieben werden, einander gleich, $= dt$, und die Stösse, welche jetzt proportional mit $P.T$, $P'.T'$,... werden, folgen in gleichen Zeitintervallen, $= dt$, auf einander, und lassen sich daher als die Wirkungen einer beschleunigenden, mit PT proportionalen, Kraft ansehen.

Es ist aber, wenn Q diese beschleunigende Kraft in A genannt wird, Qdt die von ihr in dem ersten Zeitelemente ihrer Wirkung erzeugte Geschwindigkeit, und diese verhält sich nach dem Obigen zu der Geschwindigkeit des Körpers in A,A, welche v heisse, wie $P.AA'$, $= Pds$, zu T, oder T. Man hat daher:

$$\frac{Qdt}{v} = \frac{Pds}{T}, \text{ also } Q = \frac{Pv^2}{T}, \text{ wegen } \frac{ds}{dt} = v,$$

$$\text{und } \frac{Q}{v} : P = v : T,$$

wonach aus der Kraft am Fäden und seiner Spannung und aus der Geschwindigkeit des in der Fadencurve sich bewegenden Körpers die den letztern beschleunigende Kraft gefunden werden kann.

Da nun, wenn die anfängliche Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung eines Körpers und die be-

schleunigende Kraft gegeben sind, seine fernere Bahn und seine Geschwindigkeit in derselben vollkommen bestimmt sind, so schliessen wir:

Sind Kräfte, welche auf einen Faden seiner ganzen Länge nach wirken, im Gleichgewichte, so wird ein Körper, der sich in der Fadencurve zu bewegen anfängt, darin fortgehen, und seine Geschwindigkeit wird an jeder Stelle der Spannung daselbst proportional seyn, wenn auf ihn nach einer der Kraft am Faden entgegengesetzten Richtung eine beschleunigende Kraft wirkt, die, durch die Geschwindigkeit dividirt, sich zur Kraft am Faden, wie die Geschwindigkeit zur Spannung verhält.

Zusatz. Letztere Proportion lässt sich auch also ausdrücken: *Es muss sich die beschleunigende Kraft zum Quadrate der Geschwindigkeit, wie die Kraft am Faden zur Spannung verhalten.* Je grösser also die Geschwindigkeit seyn soll, desto grösser, und zwar im doppelten Verhältnisse grösser, muss die beschleunigende Kraft seyn, — so wie überhaupt der Satz gilt: dass, wenn ein Körper *b* sich in derselben Curve, wie ein anderer *a*, bewegt, seine Geschwindigkeit aber in jedem Punkte das *m*fache der Geschwindigkeit ist, welche *a* daselbst hat, die beschleunigende Kraft, welche *b* treibt, das *mm*fache der auf *a* wirkenden Kraft ist.

§. 298.

Aus jedem Gleichgewichte zwischen Kräften, welche auf einen Faden wirken, lässt sich daher auf die Bewegung eines Körpers ein Schluss machen, indem man für die Curve des Fadens die Bahn des Körpers, für die Spannung des erstern die Geschwindigkeit des letz-

tern und für die Kraft am erstern die den letztern beschleunigende Kraft, dividirt durch die Geschwindigkeit, setzt.

Das einfachste hierher gehörige Beispiel ist ein Faden, auf den nur an seinen Enden sich das Gleichgewicht haltende Kräfte wirken. So wie ein solcher die Gestalt einer geraden Linie annimmt, und seine Spannung in jedem Punkte von gleicher Grösse ist, so geht auch ein Körper, durch einen momentanen Stoss gegeben, in gerader Linie und mit constanter Geschwindigkeit fort.

So wie ferner ein Faden in jeder beliebigen Curvenform im Gleichgewichte ist und überall dieselbe Spannung T hat, wenn auf jeden seiner Punkte in der Richtung des Krümmungshalbmessers r von der hohlen nach der erhabenen Seite der Curve eine Kraft $P = T:r$ wirkt (§. 279.), so bewegt sich auch ein Körper in irgend einer gegebenen Curve mit constanter Geschwindigkeit v, wenn ihn in der Richtung des Krümmungshalbmessers r von der erhabenen nach der hohlen Seite eine beschleunigende Kraft Q treibt, von der Grösse, dass $Q:v = v:r$, also $Q = v^2:r$ ist.

Ein merkwürdiges Beispiel gewährt noch die vorzugsweise so genannte Kettenlinie. Da bei dieser die auf die einzelnen Punkte wirkenden Kräfte von gleicher Grösse und einander parallel sind, so wird sich ein Körper in einer Kettenlinie bewegen, wenn die beschleunigende Kraft Q sich parallel bleibt, und $Q:v$ constant, also Q proportional mit v ist. Hieraus und aus den übrigen beim Gleichgewichte einer Kette vorkommenden Umständen folgern wir:

Wird ein Körper von einer vertical nach oben gerichteten und seiner jedesmaligen Geschwindigkeit

proportionalen beschleunigenden Kraft getrieben, so beschreibt er eine verticale Kettenlinie, deren Scheitel ihr tiefster Punkt ist. Dabei ist die Geschwindigkeit des Körpers der Spannung der Kette, also der Secante des Winkels proportional, den eine die Curve Berührende mit dem Horizonte macht (§. 287.).

Weil übrigens im Scheitel $T=g:h$ ist (§. 291.), wo g die jetzt constante Kraft P ausdrückt, so ist im Scheitel der durch Bewegung erzeugten Kettenlinie: $v=Q:vh$, folglich $v^2:Q=1:h$, d. h. *das Quadrat der Geschwindigkeit im Scheitel, dividirt durch die beschleunigende Kraft daselbst, giebt den Parameter der Kettenlinie.*

Sehr leicht kann man sich von diesen Resultaten auch durch unmittelbare Rechnung überzeugen. Man hat nämlich für die vorausgesetzte Kraft, wenn man ihre Richtung mit der Axe der y parallel annimmt, die Grundgleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=av=\frac{ads}{dt};$$

folglich, wenn man integrirt:

$$\frac{dx}{dt}=b, \quad \frac{dy}{dt}=as+c, \text{ und daher } v=\frac{bds}{dx},$$

woraus die Proportionalität der Geschwindigkeit mit der Secante der Neigung der Berührenden fliesst. Setzt man ferner $c=0$, rechnet also den Bogen s von dem Punkte an, in welchem $dy=0$, mithin die Berührende horizontal ist, so kommt:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{as}{b}.$$

Dieses ist aber die Differentialgleichung einer Kettenlinie, deren Parameter $=b:a$, und deren Scheitel ihr tiefster Punkt ist (§. 288.). Weil daselbst $dy=0$,

und daher $ds = dx$, also $v = b$, so ist im Scheitel $Q = a\frac{ds}{dt} = ab$, mithin $v^2 : Q = b : a =$ dem Parameter, — gleichfalls übereinstimmend mit dem Obigen.

§. 299.

Auf eben die Art, wie man vom Gleichgewichte eines Fadens zur Bewegung eines Körpers übergehen kann, lässt sich auch immer aus irgend einer krummlinigen Bewegung eines Körpers auf das Gleichgewicht eines eben so gekrümmten Fadens schliessen. Denn so wie in §. 297. aus dem Gleichgewichte der auf den Punkt A (Fig. 83.) nach den Richtungen $AA_{,}$, AB und AA' wirkenden Kräfte $T_{,}$, $P.AA'$ und T gefolgert wurde, dass ein Körper, der sich nach $A_{,}A$ mit einer Geschwindigkeit $v_{,} = cT_{,}$ bewegt, und dem in A nach der Richtung BA eine Geschwindigkeit $Qdt = cP.AA'$ mitgetheilt wird, nach AA' mit einer Geschwindigkeit $v = cT$ fortgeht, wo c eine Constante und dt das Zeitelement bezeichnet, in welchem der Körper das Raumelement AA' $(= vdt)$ zurücklegt: so kann auch umgekehrt daraus, dass v die Resultante der Geschwindigkeiten $v_{,}$ und Qdt ist, auf das Gleichgewicht zwischen $T_{,}$, $P.AA'$ und T geschlossen werden. So wie ferner die Bewegung eines Körpers durch ihre anfängliche Richtung und Geschwindigkeit und durch die beschleunigende Kraft vollkommen bestimmt ist, so ist es auch die Gestalt eines Fadens und die Spannung in jedem Punkte desselben, wenn für eines seiner Elemente die Lage und die Spannung desselben, für alle aber die auf sie wirkenden Kräfte gegeben sind. Hiernach lässt sich der in §. 297. erhaltene Satz folgendergestalt umkehren:

Bewegt sich ein Körper, durch eine beschleunigende Kraft getrieben, so ist ein Faden in der vom Körper beschriebenen Curve im Gleichgewichte und seine Spannung an jeder Stelle der Geschwindigkeit des Körpers proportional, wenn ein Element des Fadens mit einem Elemente der Bahn des Körpers zusammenfällt, wenn die Kraft am Faden überall die entgegengesetzte Richtung der beschleunigenden Kraft hat, und wenn ($PT : Q = T^2 : v^2$, *d. h.*) *das Product aus der Kraft am Faden in die Spannung zu der beschleunigenden Kraft in einem constanten Verhältnisse steht, welches dem Doppelten des constanten Verhältnisses der Spannung zur Geschwindigkeit gleich ist.*

So wissen wir z. B., dass ein Körper unter Einwirkung der constanten und vertical nach unten gerichteten Schwerkraft eine Parabel beschreibt, deren Scheitel ihr oberster Punkt ist, dass die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Parabel der Secante des Winkels proportional ist, den die daselbst an sie gezogene Berührende mit dem Horizonte macht, und dass das Quadrat der Geschwindigkeit im Scheitel, dividirt durch die Schwerkraft, dem halben Parameter der Parabel gleich ist.

Mithin wird auch ein Faden in der Gestalt einer verticalen Parabel, deren Scheitel ihr oberster Punkt ist, im Gleichgewichte seyn, wenn auf jeden seiner Punkte eine vertical nach oben gerichtete, der Spannung umgekehrt proportionale, Kraft wirkt. Dabei wird die Spannung jedes Elements proportional der Secante des Winkels des Elements mit dem Horizonte seyn, und die Spannung im Scheitel, di-

dirt durch die Kraft im Scheitel, $(T:P=v^2:Q)$, *ird den halben Parameter geben.*

Wollen wir uns von diesen Resultaten unmittelbar erzeugen, so dürfen wir nur zu den Formeln in 287:

$$\int Y ds = A\frac{dy}{dx} \text{ und } T = -A\frac{ds}{dx}$$

rückgehen, welche sich auf das Gleichgewicht eines dens beziehen, auf dessen Punkte mit der Axe der parallele Kräfte Y wirken. Hiervon drückt schon zweite Gleichung das Gesetz der Spannung aus. ferner nach der jetzigen Hypothese Y umgekehrt oportional mit T seyn soll, so kommt, wenn wir dem mäss $Y=a:T$ setzen:

$$A\frac{dy}{dx} = a\int\frac{ds}{T} = -\frac{a}{A}\int dx = -\frac{ax}{A} + B,$$

d nach nochmaliger Integration:

$$A^2 y = C + ABx - \tfrac{1}{2}ax^2,$$

oder $A^2 y = -\tfrac{1}{2}ax^2$,

nn wir den Punkt der Curve, in welchem $dy:dx=0$, zum Anfangspunkte der Coordinaten nehmen. Dies ist aber die Gleichung für eine Parabel, welche ten Parameter $=2A^2:a$ und eine mit der Axe der parallele Axe hat, und deren Schenkel nach der netiven Seite der Axe der y gerichtet sind, wenn a sitiv, d. h. wenn die Kräfte nach der positiven Seite rselben Axe gerichtet sind.

Weil endlich im Scheitel $ds=dx$, und folglich selbst die Spannung $T=-A$ und die beschleunignde Kraft $Y=-a:A$ ist, so findet sich im halbe rameter $= A:(a:A) =$ der Spannung im Scheil, dividirt durch die beschleunigende Kraft daselbst, e vorhin.

§. 300.

Wenn in dem Bisherigen die auf das Element des Fadens ds wirkende Kraft $= Pds$ gesetzt wurde, und wenn, wie es gewöhnlich ist, unter P die Gesammtwirkung auf eine Masse $= 1$ verstanden wird (§. 286.), so hat man sich die Masse des Fadens seiner Länge nach gleichförmig vertheilt zu denken, so dass Theile von gleicher Länge auch der Masse nach einander gleich sind. Ist aber die Masse ungleichförmig vertheilt, so ist, bei gleicher Bedeutung von P, die auf das Element ds wirkende Kraft $= P\varrho\varepsilon ds$ zu setzen, wo $\varrho\varepsilon ds$ die Masse des Elements ausdrückt (ebendas.).

Mit Anwendung eines solchen Fadens von ungleichförmig vertheilter Masse lässt sich der im vor. §. von der Bewegung auf das Gleichgewicht gemachte Schluss auf eine etwas andere Weise bilden. Denn weil jetzt $P\varrho\varepsilon ds$ mit Qdt in constantem Verhältnisse seyn muss (vor. §.), so können wir geradezu P mit Q proportional setzen, wenn wir noch $\varrho\varepsilon ds$ mit dt, d. h. die Masse des Fadenelements mit dem Zeitelemente, also überhaupt die Masse jedes Theils des Fadens mit der Zeit, in welcher dieser Theil vom Körper beschrieben werden, proportional annehmen, und wir erhalten damit den Satz:

Aus jeder Bewegung eines durch eine beschleunigende Kraft getriebenen Körpers kann man ein Gleichgewicht an einem Faden ableiten, indem man die vom Körper beschriebene Curve die Fadencurve seyn lässt, die Masse jedes Fadentheils der Zeit, in welcher er vom Körper durchlaufen wird, proportional annimmt und auf jeden Punkt des Fadens eine der den Körper daselbst beschleunigenden Kraft proportionale Kraft nach entgegengesetzter

Richtung wirken lässt. Dabei ist die Spannung des Fadens in constantem Verhältnisse mit der Geschwindigkeit des Körpers.

Wenn daher ein in zwei Punkten aufgehängter Faden die Gestalt einer verticalen mit ihrem Scheitel nach unten gekehrten Parabel hat, und, (weil bei der parabolischen Wurfbewegung die Zeiten sich wie die horizontalen Projectionen der durchlaufenen Bögen verhalten), *wenn das Gewicht jedes Fadentheils in constantem Verhältnisse zur horizontalen Projection des Theils steht, so ist der Faden unter der Einwirkung der Schwerkraft im Gleichgewichte.*

Zu noch einem Beispiele mögen uns die um die Sonne laufenden Planeten dienen. Jeder Planet bewegt sich in einer Ellipse, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet; und diese Bewegung geht dergestalt vor sich, dass die von der Sonne bis zum Planet gezogene gerade Linie in gleichen Zeiten gleiche Flächen der Ellipse überstreicht. Hieraus folgerte Newton, dass die Sonne den Planet mit einer dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportionalen Kraft anzieht, und wir können daher schliessen:

Hat ein in sich zurücklaufender Faden eine elliptische Form, und ist die Masse jedes seiner Theile der Fläche proportional, welche von dem Theile und den von seinen Endpunkten nach dem einen Brennpunkte der Ellipse gezogenen Geraden begränzt wird, und wirkt abwärts von demselben Brennpunkte auf jeden Punkt des Fadens eine Kraft, die sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung des Fadenpunktes vom Brennpunkte verhält, so herrscht Gleichgewicht. Dabei ist die Spannung des Fadens in jedem Punkte umgekehrt dem Perpendikel proportio-

nal, welches auf eine die Ellipse in dem Punkte Berührende von dem Brennpunkte gefällt wird.

§. 301.

Untersuchen wir zuletzt noch den Fall, wenn der im Gleichgewichte befindliche Faden und der sich bewegende Körper nicht vollkommen frei, sondern auf einer gegebenen Fläche beweglich sind. Ist ein Faden auf einer unbeweglichen Fläche zu verharren genöthigt, und ist er dabei unter dem Einflusse der Kräfte P im Gleichgewichte, so kann man ihn auch als einen frei beweglichen ansehen, auf welchen überall noch eine dem Drucke der Fläche gleiche Kraft R, normal auf der Fläche, wirkt. Dieses Gleichgewicht zwischen allen P und R kann aber dynamisch durch eine in der Fadencurve frei vor sich gehende Bewegung dargestellt werden, welche eine mit der Spannung T des Fadens proportionale Geschwindigkeit v hat und durch zwei beschleunigende mit PT und RT proportionale Kräfte $-Pv^2 : T$ und $-Rv^2 : T$ erzeugt wird. Setzen wir nun bei dieser Bewegung die unbewegliche Fläche wieder hinzu, so wird damit einerseits die Bewegung nicht gehindert, weil die Fläche die Curve des Fadens enthält, und mit dieser die Bahn des Körpers identisch ist. Andererseits aber können wir die auf der Fläche normale Kraft $-Rv^2 : T$ weglassen, und es leuchtet somit ein, dass der Satz in §. 297. auch dann noch vollkommene Anwendung leidet, wenn die Beweglichkeit des Fadens und die des Körpers auf eine unbewegliche Fläche beschränkt sind.

Mittelst derselben Schlüsse, nur in umgekehrter Folge geordnet, erhellet, dass unter der Beschränkung der Beweglichkeit durch eine Fläche auch die Sätze

in §. 299. und §. 300., wo von der Bewegung auf das Gleichgewicht geschlossen wird, noch ihre Richtigkeit haben. Nur ist hinsichtlich dieses Falles sowohl, als des vorigen, noch zu bemerken, dass eben so, wie die Kraft am Faden die entgegengesetzte Richtung der den Körper beschleunigenden Kraft haben muss, auch der Druck der Fläche auf den Faden und der auf den sich bewegenden Körper einander entgegengesetzt seyn, und folglich Faden und Körper auf entgegengesetzten Seiten der Fläche sich befinden müssen.

So wie daher z. B. ein über eine erhabene Fläche gespannter Faden, auf welchen keine andern Kräfte, als die einander gleichen Spannungen an seinen Enden wirken, auch in jedem andern Punkte eine diesen Spannungen gleiche Spannung hat und auf solche Weise liegt, dass er selbst, oder doch genugsam kleine Theile desselben, die kürzesten Linien sind, die sich zwischen ihren Endpunkten auf der Fläche ziehen lassen (§. 272.), so geht auch auf einer hohlen Fläche ein durch keine beschleunigende Kräfte, sondern bloss durch einen anfänglichen Stoss in Bewegung gesetzter Körper mit constanter Geschwindigkeit und auf dem kürzesten Wege fort.

Sey, um auch ein Beispiel für den umgekehrten Fall zu geben, der Weg bekannt, den ein durch die Schwerkraft getriebener Körper auf der obern Seite einer krummen Fläche durchläuft. Seine anfängliche Geschwindigkeit sey $=0$, wonach seine Geschwindigkeit in jedem andern Punkte der Quadratwurzel aus dem durchlaufenen, in verticaler Richtung geschätzten Wege proportional ist. Dreht man nun die Fläche um eine horizontale Axe halb herum und legt auf der jetzt nach oben zu gewendeten Seite über die Bahn des Körpers

einen gleichförmig dicken Faden, dessen Dichtigkeit in jedem Punkte sich umgekehrt wie die Quadratwurzel aus dem Abstande des Punktes von einer durch den Anfangspunkt der Bewegung gelegten horizontalen Ebene verhält *), so wird der Faden, nachdem zuvor sein oberster Punkt fest gemacht worden, unter Einwirkung der Schwerkraft im Gleichgewichte seyn, und seine Spannung wird sich überall umgekehrt wie seine Dichtigkeit verhalten.

§. 302.

Der Zusammenhang zwischen dem Gleichgewichte eines Fadens und der Bewegung eines Körpers, dessen Grund wir im Vorigen durch geometrische Betrachtungen uns verdeutlichten, kann auch sehr einfach mit Hülfe der Analysis dargestellt werden.

Die Gleichungen für das Gleichgewicht eines Fadens, wenn auf jedes Element ds desselben die Kraft Pds oder (Xds, Yds, Zds) wirkt, und T die Spannung des Elements ist, sind nach §. 280.:

$$\int X ds + T\frac{dx}{ds} = 0, \int Y ds + T\frac{dy}{ds} = 0, \text{ etc.}$$

Dagegen sind die Gleichungen für die Bewegung eines Körpers, auf welchen die beschleunigende Kraft Q oder (X', Y', Z') wirkt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X', \text{ etc. oder } \frac{dx}{dt} = \int Y' dt, \text{ etc.}$$

*) Denn weil bei dieser Vergleichung dt proportional mit $\varepsilon\rho ds$ gesetzt wird (vor. §.), und weil der Faden gleichförmig dick, also ε constant seyn soll, so wird ρ oder die Dichtigkeit proportional mit $dt : ds$, d. i. umgekehrt mit der Geschwindigkeit.

d. i. $-\int X'dt + v\frac{dx}{ds} = 0$, etc.

wenn v die Geschwindigkeit, $= ds : dt$, bezeichnet.

So wie daher beim Gleichgewichte eines Fadens die stets nach der Tangente der Fadencurve gerichtete Spannung, wenn man sie nach den drei Coordinatenaxen zerlegt, durch die Integrale $-\int Xds$, $-\int Yds$, $-\int Zds$ ausgedrückt wird, so führt bei der Bewegung eines Körpers die Zerlegung der Geschwindigkeit, welche ihrer Natur nach die tangentiale Richtung der vom Körper beschriebenen Curve hat, zu den drei Integralen: $\int X'dt$, etc. Ist folglich die Fadencurve einerlei mit der vom Körper beschriebenen, so ist für einen und denselben Punkt der Curve und bei gehöriger Bestimmung der durch die Integration hinzukommenden Constanten:

$$\frac{\int Xds}{\int X'dt} = \frac{\int Yds}{\int Y'dt} = \frac{\int Zds}{\int Z'dt} = -\frac{T}{v}.$$

Setzen wir daher noch für jeden Punkt die Geschwindigkeit auf der einen der Spannung auf der andern Seite proportional, also $v = cT$, so wird auch $\int X'dt = -c\int Xds$, etc., folglich $X'dt = -cXds$, etc. d. i. $X' = -cXv$, etc. Die Richtungen von (X, Y, Z) und (X', Y', Z'), d. i. von P und Q, fallen mithin in dieselbe Gerade, und es ist $Q = -cPv$, also $Q : v$ mit P, und Pv oder PT mit Q proportional. Endlich erhält man durch Elimination von c aus den Gleichungen $v = cT$ und $Q = -cPv$ die Proportion:

$$Q : v^2 = -P : T.$$

Eben so lässt sich analytisch auch der Fall behandeln, wenn die Beweglichkeit des Fadens und die des Körpers auf eine Fläche beschränkt sind, was ich

aber weiter zu erörtern für überflüssig halte, da der hier zu nehmende Gang dem vorigen ganz ähnlich ist.

---

§. 303.

In Bezug auf die Bewegung eines Systems von Körpern giebt es in der Dynamik einige Sätze, die unmittelbar aus den allgemeinen Gleichungen der Bewegung folgen und unter den Namen des Princips der Flächen, des Princips der lebendigen Kräfte und des Princips der kleinsten Wirkung bekannt sind. Diese Sätze können, wenn es sich nur um eines Körpers Bewegung handelt, folgendergestalt ausgesprochen werden:

I. Ist die einen Körper beschleunigende Kraft nach einem unbeweglichen Punkte oder Centrum gerichtet, so bewegt sich der Körper in einer das Centrum enthaltenden Ebene, und die vom Centrum bis zum Körper gezogene Gerade beschreibt der Zeit proportionale Flächen, oder, was auf dasselbe hinauskommt: die Geschwindigkeit verhält sich in jedem Punkte der Bahn umgekehrt wie das Perpendikel, welches vom Centrum auf die durch den Punkt an die Bahn gelegte Tangente gefällt wird.

II. Ist (X, Y, Z) die beschleunigende Kraft im Punkte (x, y, z), und $Xdx + Ydy + Zdz$, d. h. das Product aus dem Elemente der Bahn in die nach der Richtung des Elements geschätzte beschleunigende Kraft, ein vollständiges Differential, so kann mit Hülfe des Integrals davon, und wenn man zwei Punkte der Bahn kennt, die Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten in diesen Punkten, ohne weitere Kenntniss der Bahn selbst, angegeben werden.

III. Unter derselben Bedingung, dass $Xdx + \ldots$

vollständiges Differential ist, ist das Integral des
iductes aus dem Quadrate der Geschwindigkeit in
Differential der Zeit, oder, was dasselbe ausdrückt,
Integral des Productes aus der Geschwindigkeit in
Differential des Weges, für den wirklich vom
rper beschriebenen Weg ein Minimum.

Letztere zwei Sätze gelten übrigens auch dann,
nn die Bewegung des Körpers auf eine unbeweg-
he Fläche beschränkt ist.

Zufolge des Zusammenhanges, den wir jetzt zwi-
ien der Bewegung eines Körpers und dem Gleichge-
ihte eines Fadens kennen gelernt haben, müssen nun
iloge Sätze aus den allgemeinen Gleichungen für
Fadengleichgewicht hergeleitet werden können.

§. 304.

Die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht
es frei beweglichen Fadens sind nach §. 282. (2*):

$$Xds + Td\xi + \xi dT = 0,$$
$$Yds + Td\eta + \eta dT = 0,$$
$$Zds + Td\zeta + \zeta dT = 0,$$

ξ, η, ζ die ebendaselbst angegebene Bedeutung
ien.

Lassen wir nun zuerst die Kräfte (X, Y, Z) nach
em und demselben Punkte O, etwa nach dem An-
gspunkte der Coordinaten, gerichtet seyn und setzen
ier $X : Y : Z = x : y : z$, mithin

$$yZ - zY = 0,\quad zX - xZ = 0,\quad xY - yX = 0,$$

kommt, wenn wir in diesen drei Gleichungen für
Y, Z ihre Werthe aus den vorhergehenden substi-
ren:

$$T(yd\zeta - zd\eta) + (y\zeta - z\eta)\,dT = 0,$$

d. i., weil $\zeta dy = \eta dx$:

$$d[T(y\zeta - z\eta)] = 0,$$

folglich $T(y\zeta - z\eta) =$ einer Constante a,

und eben so $T(z\xi - x\zeta) = b$, $T(x\eta - y\xi) = c$,

folglich $ax + by + cz = 0$,

d. h. der Faden ist in einer durch den Punkt O gehenden Ebene enthalten. Da ferner durch

$$\sqrt{\{(ydz - zdy)^2 + (zdx - xdz)^2 + (xdy - ydx)^2\}}$$
$$= \sqrt{\{(y\zeta - z\eta)^2 + (z\xi - x\zeta)^2 + (x\eta - y\xi)^2\}}\, ds$$

das Doppelte der Dreiecksfläche ausgedrückt wird, welche O zur Spitze und das Curvenelement ds zur Basis hat, so kommt, wenn man diese Dreiecksfläche $= \frac{1}{2} q ds$ setzt, wo daher q das von O auf die Verlängerung von ds gefällte Perpendikel bezeichnet:

$$Tq = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Dies giebt folgendes dem Satze I. entsprechende Theorem:

Wird ein Faden durch Centralkräfte im Gleichgewichte erhalten, so liegt er in einer durch das Centrum gehenden Ebene, und seine Spannung verhält sich in jedem Punkte umgekehrt wie das Perpendikel, das vom Centrum auf die durch den Punkt an den Faden gelegte Tangente gefällt wird.

Zusatz. Die Spannung im Punkte M des Fadens ist daher auch umgekehrt proportional mit $OM \sin\varphi$, wo φ den Winkel von OM mit der Berührenden an M bezeichnet.

Ist das Centrum O unendlich entfernt, so werden die Kräfte einander parallel. OM ist alsdann von einem Punkte des Fadens zum andern als constant zu betrachten, und daher die Spannung bloss proportional mit $1 : \sin\varphi$. Hiermit kommen wir zu den schon in

287. für den Fall paralleler Kräfte erwiesenen Sä-
n zurück: dass der Faden in einer Ebene enthalten
, und dass die Spannung jedes seiner Elemente um-
kehrt dem Sinus des Winkels proportional ist, den
s Element mit den Kräften bildet.

§. 305.

Was noch die Uebertragung der zwei andern dy-
mischen Sätze auf das Fadengleichgewicht anlangt,
haben wir bereits in §. 283. *a.* gefunden, dass

$$Xdx + Ydy + Zdz + dT = 0,$$

Ist daher $Xdx + Ydy + Zdz$ *das vollständige*
ifferential einer Function V *von* x, y, z, und sind
V_1 und V_2 dieselben Functionen der Coordinaten x_1,
y_1, z_1, und x_2, y_2, z_2 irgend zweier Punkte M_1 und
M_2 der Fadencurve, T_1 und T_2 die Spannungen da-
lbst, so kommt, wenn man von M_1 bis M_2 integrirt:

$$V_2 - V_1 + T_2 - T_1 = 0,$$

d man kann daher, wenn man die Function V
d von irgend zwei Punkten der Fadencurve die
oordinaten kennt, die Differenz zwischen den da-
lbst herrschenden Spannungen bestimmen.

Dies ist demnach der entsprechende Satz von II.
n dazu gehöriges Beispiel giebt uns die Kettenlinie,
i welcher die Differenz der Spannungen der Differenz
r verticalen Coordinaten proportional ist (§. 292. *c.*).

Man ziehe jetzt von M_1 bis M_2 eine beliebige
rve l und bestimme für jeden Punkt (x, y, z) der-
lben den Werth von V nach der nämlichen Gleichung

$$(a) \quad V - V_1 + T - T_1 = 0,$$

ch welcher beim Faden selbst aus der Spannung T_1
M_1 die jedes andern seiner Punkte gefunden wer-
n kann. Mit diesen Werthen von T, welche in M_1

und M_2, so wie in jedem andern Punkte, den die Curve l mit der des Fadens zufällig gemein hat, für beide Curven gleich gross seyn werden, berechne man für die Curve l von M_1 bis M_2 das Integral $\int T ds$, so wird dieses, wenn die Curve die des im Gleichgewichte befindlichen Fadens selbst ist, seinen grössten oder kleinsten Werth haben.

Der Beweis hiervon ist eben so, wie der des entsprechenden Satzes III., durch Variationsrechnung zu führen. Man lässt nämlich die willkührlich von M_1 bis M_2 gezogene Curve l, ohne dass diese zwei Punkte ihre Grenzen zu seyn aufhören, sich um ein unendlich Weniges ändern und zeigt nun, dass die dadurch entstehende Aenderung $\delta \int T ds$ des Integrals dann $= 0$ ist, wenn diese Curve mit der des Fadens zusammenfällt. Die Rechnung steht also. — Zuerst ist:

$$(b) \quad \delta \int T ds = \int \delta . T ds,$$

$$\text{und } \delta . T ds = \delta T . ds + T \delta ds.$$

Wegen (*a*) aber hat man:

$$\delta T = -\delta V = -\frac{dV}{dx}\delta x - \frac{dV}{dy}\delta y - \frac{dV}{dz}\delta z,$$

$$\text{und weil } \frac{dV}{dx} = X, \text{ etc. ist:}$$

$$\delta T = -X\delta x - Y\delta y - Z\delta z.$$

Ferner ist $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, und daher $ds\delta ds = dx\delta dx + \ldots$,

$$\text{d. i. } \delta ds = \xi \delta dx + \eta \delta dy + \zeta \delta dz \text{ (§. 282.)}$$
$$= \xi d\delta x + \ldots$$

Hiermit wird

$$(c) \quad \delta . T ds = -X ds \delta x - \ldots + T\xi d\delta x + \ldots$$

Ist nun die zu variirende Curve die Fadencurve, so ist $X ds = -d(T\xi)$, etc. und daher in diesem Falle

$$(d)\quad \delta \,.\, Tds = d\,(T\xi)\,\delta x + \ldots + T\xi d\delta x + \ldots$$
$$= d\,(T\xi\delta x) + \ldots .$$

Hieraus folgt nach (b) durch Integration:

$$\delta\int Tds = T\xi\delta x + T\eta\delta y + T\zeta\delta z + \text{Const.}$$

und wenn man das Integral von M_1 bis M_2 erstreckt und die Werthe von $T\xi$, $T\eta$, $T\zeta$ in M_1 und M_2 resp. durch A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 bezeichnet:

$$\delta\int Tdx = A_2\delta x_2 - A_1\delta x_1 + \ldots + C_2\delta z_2 - C_1\delta z_1.$$

Dieses Aggregat ist aber $= 0$, weil die Punkte M_1 und M_2 unveränderlich seyn sollen und daher δx_1 δx_2, $\delta y_1, \ldots = 0$ sind. *Mithin ist das Integral $\int Tds$, wenn die Grenzen desselben zwei bestimmte Punkte der Fadencurve sind, und wenn die Curve, auf welche es bezogen wird, die Fadencurve selbst ist, ein Maximum oder Minimum.*

§. 306.

Eben so, wie das Princip der lebendigen Kräfte und das Princip der kleinsten Wirkung nicht bloss für einen sich frei bewegenden Körper gelten, sondern auch dann noch Anwendung leiden, wenn die Bewegung des Körpers auf eine gegebene Fläche beschränkt ist, so behalten die im vor. §. bewiesenen, jenen Principen analogen Sätze auch dann noch ihre Gültigkeit, wenn der Faden über eine Fläche gespannt ist.

Für den ersten derselben geht dieses unmittelbar daraus hervor, dass die Gleichung $Xdx + .. + dT = 0$, aus welcher er gefolgert wurde, nach §. 285. auch bei einem auf einer Fläche beweglichen Faden statt findet.

Rücksichtlich des zweiten, das Maximum und Minimum von $\int Tds$ betreffenden Satzes ist zu bemerken, dass bei seiner Anwendung auf einen über eine Fläche gespannten Faden die von einem Punkte A der Faden-

curve bis zu einem andern B derselben beliebig zu ziehenden Curven nur solche seyn dürfen, die in der Fläche selbst enthalten sind. Ist nun, wie in §. 284, $F=0$ die Gleichung der Fläche, sind u, v, w die partiellen Differenzen von F nach x, y, z, dividirt durch die Quadratwurzel aus der Summe ihrer Quadrate, und bezeichnet R den Druck der Fläche auf den Faden, so hat man gegenwärtig in der Gleichung (c) des vorigen §., wenn die zu variirende Curve die Fadencurve selbst seyn soll, $-Ruds - d(T\xi)$ für Xds, u. s. w. zu setzen (§. 284.). Hierdurch kommen in der Gleichung (d) rechter Hand noch die Glieder $Rds(u\delta x + v\delta y + w\delta z)$ hinzu, die sich aber gegenseitig aufheben, weil die Variation in der Fläche selbst geschehen soll, und folglich $u\delta x + v\delta y + w\delta z = 0$ ist (§. 285.). Die Gleichung (d) bleibt daher unverändert, und es wird mithin auch im jetzigen Falle $\delta\int Tds = 0$; d. h. unter allen Werthen, die das Integral $\int Tds$ für die verschiedenen auf der Fläche von A bis B zu ziehenden Curven erhält, ist der für die Fadencurve selbst der grösste oder kleinste.

Specielle Folgerungen aus diesen Sätzen sind, dass, wenn auf den über die Fläche gelegten Faden keine anderen Kräfte, als die Spannungen an beiden Enden wirken, die Spannung überall gleich gross und die Fadencurve die kürzeste Linie ist, die von dem einen Ende zum andern auf der Fläche gezogen werden kann. Denn alsdann sind X, Y, Z null, folglich T constant. Hiermit aber wird das Integral $\int Tds$ der Länge der von einem zum andern Ende gezogenen Curve selbst proportional.

§. 307.

Es dürfte nicht überflüssig seyn, uns noch den

Satz, welcher den grössten oder kleinsten Werth des Integrals von Tds betrifft, an einem Beispiele deutlich zu machen. Wir wählen hierzu die Kettenlinie, die uns bereits in §. 305. zur Erläuterung des Gesetzes von den Differenzen der Spannungen diente.

Beziehen wir eine in zwei Punkten A und B aufgehängte schwere Kette auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem, dessen Axe der y vertical nach oben gerichtet ist, und dessen horizontale Ebene der x, z die Directrix der von der Kette gebildeten Linie enthält, so ist in jedem Punkte (x, y, z) dieser Linie die Spannung T mit y, also Tds mit yds proportional. *Sind folglich eine horizontale Ebene,* als Ebene der x, z, *und zwei darüber liegende Punkte* A *und* B *gegeben, so ist es unter allen von* A *bis* B *zu ziehenden Curven die Kettenlinie, deren Directrix in die Ebene fällt, für welche* das Integral $\int yds$, von A bis B genommen, d. h. *das Product aus der Länge* ($\int ds$) *der Curve in den Abstand* $\left(\frac{\int yds}{\int ds}\right)$ *ihres Schwerpunktes von der Ebene, seinen grössten oder kleinsten Werth hat.*

Dasselbe ergiebt sich auch, wie gehörig, durch Variation des Integrals von yds. Es ist nämlich

$$\delta \int yds = \int ds\delta y + \int y\,(\xi d\delta x + \eta d\delta y + \zeta d\delta z)$$
$$= \int ds\delta y + y\,(\xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z)$$
$$- \int [d(y\xi)\,\delta x + d(y\eta)\,\delta y + d(y\zeta)\,\delta z].$$

Soll mithin das Integral $\int yds$ ein Maximum oder Minimum seyn, so hat man nach den bekannten Regeln

$$(1)\ldots.\ d(y\xi) = 0,\ d(y\eta) - ds = 0,\ d(y\zeta) = 0$$

zu setzen. Hieraus fliesst durch Integration:

$$(2)\ldots.\ ydx = ads,\ ydy = (b + s)\,ds,\ ydz = cds,$$

folglich $adz = cdx$, welches, von Neuem integrirt,

$$(3) \quad az = cx + c'$$

giebt. Addirt man ferner die Quadrate der 3 Gleichungen (2), so kommt die endliche Gleichung

$$y^2 = a^2 + (b + s)^2 + c^2,$$

oder einfacher, wenn man $a^2 + b^2 + c^2 = f^2$ setzt und den Bogen s von dem Punkte an rechnet, in welchem die Tangente horizontal, also $dy : ds = 0$ ist:

$$(4) \quad y^2 = f^2 + s^2.$$

Man multiplicire noch die 3 Gleichungen (1) resp. mit ξ, η, ζ und addire sie, so findet sich, weil $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ und $\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta = 0$ ist:

$$dy = \eta ds,$$

d. i. eine identische Gleichung. Von den 3 Gleichungen (1) ist daher jede eine Folge der beiden übrigen, und es können mithin irgend zwei von einander unabhängige aus (1) fliessende Gleichungen die Stelle dieser drei vertreten und als das Resultat der Rechnung angesehen werden. Man wähle nun (3) und (4) zu solchen zwei Gleichungen. Die erstere derselben giebt zu erkennen, dass die gesuchte Curve in einer auf der Ebene der x, z normalen, also in einer verticalen, Ebene enthalten seyn muss. Hiermit in Verbinduug zeigt die letztere Gleichung (4) an, dass die Curve eine Kettenlinie ist, deren Directrix in der horizontalen Ebene der x, z liegt (§. 290. b.).

Man gewahrt leicht, wie aus der hiermit bewiesenen Eigenschaft der Kettenlinie der bekannte Satz, dass der Schwerpunkt einer mit ihren Endpunkten befestigten Kette am tiefsten liegt, wenn sie, frei hängend, im Gleichgewichte ist, als specielle Folgerung hergeleitet werden kann. Denn für dieselbe Curve, für welche unter allen von A bis B gezogenen Curven das Integral $\int y ds$ ein Maximum oder Minimum ist, muss

auch unter allen Curven von A bis B, welche mit ihr gleiche Länge $= l$ haben, dasselbe Integral, folglich auch $\int y ds : l$, ein Maximum oder Minimum seyn; d. h. für eine mit ihren Enden in A und B aufgehängte schwere Kette ist unter allen Linien von A bis B, welche mit der Kette gleiche Länge haben, die Höhe des Schwerpunktes über der horizontalen Ebene, welche die Directrix der Kette enthält, mithin auch die Höhe über irgend einer andern horizontalen Ebene, ein Maximum oder Minimum. Die Höhe des Schwerpunktes der Kettenlinie über einer horizontalen Ebene kann aber nur ein Minimum seyn. Denn wird ein auch noch so kleiner Theil der Kettenlinie um die Gerade, welche seine Endpunkte verbindet, um etwas gedreht, so steigt ersichtlich sein Schwerpunkt, folglich auch der Schwerpunkt der ganzen Linie, während die Länge der Linie unverändert bleibt.

Unter allen Curven von gleicher Länge, die von einem gegebenen Punkte zu einem andern gegebenen gezogen werden, ist demnach die Kettenlinie diejenige, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt.

Bei dieser Gelegenheit mag noch eine möglichst einfache Herleitung der Ausdrücke für die Coordinaten des Schwerpunkts der Kettenlinie eine Stelle finden.

Bezeichnet f den Parameter der Linie, und wird der Bogen s vom Scheitel an gerechnet, so ist nach §. 290. *b.* und *c.*:

$$y^2 - f^2 = s^2 \text{ und } s dx = f dy,$$

folglich $y dy = s ds$, $y dx = f ds$,

$$s y dy = s^2 ds = (y^2 - f^2) ds = y^2 ds - f y dx,$$

$$s dy = y ds - f dx \text{ und } d(sy) = 2 y ds - f dx.$$

Heissen daher x_1 und y_1 die Coordinaten des Schwerpunktes von s, so ist (§. 111.), wenn wir bei

den Integrationen die Constanten für einen vom Scheitel anfangenden Bogen s bestimmen:

$$sx_1 = \int x ds = sx - \int s dx = sx - fy + f^2,$$
$$sy_1 = \int y ds = \tfrac{1}{2}(sy + fx).$$

Hiermit kann aber nach §. 111. auch jedes andern Bogens Schwerpunkt ohne Mühe gefunden werden.

§. 308.

Die Lösung der Aufgabe, von einem gegebenen Punkte A (Fig. 84.) bis zu einem andern gegebenen B eine Curve zu ziehen, für welche in Bezug auf eine gegebene, mit A und B in einer Ebene liegende Gerade CD, als Axe der x, das Integral $\int y ds$ ein Maximum oder Minimum ist, kommt nach vor. §. auf die Construction einer Kettenlinie hinaus, welche durch A und B geht und CD zur Directrix hat. Am leichtesten lässt sich diese Construction in dem besonderen Falle ausführen, wenn A und B gleichweit von CD entfernt sind.

Man denke sich zu dem Ende die Kettenlinie in ihrer natürlichen Lage, also die Ebene $ABCD$ vertical, und die Gerade CD, so wie auch AB, horizontal, und letztere Gerade oberhalb der erstern. Durch den Mittelpunkt E der AB lege man eine Verticale, welche CD in F treffe und den Scheitel der zu construirenden Kettenlinie enthalten wird.

Man beschreibe nun mit einem Parameter von beliebiger Grösse und zu einer willkührlich gezogenen Horizontalen OX, als Directrix, eine Kettenlinie $S.V.S$ sey der Scheitel derselben, und O der unter S liegende Punkt der Directrix, also OS der Parameter. Von O ziehe man eine Tangente an die Kettenlinie, und N sey der Berührungspunkt. Man ziehe ferner FA und lege durch O auf derselben Seite von OS, auf

elcher N liegt, eine Gerade OP, welche mit OS ei-
n Winkel = EFA mache.

Ist nun erstens dieser Winkel kleiner als SON, wird OP die Kettenlinie in zwei Punkten schneiden, n denen der eine M_1 zwischen S und N, der andere $'_2$ ausserhalb SN auf der Seite von N liegt. Man ige alsdann von F nach E zu eine Linie FS_1, die ch zu FA, wie OS zu OM_1, verhält, und ziehe von bis A eine dem Bogen SM_1 ähnliche Curve. Hier-ch sind die mit Bögen begrenzten Winkel SOM_1 d S_1FA einander ähnliche Figuren, und weil SM_1 r Bogen einer Kettenlinie ist, welche S zum Schei-l und OS zum Parameter hat, so wird auch S_1A r Bogen einer Kettenlinie, S_1 der Scheitel dersel-n und FS_1 ihr Parameter seyn. Dass dieser Bogen, er S_1 hinaus verlängert, durch B gehen wird, ist n selbst klar. Auf gleiche Weise erhellet, dass, nn man auf FE von F nach S_2 die vierte Propor-nallinie zu OM_2, OS, und FA trägt, auch die durch $_2$ als Scheitel, und mit FS_2, als Parameter, zu schreibende Kettenlinie den Punkten A und B gegnen wird. Es giebt demnach im gegenwärtigen alle zwei Kettenlinien, welche durch A und B gehen d CD zur Directrix haben.

Ist zweitens der Winkel EFA dem SON gleich, fällt die Gerade OP mit der Tangente, also die nkte M_1 und M_2 mit N, zusammen, und es giebt r eine die Bedingung der Aufgabe erfüllende Ket-linie, deren Parameter die vierte Proportionale zu N, OS und FA ist.

Findet sich aber drittens EFA grösser als SON, wird die Kettenlinie SN von OP in keinem Punkte troffen, und die Lösung der Aufgabe ist unmöglich.

Die Richtigkeit dieser Schlüsse beruht darauf, dass die Kettenlinie zu den Curven gehört, welche nur einen Parameter haben, und dass daher alle Kettenlinien einander ähnlich sind. Eben deswegen muss auch der Winkel *SON*, auf welchen es hier besonders ankommt, einen für alle Kettenlinien constanten Werth haben. Um ihn numerisch zu bestimmen, erinnere man sich, dass p oder die trigonometrische Tangente des Winkels, den eine an den Endpunkt (x, y) des Bogens s gelegte Berührende mit der Axe der x macht, $=hs$ ist (§. 288.). Geht diese Berührende zugleich durch den Anfangspunkt O der Coordinaten, wie ON, so ist auch $p=y:x$, und man hat daher für den Punkt N die Gleichung: $y=hxs$, oder wenn man y und s durch x ausdrückt (§. 289. und §. 290. *b.*):

$$e^{hx}+e^{-hx}=hx(e^{hx}-e^{-hx}),$$

und wenn man $hx=u$ setzt:

$$(u+1)e^{-u}=(u-1)e^{u},$$

$$\text{oder } \log(u+1)-\log(u-1)=2u.$$

Hieraus aber findet sich .... $u=1,19969$,

$$tang\, XON=hs=\frac{e^{u}-e^{-u}}{2}=1,5088=\text{tang}\, 56°\, 28',$$

also $SON=33°\ 32'$. Man kann daher durch A und B entweder zwei, oder nur eine, oder keine Kettenlinie legen, welche CD zur Directrix hat, nachdem der Winkel $EFA <, =$ oder $> 33°\ 32'$, oder, was dasselbe ausdrückt, jenachdem FE, d. i. der Abstand der Horizontalen AB von der Directrix, $>, =$ oder $<$ $0,7544\, AB$ $(=\frac{1}{2}.1,5088\, AB)$ ist.

§. 309.

Ohne die Untersuchung auf den Fall auszudehnen, wenn die zwei Punkte A und B, durch welche die Ket-

tenlinie geführt werden soll, nicht in einer Horizontalen liegen, wollen wir nur noch die Maxima und Minima näher betrachten, welche die so eben construirten zwei Kettenlinien unter der einfachen Annahme darstellen, dass alle von A bis B zu ziehenden Curven gleichfalls Kettenlinien in ihrer natürlichen Lage sind, d. h. Kettenlinien, deren Scheitel sämmtlich in der Verticalen EF, und in deren Verlängerung über F hinaus, liegen.

Tritt nun, dieses vorausgesetzt, der erste jener drei Fälle ein, und können daher von A bis B zwei verschiedene Kettenlinien AS_1B und AS_2B gezogen werden, welche CD zur Directrix haben, so wird unter allen von A bis B möglichen Kettenlinien die eine jener beiden es seyn, für welche das Integral $\int yds$ ein Maximum, und die andere, für welche es ein Minimum ist, indem sonst, wenn für jede von beiden Linien das Integral ein Maximum (Minimum) wäre, zwischen S_1 und S_2 noch der Scheitel einer dritten Kettenlinie liegen müsste, für welche das Integral einen kleinsten (grössten) Werth hätte, also einer dritten, deren Directrix gleichfalls CD wäre; diese dritte ist aber nicht möglich, weil die Gerade OP die Kettenlinie SN in nicht mehr, als zwei Punkten, schneiden kann.

Es ist ferner leicht einzusehen, dass jenes Integral, oder das ihm gleiche Product aus der Länge der Kettenlinie in den Abstand ihres Schwerpunktes von CD, für die tiefer hängende Kettenlinie AS_2B ein Maximum, und mithin für die höhere AS_1B ein Minimum ist. Denn je tiefer der Scheitel einer von A bis B gehenden Kettenlinie liegt, desto tiefer, und dieses ohne angebbare Grenze, liegt offenbar auch der Schwerpunkt derselben. Bei einem genugsam tief unter CD liegenden Scheitel S wird daher der Schwerpunkt in CD

selbst fallen, und mithin jenes Product $= 0$ seyn. Lässt man nun diese Kettenlinie in Gedanken immer kürzer werden, so steigen ihr Scheitel S und ihr Schwerpunkt, letzterer von CD an, in die Höhe; das Product muss folglich positiv werden, also wachsen, und, wenn S bis S_2 gekommen ist, seinen grössten Werth erreichen. — Steigt S noch höher, so nimmt das Product wieder ab, wird, wenn S mit S_1 zusammenfällt, ein Minimum, und wächst daher von Neuem, wenn S von S_1 bis E zu steigen fortfährt.

Fallen S_1 und S_2 zusammen, und giebt es mithin nur eine durch A und B zu legende Kettenlinie, welche von CD um ihren Parameter absteht, so folgt auf die Zunahme des Products, wenn der Scheitel S von F bis S_2 rückt, unmittelbar die weitere Zunahme bei der Bewegung des Scheitels von S_1 bis E, und das Maximum und Minimum fallen daher weg.

Auf gleiche Art endlich wächst das Product fortwährend, wenn A und B der CD so nahe liegen, dass auch jene eine Kettenlinie nicht mehr construirt werden kann.

Achtes Kapitel.

Vom Gleichgewichte an elastischen Fäden.

§. 310.

Wie gleich am Anfange dieses Werkes erinnert worden, giebt es in der Natur keinen Körper, dessen Theilchen vollkommen fest mit einander verbunden wä-

ren. Vielmehr ist jeder Körper, den wir fest nennen, zugleich elastisch, d. h. er besitzt die Eigenschaft, dass, wenn Kräfte auf ihn einwirken, seine Gestalt in etwas verändert wird, eben dadurch aber neue Kräfte erzeugt werden, welche die anfängliche Lage der Theilchen gegen einander zurückzuführen streben, und dieses mit desto grösserer Intensität, je mehr die gegenseitigen Entfernungen der Theilchen geändert worden sind. Uebrigens halten diese neu entstehenden Kräfte einander das Gleichgewicht, indem sonst, wenn die Theilchen des Körpers in ihrer neuen Lage durch unelastische Bänder mit einander verbunden und die äusseren Kräfte entfernt würden, die damit nicht aufgehobenen elastischen Kräfte den Körper in eine continuirliche Bewegung setzen würden, welches nicht möglich ist. Eine unmittelbare Folge hiervon ist, dass die Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen den äusseren Kräften bei elastischen Körpern dieselben, als wie bei unelastischen Körpern sind.

Bei einem Systeme von nur zwei Punkten wird demnach die Elasticität darin bestehen, dass, wenn die gegenseitige Entfernung der Punkte durch Einwirkung äusserer Kräfte vergrössert oder verringert wird, zwei auf sie gleich Pressungen wirkende, und daher einander gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte erzeugt werden, welche sie im erstern Falle gegen einander treiben, im letztern von einander zu entfernen streben. Und wenn Kräfte, welche auf die beiden Punkte wirken, im Gleichgewichte sind, so muss an jedem Punkte besonders zwischen den an ihn angebrachten Kräften und der ihn treibenden elastischen Kraft Gleichgewicht herrschen.

Eine elastische Linie, Fläche oder Körper kann

man sich als ein Aggregat von physischen einander unendlich nahe liegenden Punkten vorstellen, von denen jeder mit jedem der übrigen, oder doch mit allen um ihn herum bis auf eine gewisse Entfernung liegenden, auf die eben besagte Weise elastisch verbunden ist. Wirken nun auf ein solches System äussere Kräfte, und sind diese, nachdem sich die ursprünglichen Entfernungen der Punkte von einander dem Gesetze der Elasticität gemäss geändert haben, im Gleichgewichte, so müssen eben so, wie bei dem vorigen Systeme von nur zwei Punkten, an jedem Punkte besonders die äusseren Kräfte den elastischen das Gleichgewicht halten.

§. 311.

Von der Function, welche die elastische Kraft von einer Aenderung $=x$ des Abstandes zweier elastisch verbundener Punkte ist, lässt sich im Allgemeinen nur soviel bestimmen, dass sie für $x=0$ ebenfalls null seyn und mit x gleichzeitig das Zeichen wechseln muss. Die einfachste Hypothese, die wir hinsichtlich dieser Function machen können, ist daher, dass wir sie der Aenderung x einfach proportional setzen. Auch stimmt diese Annahme, so lange x nur klein ist, sehr wohl mit der Erfahrung überein. Wie übrigens diese Function von der anfänglichen Entfernung der beiden Punkte selbst mit abhängt, lassen wir unentschieden.

Seyen nun A und B die beiden Punkte; auf A wirke die Kraft P, auf B die Kraft Q, und halte die eine der andern das Gleichgewicht. Die Entfernung AB erhalte dadurch das Increment x, und die damit erzeugten auf A und B in AB wirkenden elastischen Kräfte seyen resp. ex und $-ex$, wobei, wenn die Richtung von A nach B für die positive genommen

wird, e eine positive Grösse ist. Alsdann müssen an A die Kräfte P und ex, und an B die Kräfte Q und $-ex$ einander das Gleichgewicht halten. Die Kräfte P und Q müssen folglich eben so, als wenn die gegenseitige Entfernung der Punkte unveränderlich wäre, einander gleich und direct entgegengesetzt seyn. Das Increment x aber findet sich $= -P:e = Q:e$, ist also desto grösser, je grösser die Kräfte P und Q sind, und ist entweder ein wirkliches Increment, oder eine Verkürzung der Linie AB, nachdem P negativ oder positiv ist, d. h. nachdem die Kräfte P und Q die Punkte A und B von einander zu entfernen, oder einander zu nähern streben.

Seyen ferner A, B, C drei in einer Geraden, B zwischen A und C, liegende Punkte, von denen je zwei elastisch mit einander verbunden sind. Auf sie wirken nach Richtungen, die mit derselben Geraden zusammenfallen, die sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte P, Q, R. Die dadurch bewirkten Incremente der Abstände AB, BC und AC seyen x, y und z, $= x+y$, weil die Punkte in der anfänglichen Geraden bleiben. Die diesen Incrementen proportionalen elastischen Kräfte setze man $=fx$, gy, hz, so dass auf A und B nach der Richtung AB die Kräfte fx und $-fx$ wirken, u. s. w. Hiernach hat man für das Gleichgewicht an A, B und C resp. die Gleichungen:

$$P+fx+hz=0,\quad Q-fx+gy=0,\quad R-gy-hz=0,$$

oder, weil $z=x+y$ ist:

$$P+(f+h)x+hy=0,\quad Q-fx+gy=0,\quad R-hx-(g+h)y=0.$$

Hieraus folgt zuerst die schon bekannte Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht des ganzen Systems:

$$P+Q+R=0,$$

und sodann die Werthe der Incremente:

$$x = \frac{Qh - Pg}{fg + gh + hf}, \quad y = \frac{Rf - Qh}{fg + gh + hf}, \text{ und}$$

$$z = x + y = \frac{Rf - Pg}{fg + gh + hf}.$$

Indem man also nächst den Kräften P, Q, R noch die Grössen f, g, h, welche die Stärke der Elasticität für die Linien AB, BC, AC ausdrücken, als gegeben voraussetzt, kann man die Aenderungen x, y, z dieser Linien und damit zugleich die Pressungen fx, gy, hz derselben einzeln berechnen.

Man bemerke hierbei, dass diese drei Pressungen unbestimmt geblieben seyn würden, wenn man die Punkte A, B, C fest, nicht elastisch mit einander verbunden, angenommen hätte, indem zur Bestimmung der gegenseitigen Lage dreier Punkte A, B, C in einer Geraden schon zwei Abstände, wie AB und BC, hinreichen, der dritte AC aber überflüssig ist.

Auf ähnliche Weise verhält es sich auch bei jedem andern Systeme mit einander verbundener Punkte, wenn die Anzahl der Verbindungslinien mehr als hinreichend ist, um die gegenseitige Lage der Punkte zu bestimmen. So lange man diese Linien von unveränderlicher Länge annimmt, bleiben ihre Pressungen zum Theil unbestimmt; sie lassen sich aber insgesammt einzeln angeben, wenn man die Linien elastisch veränderlich setzt.

So hat man für das Gleichgewicht zwischen Kräften, welche an n in einer Geraden liegende und elastisch mit einander verbundene Punkte angebracht sind, und deren Richtungen in dieselbe Gerade fallen, n Gleichungen, für jeden der n Punkte nämlich eine. Aus diesen n Gleichungen wird sich zuerst die Bedin-

gung des Gleichgewichts herleiten lassen, welche ausdrückt, dass die Summe der angebrachten Kräfte null ist. Die $n-1$ übrigen davon unabhängigen Gleichungen enthalten nächst jenen äussern Kräften noch die elastischen Kräfte und damit die den letztern proportionalen Aenderungen der Entfernungen der Punkte. Da nun bei einem Systeme von n Punkten in einer Geraden aus $n-1$ solchen Aenderungen, welche von einander unabhängig sind, alle übrigen gefunden werden können, so wird man mittelst jener $n-1$ Gleichungen alle in dem Systeme vorkommenden Aenderungen, und damit die elastischen Kräfte selbst oder die Pressungen berechnen können.

Sind die n Punkte und die auf sie wirkenden äusseren Kräfte in einer und derselben Ebene begriffen, so hat man für das Gleichgewicht jedes Punktes zwei Gleichungen, also zusammen $2n$ Gleichungen. Hieraus müssen sich nach Elimination der elastischen Kräfte die 3 bekannten Gleichungen für das Gleichgewicht eines Systems von Punkten in einer Ebene ergeben. Es bleiben daher $2n-3$ davon unabhängige Gleichungen übrig, welche die elastischen Kräfte, d. i. den Abstandsänderungen der Punkte proportionale Grössen enthalten. Mithin lassen sich auch hier alle diese Aenderungen und damit die elastischen Kräfte oder Pressungen bestimmen, da bei einem Systeme von n Punkten in einer Ebene die Anzahl der von einander unabhängigen Entfernungen, also auch ihrer Aenderungen, aus denen sich alle übrigen herleiten lassen, gleichfalls $=2n-3$ ist.

Bei einem Systeme von Kräften, welche auf n Punkte im Raume wirken, hat man zunächst 3 Gleichungen für das Gleichgewicht jedes Punktes, also im

Ganzen $3n$ Gleichungen, und nach Absonderung der 6 Bedingungen für das Gleichgewicht des ganzen Systemes noch $3n-6$ Gleichungen. Eben so gross aber ist bei n Punkten im Raume die Anzahl der von einander unabhängigen Aenderungen der Entfernungen; folglich u. s. w.

§. 312.

Kehren wir jetzt zu dem im vorigen §. näher betrachteten Systeme von drei elastisch mit einander verbundenen Punkten A, B, C zurück und setzen, dass bloss A mit B und B mit C, nicht aber auch A mit C, elastisch verbunden seyen, und dass nur auf A und C die Kräfte P und R wirken. Die drei Gleichungen für das Gleichgewicht werden damit:

$$P+fx=0,\quad -fx+gy=0,\quad R-gy=0,$$

woraus, eben so wie in §. 269., zu schliessen, dass, wenn auch die 3 Punkte in einer Geraden zu liegen ursprünglich nicht genöthigt sind, sie doch beim Gleichgewichte der auf A und C wirkenden Kräfte P und R in einer solchen liegen, und dass alsdann diese zwei Kräfte einander gleich und direct entgegengesetzt seyn müssen. Die Incremente der Entfernungen AB und BC sind resp. $x=-P:f$ und $y=-P:g$.

Zu einem ganz analogen Resultate gelangt man bei einer Reihe von vier oder mehrern Punkten A, B, C, D,..., von denen jeder mit dem nächstfolgenden elastisch verbunden ist, so dass, wenn AB, BC, CD,... sich resp. um x, y, z,..., ändern, die elastischen Kräfte fx, gy, hz,... erzeugt werden. Sollen nämlich zwei auf den ersten und letzten Punkt der Reihe wirkende Kräfte P und Q im Gleichgewichte seyn, so müssen sämmtliche Punkte in einer Geraden liegen und die zwei

Kräfte einander gleich und direct entgegengesetzt seyn. Die Incremente der einzelnen Abstände aber werden:

$$x = -\frac{P}{f},\ y = -\frac{P}{g},\ z = -\frac{P}{h},\ \text{etc.},$$

folglich die Längenzunahme der ganzen Reihe

$$= -P\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}+\frac{1}{h}+..\right).$$

Nehmen wir sämmtliche Abstände AB, BC,... gleich gross an und setzen auch alle die constanten f, g, h,... einander gleich, so ist, wenn n die Zahl der Abstände, und daher $n.AB$ die anfängliche Länge der Reihe ausdrückt, das Wachsthum ihrer Länge $= -nP:f = nQ:g$, also der anfänglichen Länge und den äusseren Kräften, welche am Anfang und Ende angebracht sind, proportional.

Gleichgewicht an einem elastisch dehnbaren Faden.

§. 313.

Je kleiner man bei der eben betrachteten Reihe elastisch verbundener Punkte die einander gleichen Abstände derselben werden lässt, desto mehr nähert man sich dem Begriffe eines gleichförmig dichten und seiner Länge nach gleichförmig elastischen Fadens. Wenn demnach ein solcher Faden eine Länge $= 1$ hat, und von zwei an seinen Enden angebrachten Kräften, deren jede $= 1$, um eine Länge $= E$ ausgedehnt wird, so wird, zufolge des vorhin von der Reihe Erwiesenen, ein Faden von derselben physischen Beschaffenheit und von einer Länge $= a$ durch zwei ihn spannende Kräfte, deren jede $= P$ ist, eine Längenzunahme $= aPE$ erhalten, und man ersieht zugleich, dass, indem auf diese Weise die anfängliche Länge des Fadens a sich in $a\,(1+PE)$ ver-

wandelt, seine anfängliche Dichtigkeit sich in dem Verhältniss $1 + PE : 1$ vermindern muss.

Mit Hülfe dieser Principien können wir jetzt leicht das Gleichgewicht eines elastisch dehnbaren Fadens in Untersuchung nehmen, wenn nicht blos an seinem Anfang und Ende, sondern auch in allen seinen übrigen Punkten (x, y, z) äussere Kräfte (X, Y, Z) thätig sind. Ist nämlich beim Zustande des Gleichgewichts ϱ die Dichtigkeit des Fadenelements ds, mithin ϱds seine Masse, und bezeichnet T die Spannung des Elements, so hat man für das Gleichgewicht desselben, mag es elastisch seyn, oder nicht, die drei Gleichungen (§. 280. und §. 286.):

$$X\varrho\, ds + d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \text{ u. s. w.}$$

Unter der Voraussetzung nun, dass der Faden vor Einwirkung der Kräfte eine gleichförmige Dichtigkeit $= 1$ gehabt habe und seiner Länge nach eine gleichförmige durch E bestimmte Elasticität besitze, ist die nachherige Dichtigkeit des Elements ds, $= 1 : (1 + ET)$, und die drei Gleichungen für das Gleichgewicht werden damit:

$$Xds + (1 + ET)\, d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

$$Yds + (1 + ET)\, d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

$$Zds + (1 + ET)\, d\left(T\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

aus denen, wenn X, Y, Z als Functionen von x, y, z gegeben sind, durch Elimination von T und durch Integration die zwei Gleichungen für die Fadencurve gefunden werden können.

Ist ferner $d\sigma$ die ursprüngliche Länge des Elements ds, so hat man

$$d\sigma = \frac{ds}{1+ET},$$

woraus sich mit Hülfe des aus den vorigen Gleichungen sich ergebenden Werthes von T die durch die Kräfte bewirkte Ausdehnung $s-\sigma$ des ganzen Fadens oder irgend eines Theils desselben berechnen lässt.

Man kann in dieser Hinsicht bemerken, dass, wenn man vorige drei Gleichungen resp. mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ multiplicirt und hierauf addirt, die Gleichung

$$Xdx + Ydy + Zdz + (1+ET)dT = 0$$

hervorgeht (§. 283. *a.*). Hierin T und dT durch das Verhältniss $ds : d\sigma$ und dessen Differential ausgedrückt, kommt

$$Xdx + Ydy + Zdz + \frac{1}{2E}\, d\left(\frac{ds^2}{d\sigma^2}\right) = 0,$$

eine Formel, wodurch sich die Ausdehnung des Fadens unmittelbar bestimmen lässt.

§. 314.

Lassen wir, um die Theorie des vorhergehenden §. durch ein Beispiel zu erläutern, die Schwerkraft g es seyn, welche auf den Faden wirkt, so ist der Faden, wie im Früheren die unelastische Kettenlinie, in einer verticalen Ebene enthalten, und es sind, wenn diese zur Ebene der x, y genommen wird, bloss die zwei ersten der drei Hauptgleichungen zu berücksichtigen. Hierin werden, wenn man die Axe der y vertical, nach oben zu positiv, seyn lässt: $X=0$ und $Y=-g$, und die zwei Gleichungen selbst reduciren sich damit auf:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0,\ g ds=(1+ET)\,d\left(T\frac{dy}{ds}\right).$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, wie in §. 287:

$$T=A\frac{ds}{dx},$$

und die zweite wird damit, wenn man noch, wie in §. 289., den von der Tangente der Curve mit der Axe der y gebildeten Winkel $=\psi$ setzt:

$$g ds=\left(1+\frac{AE}{\sin\psi}\right)d.\,A\operatorname{cotg}\psi.$$

Hieraus folgt weiter:

$$g dx=g ds.\sin\psi=(\sin\psi+AE)\,d.\,A\operatorname{cotg}\psi,$$
$$g dy=g ds.\cos\psi=(\cos\psi+AE\operatorname{cotg}\psi)\,d.\,A\operatorname{cotg}\psi,$$

und wenn man integrirt und Ah für g schreibt:

$$hx=-\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi+AE\operatorname{cotg}\psi$$
$$hy=\frac{1}{\sin\psi}+\tfrac{1}{2}AE\operatorname{cotg}\psi^2.$$

Die Constanten sind bei diesen zwei Integrationen null gesetzt worden, wodurch es geschieht, dass hier eben so, wie bei der unelastischen Kettenlinie, für $\psi=90^\circ$, d. i. für den tiefsten Punkt oder den Scheitel der Curve, $x=0$ und $hy=1$ wird.

Die Elimination von ψ aus den letzt erhaltenen zwei Gleichungen giebt die Gleichung der Curve zwischen x und y. Wir wollen aber diese Elimination nur für den Fall ausführen, wenn die Elasticität des Fadens so gering und damit E so klein ist, dass die zweite und die höheren Potenzen von E vernachlässigt werden können. Werde nun

(a) $AE\operatorname{cotg}\psi=-i$, $\tfrac{1}{2}AE\operatorname{cotg}\psi^2=-k$

gesetzt, wo daher i und k kleine Grössen von derselben Ordnung, wie E, sind. Hiermit werden jene zwei Gleichungen:

(*b*) $hx + i = -\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\psi$, $hy + k = \frac{1}{\sin\psi}$,
woraus, wie in §. 289.:

$$2(hy + k) = e^{hx+i} + e^{-hx-i}, \text{ also}$$

$$(c) \quad 2hy = e^{hx} + e^{-hx} + i(e^{hx} - e^{-hx}) - 2k$$

folgt. Ferner fliesst aus (*b*):

$$\operatorname{cotg}\psi = \tfrac{1}{2}(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\psi - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi) = \tfrac{1}{2}(e^{hx} - e^{-hx}),$$

wenn man bloss das von i freie Glied beibehält. Substituirt man nun diesen Werth von $\operatorname{cotg}\psi$ in (*a*) und setzt die damit hervorgehenden Werthe von i und k in (*c*), so findet sich

$$2hy = e^{hx} + e^{-hx} - \tfrac{1}{4}AE(e^{hx} - e^{-hx})^2,$$

als Gleichung der elastischen Kettenlinie.

Was hierbei noch die Ausdehnung des Fadens anlangt, so ist unter derselben Annahme, dass die höheren Potenzen von E vernachlässigt werden können, und zufolge des obigen Werthes von T:

$$d\sigma = \frac{ds}{1 + ET} = ds - ETds = ds - AE\frac{ds^2}{dx}$$

$$= ds - AEhyds = ds - Egyds,$$

weil $hydx = ds$ (§. 290. *c*.) und $Ah = g$.

Die Ausdehnung des Bogens σ ist daher

$$s - \sigma = Eg\int yds.$$

Hiernach, und weil $(\int yds) : s =$ dem Abstande des Schwerpunktes des Bogens s von der Directrix, ist die Ausdehnung eines Bogens seiner Länge und dem Abstande seines Schwerpunkts von der Directrix proportional.

§. 315.

In dem besondern Falle, wenn von dem elastisch dehnbaren Faden nur das eine Ende B befestigt ist, das andere A aber frei herabhängt, und daher der Fa-

den selbst eine Verticale bildet, ist die Spannung in jedem Punkte P des Fadens dem Gewichte des unter P befindlichen Theiles AP gleich. Setzen wir daher $AP = s$, und die ursprüngliche Länge von AP, $= \sigma$, so haben wir $T = g\sigma$ und

$$ds = (1 + ET)\,d\sigma = (1 + Eg\sigma)\,d\sigma,$$

und wenn wir von A bis P integriren:

$$s = \sigma + \tfrac{1}{2}Eg\sigma^2,$$

wo σ und s auch die ursprüngliche und nachherige Länge des ganzen Fadens AB bedeuten können.

Ist an dem herabhängenden Ende A ein Gewicht befestigt, dessen Masse $= M$, so ist $T = g\,(M + \sigma)$, und es findet sich damit auf gleiche Weise

$$s = \sigma + Eg\sigma\,(M + \tfrac{1}{2}\sigma).$$

Hierauf gründet sich eine von John Herschel *) vorgeschlagene Methode, um das Verhältniss, in welchem die Schwerkraft auf der Oberfläche der Erde vom Aequator nach den Polen zunimmt, statt durch die bisherigen Pendelbeobachtungen, auf statischem Wege mit Hülfe eines ausdehnbaren Fadens oder einer seine Stelle vertretenden schraubenförmig gewundenen Feder zu messen. Durch kleine versuchsweise zu bestimmmende Zusätze oder Verminderungen der Masse M, welche an dem Faden, dessen ursprüngliche Länge $= \sigma$ ist, angehängt wird, sucht man es nämlich zu bewirken, dass bei der von einem Orte zum andern sich nicht ganz gleich bleibenden Schwerkraft, der Faden doch immer zu derselben Länge s ausgedehnt wird. Da nun alsdann in dem obigen Ausdrucke für s, nicht σ und E, noch s constant ist, so ergiebt sich von einem Orte der Erde zum andern die Schwerkraft g umge-

*) Siehe dessen Treatise on Astronomy, Seite 124.

kehrt der jedesmal angehängten Masse, vermehrt um die halbe Masse des Fadens, proportional.

Gleichgewicht an einem elastisch biegsamen Faden.

§. 316.

Die Kraft der Elasticität kann sich an einem Faden ausserdem, dass sie die Ausdehnung desselben zu verhindern strebt, auch dadurch äussern, dass sie der Biegung des Fadens, d. i. den Kräften, welche seine ursprüngliche Krümmung zu ändern suchen, sich widersetzt. Um auch diese Aeusserung der Elasticität zu untersuchen und dabei auf das Einfachste zu Werke zu gehen, wollen wir die erstere Art von Elasticität jetzt unwirksam seyn lassen, also die Elemente des Fadens von unveränderlicher Länge setzen und für die anfängliche Form des Fadens eine Gerade annehmen.

Sind demnach AB und BC (Fig. 85.) zwei nächstfolgende Elemente des Fadens, so sollen sich, sobald BC nicht mehr die geradlinige Fortsetzung von AB ist, sondern mit AB einen Winkel macht, elastische Kräfte erzeugen, welche die anfängliche geradlinige Lage wieder herzustellen streben. Diese elastischen Kräfte werden ohne Wirkung seyn, sobald man irgend zwei Punkte D und E des einen und andern Schenkels in ihrer jetzigen Lage durch eine Linie DE von unveränderlicher Länge mit einander verbindet; sie werden daher mit den Spannungen dieser Linie in D und E das Gleichgewicht halten und folglich als zwei einander gleiche Kräfte anzusehen seyn, welche auf zwei beliebige Punkte D und E der Schenkel nach direct entgegengesetzten Richtungen wirken.

Die Elasticität des Winkels ABC wird hiernach

gegeben seyn, wenn man für irgend zwei Punkte seiner Schenkel die gemeinschaftliche Grösse dieser zwei einander direct entgegengesetzten Kräfte kennt, und es muss sich daraus die gemeinschaftliche Grösse der an irgend zwei andern Punkten der Schenkel nach direct entgegengesetzten Richtungen anzubringenden mit der Elasticität gleichwirkenden Kräfte bestimmen lassen.

In der That, sollen zwei an den Punkten *D* und *E* der Schenkel eines beliebig veränderlichen und frei beweglichen Winkels *ABC* nach direct entgegengesetzten Richtungen angebrachte einander gleiche Kräfte *Dd* und *Ee* mit zwei andern an den Punkten *F* und *G* der Schenkel angebrachten Kräften *Ff* und *Gg* gleiche Wirkung haben, also mit *fF* und *gG* im Gleichgewichte seyn, so müssen auch letztere einander gleich und direct entgegengesetzt seyn, indem sonst, wenn die gegenseitige Entfernung der Punkte *D* und *E* unveränderlich gemacht und damit die Wirkung der Kräfte *Dd* und *Ee* aufgehoben würde, das Gleichgewicht nicht bestehen könnte. Es müssen ferner die Kräfte *Dd* und *fF* in Bezug auf den Punkt *B* einander gleiche und entgegengesetzte Momente haben, damit sie, wenn der Punkt *B* unbeweglich gemacht wird, den Schenkel *AB* nicht zu drehen vermögen. Dasselbe gilt von den Kräften *Ee* und *gG* am andern Schenkel *BC*.

Und umgekehrt: Sind *Dd* und *Ee* sowohl, als *fF* und *gG*, einander gleich und direct entgegengesetzt, und haben *Dd* und *fF*, folglich auch *Ee* und *gG*, in Bezug auf *B* einander gleiche und entgegengesetzte Momente, so herrscht Gleichgewicht. Denn wegen der gleichen Momente haben *Dd* und *fF* sowohl, als *Ee* und *gG*, eine durch *B* gehende Resultante. Beide Resultanten aber sind einander gleich und entgegengesetzt,

weil in derselben Beziehung Dd und fF zu Ee und gG stehen.

Kann demnach die Elasticität des Winkels ABC durch die Kräfte Dd und Ee dargestellt werden, so kann sie es auch durch die Kräfte Ff und Gg, wenn anders das Moment jeder der letztern Kräfte dem Momente jeder der erstern in Bezug auf die Spitze B des Winkels gleich ist. Die Elasticität des Winkels ABC ist folglich durch dieses Moment vollkommen gegeben, indem damit für je zwei beliebig in den Schenkeln angenommene Punkte D und E die daselbst anzubringenden mit der Elasticität gleichwirkenden Kräfte gefunden werden können. Man hat nämlich, wenn u das Moment der am Schenkel BC anzubringenden Kraft, also $-u$ das Moment der Kraft am Schenkel AB, bezeichnet:

$$dD = Ee = \frac{BEe}{BDE} \cdot DE = \frac{u \cdot DE}{2BDE} = \frac{u}{DB \cdot \sin EDB}$$

Uebrigens müssen die zwei Kräfte so gerichtet seyn, dass, wenn ihre Angriffspunkte beide in die Schenkel des Winkels selbst, oder beide in ihre Verlängerungen über die Spitze hinaus fallen, sie die Punkte von einander zu entfernen streben, dagegen die Punkte einander zu nähern suchen, wenn der eine in den einen Schenkel und der andere in die Verlängerung des andern Schenkels über die Spitze fällt.

§. 317.

Durch die eben angestellten Betrachtungen sind wir in den Stand gesetzt, aus den im Frühern entwickelten Gleichungen für das Gleichgewicht zwischen Kräften an einem vollkommen biegsamen Faden die

Gleichungen für das Gleichgewicht an einem elastisch biegsamen Faden herzuleiten. Ist nämlich ein solcher, der ursprünglich geradlinig war, durch äussere Kräfte zu der Curve $A \ldots IKLMN$ (Fig. 86.) gebogen worden, so können wir uns das Streben je zweier nächstfolgenden Elemente desselben, wie IK und KL, sich geradlinig neben einander zu legen, durch zwei einander gleiche Kräfte hervorgebracht denken, welche auf zwei beliebige Punkte der Elemente selbst, etwa auf I und L, nach den direct entgegengesetzten Richtungen LI und IL wirken. Indem wir daher solche Paare von Kräften für die Elasticität der von je zwei nächstfolgenden Elementen gebildeten Winkel substituiren, haben wir es wiederum mit einem vollkommen biegsamen Faden zu thun, auf dessen Elemente ausser den äusseren Kräften noch andere durch die Elasticität bestimmte Kräfte, gleich den äussern, wirken, und wir können nun die im Obigen für das Gleichgewicht zwischen bloss äussern Kräften erhaltenen Gleichungen auch auf den gegenwärtigen Fall anwenden.

Am geeignetsten hierzu sind die in §. 281. *b.* gegebenen Momentengleichungen. Sind nämlich, wie wir fürs Erste annehmen wollen, der Faden und die auf ihn wirkenden äussern Kräfte in einer und derselben Ebene enthalten, so hat man nur auszudrücken, dass das Moment aller auf den Faden von seinem Anfange A bis zu irgend einem andern Punkte M desselben wirkenden Kräfte in Bezug auf letztern Punkt null ist. Es ist aber dieses Moment, wenn zur Ebene des Fadens die der x, y genommen wird, wenn auf jedes seiner Elemente ds die äussere Kraft (Xds, Yds) wirkt, und wenn x, y die Coordinaten von M sind,

$$=\int dy \int Xds - \int dx \int Yds.$$

Mit diesem Momente ist daher jetzt das auf M bezogene Moment aller von A bis M für die Elasticität substituirten Kräfte zu einer Summe zu vereinigen und diese Summe $= 0$ zu setzen. Das Moment der letztern Kräfte reducirt sich aber auf das Moment der Kraft allein, welche auf das letzte Element LM wirkt und mit einer ihr gleichen und direct entgegengesetzten Kraft an dem nicht mehr zum Bogen AM gehörigen Elemente MN die Stelle der Elasticität des Winkels LMN vertritt. Denn alle übrigen von A bis M für die Elasticität zu substituirenden Kräfte sind paarweise einander gleich und direct entgegengesetzt, und es ist folglich ihr Moment in Bezug auf M, oder auf irgend einen andern Punkt der Ebene, $= 0$. Setzen wir daher noch von den zwei die Elasticität des Winkels LMN darstellenden Kräften das auf M bezogene Moment der auf den Schenkel MN wirkenden, $= u$, also das Moment der auf LM wirkenden, $= -u$, so ist

$$(A) \quad \int dy \int X ds - \int dx \int Y ds = u$$

die verlangte Gleichung des Gleichgewichts.

§. 318.

Zusätze. *a.* Werden für die zwei elastischen Kräfte am Winkel LMN die Punkte L und N zu Angriffspunkten genommen, so sind resp. NL und LN die Richtungen dieser Kräfte. Das Moment u hat folglich einerlei Zeichen mit der Dreiecksfläche MLN, also auch mit dem unendlich kleinen Winkel $MN^{\wedge}LM$, um welchen das Element MN gedreht werden muss, bis es in die Richtung des Elements LM fällt, also das entgegengesetzte Zeichen des Winkels $LM^{\wedge}MN$ oder $d\psi$, wenn ψ den Winkel von LM mit der Axe der x, und folglich $\psi + d\psi$ den Winkel von MN mit derselben Axe

bezeichnet. Das Moment u ist daher positiv oder negativ, jenachdem dieser Winkel ψ ab- oder zunimmt.

b. Unter derselben Annahme, dass L und N die Angriffspunkte der zwei elastischen Kräfte des Winkels LMN sind, ist die gemeinschaftliche Intensität dieser Kräfte $= u : LM \sin NLM$ (§. 316.), also unendlich gross von der zweiten Ordnung, weil u nach der letzten Gleichung des vorigen §. eine endliche Grösse ist.

Will man die Elasticität des Winkels durch endliche Kräfte darstellen, so nehme man zum Angriffe der auf LM wirkenden Kraft einen Punkt l, der in der geradlinigen Verlängerung von LM in endlicher Entfernung von M liegt, lege durch l unter einem endlichen Winkel mit LM eine Gerade, welche die Verlängerung von MN in n treffe, und lasse n den Angriffspunkt der Kraft an MN seyn. Die beiden Kräfte haben alsdann die Richtungen ln und nl, und ihre gemeinschaftliche Grösse ist $= u : Ml \sin Mln$, also endlich.

c. Wird von dem im Gleichgewichte befindlichen elastischen Faden AMO ein Theil MO getrennt, und soll der übrig bleibende Theil AM im Gleichgewichte verharren, so ist es hier nicht, wie beim vollkommen biegsamen Faden, hinreichend, den Endpunkt M dieses Theils unbeweglich zu machen. Denn auf den Theil AM wirkt der Theil MO nicht allein durch die in M ausgeübte Pressung, sondern auch durch die eine der zwei elastischen Kräfte des Winkels LMN, welche irgendwo in LM, etwa in L, nur nicht in M selbst, ihren Angriffspunkt hat. Soll daher der Theil AM nach Wegnahme des Theils MO im Gleichgewichte noch bleiben, so müssen entweder zwei, die Stelle jener Pressung und dieser elastischen Kraft vertretende Kräfte hinzugefügt

werden, oder man muss die Angriffspunkte M und L dieser zwei Kräfte, und somit das Element LM selbst, unbeweglich machen.

d. Die zwei an dem Elemente LM hinzuzufügenden Kräfte lassen sich im Allgemeinen zu einer einzigen Kraft zusammensetzen, und es reicht dann zur Erhaltung des Gleichgewichts hin, diese eine Kraft, welche R heisse, an irgend einem Punkte ihrer Richtung, der aber mit dem Elemente LM fest verbunden seyn muss, anzubringen, oder einen solchen Punkt unbeweglich zu machen. Da das Gleichgewicht noch am Fadentheile AM fortdauern muss, wenn derselbe steif angenommen wird, so muss die Kraft R mit den äussern Kräften an AM eben so, wie an einem festen Körper, im Gleichgewichte seyn. Der Ausdruck von R ist daher $(-\int X ds, -\int Y ds)$, und das Moment von R in Bezug auf M, $= -u$, da das Moment der äussern Kräfte in Bezug auf denselben Punkt $= u$ war. Hiermit ist die Grösse und Richtung von R vollkommen bestimmt.

e. Man denke sich die Kraft R in demjenigen Punkte m ihrer Richtung angebracht, in welchem sie die Verlängerung des Elements LM, d. i. die in M an die Curve gelegte Tangente, schneidet, und zerlege sie hier in zwei Kräfte T und V, von denen T in die Richtung der Tangente fällt, und V mit dieser Richtung 90° macht. Sey zu dem Ende noch der Winkel von R mit der Axe der x, $= \varphi$, und der Winkel des Elements ds mit derselben Axe, $= \psi$, so hat man $R\cos\varphi = -\int X ds$, $R\sin\varphi = -\int Y ds$, $ds\cos\psi = dx$, $ds\sin\psi = dy$, und daher:

$$T = R\cos(\varphi-\psi) = -\frac{dx}{ds}\int X ds - \frac{dy}{ds}\int Y ds,$$

$$V = R\sin(\varphi-\psi) = -\frac{dx}{ds}\int Y ds + \frac{dy}{ds}\int X ds = \frac{du}{ds}.$$

Nun ist in Bezug auf den Punkt M das Moment von T, $=0$ und das Moment von V, $= Mm \,.\, V$, folglich auch das Moment der Resultante R von T und V, $= Mm \,.\, V$. Das Moment von R ist aber nach $d.$, $= -u$, folglich ist

$$Mm = -\frac{u}{V} = -\frac{ds\int(dy\int X ds - dx\int Y ds)}{dy\int X ds - dx\int Y ds} = -\frac{u ds}{du},$$

wodurch der Punkt m in der Richtung von R bestimmt ist. — Statt das Element LM unbeweglich anzunehmen, reicht es daher auch hin, den in der geradlinigen Verlängerung von LM liegenden Punkt m unbeweglich seyn zu lassen.

f. Ist der Faden nicht elastisch, so genügt zur Erhaltung des Gleichgewichts des in M unterbrochenen Theils AM eine auf M nach der Richtung der Tangente wirkende Kraft, welche im Obigen die Spannung des Fadens genannt wurde. Bei dem elastischen Faden aber ist zur Bewahrung des Gleichgewichts die Kraft T, deren Richtung in die Tangente fällt, und für deren Angriffspunkt M selbst genommen werden kann, noch nicht hinreichend, sondern es muss noch die auf der Tangente in m normale Kraft V hinzugefügt werden, oder, was auf dasselbe hinauskommt, es muss das Element LM durch irgend welche Mittel, — etwa durch zwei unbewegliche Punkte, an denen es verschiebbar ist, — nur in sich selbst beweglich gemacht werden. Wollen wir daher auf analoge Weise, wie beim vollkommen biegsamen Faden, auch bei dem elastischen von der Spannung sprechen, so haben wir sie als die Kraft zu definiren, die, wenn der Faden irgendwo unterbrochen und das letzte Element daselbst

bloss in der Richtung der Tangente beweglich gemacht wird, zur Erhaltung des Gleichgewichts nach derselben Richtung am letzten Punkte angebracht werden muss.

Die Kraft T ist daher die Spannung der elastischen Linie, und zwar eine wirkliche Spannung, wie bei vollkommen biegsamen Fäden, oder eine Pressung, nachdem sich T positiv oder negativ findet.

Uebrigens ergiebt sich derselbe Ausdruck, den wir jetzt für die Spannung am elastischen Faden gefunden haben, auch für die Spannung am vollkommen biegsamen Faden, wenn man die für letzteren geltenden Gleichungen

$\int X ds + T\xi = 0$ und $\int Y ds + T\eta = 0$ (§. 280.),

wo $\xi = dx : ds$, und $\eta = dy : ds$, resp. mit ξ und η multiplicirt und hierauf addirt.

§. 319.

In der am Ende des §. 317. erhaltenen Gleichung (Δ) für das Gleichgewicht des elastischen Fadens ist noch der von einem Punkte des Fadens zum andern veränderliche Werth des Moments u zu bestimmen übrig. In dieser Hinsicht erwäge man zuerst, dass unter der Voraussetzung eines gleichförmig elastischen Fadens, und wenn man alle Elemente des Fadens von gleicher Länge annimmt, die Veränderlichkeit des Moments u von einem Punkte M des Fadens zum andern bloss von der Veränderlichkeit des Winkels $d\psi$, um welchen das Element MN von der Richtung des vorhergehenden LM abgelenkt worden, abhängig seyn kann. Von dieser Abhängigkeit ist aber im Allgemeinen gewiss, dass mit der Zunahme des Winkels $d\psi$ auch das Moment u wachsen muss. Lässt man näm-

lich von den zwei Elementen LM und MN das eine LM unbeweglich werden und normal auf das andere MN in einem bestimmten Punkte N' eine Kraft p wirken, welche dieses Element in der geneigten Lage, die es gegen das erstere haben soll, zu erhalten im Stande ist, so muss die Kraft p, folglich auch ihr auf M bezogenes Moment $= MN'.p$, um so grösser seyn, je grösser die Neigung $d\psi$ von MN gegen LM ist.

Am einfachsten ist es nun, und stimmt auch sehr wohl mit der Erfahrung überein, die Kraft p bei unverändertem Angriffspunkte N', und somit ihr Moment, welches nach §. 316. mit dem Momente u der Elasticität des Winkels LMN einerlei ist, dem Winkel $d\psi$ proportional anzunehmen. Hiernach, und weil u zufolge der Gleichung ($\varDelta$) eine endliche Grösse ist, die mit $-d\psi$ einerlei Zeichen hat (§. 318. a.), und weil ds constant angenommen worden, haben wir

$$u = -\frac{\varepsilon d\psi}{ds}$$

zu setzen, wo ε eine positive von der Elasticität des Fadens abhängende constante Grösse bedeutet, und wobei die Unveränderlichkeit von ds nicht mehr in Betracht kommt, da es sich nunmehr bloss um das Verhältniss von $d\psi$ zu ds handelt.

Noch andere Ausdrücke für u sind:

$$u = -\frac{2\varepsilon\varDelta}{ds^3} = \frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon\,\frac{dyd^2x - dxd^2y}{ds^3}.$$

Hierin bezeichnet $\varDelta$ das Elementardreieck LMN $= \frac{1}{2}ds^2 d\psi$ und r den Krümmungshalbmesser in M (§. 273.), der positiv oder negativ zu rechnen ist, nachdem der Winkel ψ ab- oder zunimmt. Der vierte Ausdruck für u ergiebt sich unmittelbar aus dem ersten

durch Differentiation der Gleichung $\tang\psi = dy : dx$.

Wird der vierte Ausdruck für u in der Gleichung (A) substituirt, so kommt:

$$(B) \quad \int dy \int X ds - \int dx \int Y ds = \varepsilon \frac{dy d^2 x - dx d^2 y}{ds^3}$$

als die Differentialgleichung für das Gleichgewicht am elastisch biegsamen Faden in einer Ebene; sie drückt aus, *dass das auf irgend welchen Punkt des Fadens bezogene Moment aller äussern auf den Faden von seinem Anfange bis zu diesem Punkte wirkenden Kräfte der Krümmung des Fadens in demselben Punkte proportional ist.*

Mit Hülfe dieser Gleichung lässt sich, wenn X und Y gegebene Functionen von x und y sind, und daher auf jeden Punkt des Fadens eine Kraft wirkt, deren Grösse und Richtung von dem Orte des Punktes in der Ebene auf gegebene Weise abhängt, die Gleichung für die Fadencurve herleiten. Bei den deshalb nöthigen Integrationen kommen fünf willkührliche Constanten hinzu, nämlich drei von der rechten Seite der Gleichung, wie beim vollkommen biegsamen Faden (§.281. *d.*), und zwei von der linken Seite, weil diese noch Differentiale der zweiten Ordnung enthält. Von diesen fünf Constanten lassen sich, wie beim nicht elastischen Faden in §. 281., drei dadurch bestimmen, dass der Faden durch zwei gegebene Punkte gehen, und dass der dazwischen enthaltene Theil des Fadens von gegebener Länge seyn soll; die vierte und fünfte Constante können durch gegebene Richtungen der Elemente des Fadens in den beiden Punkten bestimmt werden.

Bei einem elastisch biegsamen Faden in einer Ebene, an welchem in der Ebene wirkende Kräfte sich das Gleichgewicht halten sollen, können daher zwei

Punkte, durch welche der Faden gehen soll, die Richtungen der Tangenten des Fadens in diesen Punkten und die Länge des Fadens von dem einem Punkte zum andern nach Belieben genommen werden. Sind aber diese Stücke bestimmt, so ist damit auch die Gestalt des Fadens beim Gleichgewichte vollkommen bestimmt.

§. 320.

Die im vorigen §. erhaltene Gleichung (B) wollen wir jetzt auf den einfachst möglichen Fall anwenden, wenn nicht auf die einzelnen Elemente des Fadens Kräfte wirken, sondern bloss der Anfangs- und Endpunkt des Fadens gegebene Oerter einnehmen und der Faden daselbst gegebene Linien zu berühren genöthigt ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt: wenn das erste und letzte Element des Fadens in gegebenen Lagen befestigt sind. Die unter dieser Bedingung von einem elastisch biegsamen, gleichförmig elastischen und ursprünglich geradlinigen Faden gebildete Curve wird vorzugsweise die elastische Linie genannt.

Statt das eine oder das andere der beiden Grenzelemente unbeweglich anzunehmen, kann man auf zwei Punkte des Elementes selbst zwei Kräfte wirken lassen, oder auch eine einzige Kraft, als die Resultante jener, an einem mit dem Elemente fest verbundenen Punkte anbringen (§. 318. *d.*). Zufolge des vor. §. ist alsdann auszudrücken, dass das Moment der zwei Kräfte am ersten Elemente, also auch das Moment ihrer Resultante, wenn es auf den Punkt (x, y) der Curve bezogen wird, dem Krümmungshalbmesser an diesem Punkte umgekehrt proportional ist.

Ist demnach (A, B) die Resultante der auf das erste Element wirkenden Kräfte und (a, b) ein Punkt

der Resultante, der mit dem Elemente in fester Verbindung steht, so hat man für die elastische Linie die Gleichung

$$B(a-x) - A(b-y) = \frac{\varepsilon}{r},$$

eine Gleichung, die auch unmittelbar aus der allgemeinen Gleichung (B) hätte hergeleitet werden können, wenn man $X=0$, $Y=0$, die hiernach constanten Grössen $\int X ds$, $\int Y ds$ resp. $=A$, B und die nach der letzten Integration links noch hinzuzufügende Constante $= Ba - Ab$ gesetzt hätte.

Die Kraft (A, B), welche auf einen mit dem ersten Elemente verbundenen Punkt wirkt, und die Resultante der das letzte Element afficirenden Kräfte müssen, weil sie die einzigen auf den Faden wirkenden äusseren Kräfte sind, einander gleich und direct entgegengesetzt seyn. Die Gerade, in welcher ihre Richtungen gemeinschaftlich enthalten sind, heisse die Axe der elastischen Linie. Lassen wir mit dieser Axe die Axe der x zusammenfallen, so werden $B=0$, $b=0$, und die Gleichung gewinnt die höchst einfache Gestalt:

$$Ay = \frac{\varepsilon}{r}.$$

Die elastische Linie besitzt hiernach die charakteristische Eigenschaft, dass ihre Krümmung in jedem ihrer Punkte dem Abstande des Punktes von der Axe proportional ist. An gleichweit von der Axe abstehenden Punkten ist daher auch die Krümmung gleich gross, und an ungleich entfernten verschieden: an dem entfernteren grösser und an dem näheren geringer. An den Stellen, wo die Curve von der einen auf die andere Seite der Axe sich wendet, geht die Krümmung

durch Null aus dem Positiven in's Negative, oder umgekehrt, über, d. h. die Curve hat an jeder Stelle, wo sie die Axe schneidet, einen Wendepunkt. Auch kann sie nirgendwo anders einen solchen haben, da nur für $y = 0$ der Krümmungshalbmesser r unendlich gross werden kann.

Endlich erhellet, dass, wenn der erste oder letzte Punkt des Fadens in die Axe fällt, die mit dem Elemente daselbst in Verbindung zu setzende Kraft A an ihm selbst, nicht erst an einem andern mit ihm verbundenen Punkte, angebracht werden kann. So ist z. B. bei einem durch eine Sehne gespannten elastischen Bogen die Sehne selbst die Axe, und die Spannung der Sehne = der mit A bezeichneten Kraft. Die Krümmung des Bogens ist daher an seinen beiden Enden null und in dem von der Sehne entferntesten Punkte am stärksten. Eben so ist bei einem elastischen Stabe, dessen erstes Element in irgend einer Lage unbeweglich gemacht wird, und an dessen letztes Element ein Faden mit einem angehängten Gewichte befestigt wird, die verticale Linie des Fadens die Axe der von dem Stabe gebildeten elastischen Curve.

§. 321.

Um aus der Gleichung der Curve zwischen y und r eine Gleichung zwischen x und y herzuleiten, führe man zunächst statt r den Winkel ψ ein, den das Element ds mit der Axe macht, und es wird (§. 319.):

$$Ay = \frac{\varepsilon}{r} = -\frac{\varepsilon d\psi}{ds}.$$

Die Differentiation dieser Gleichung giebt:

$$Ady = A \sin\psi ds = -\varepsilon d\left(\frac{d\psi}{ds}\right).$$

Multiplicirt man hierein $\frac{d\psi}{ds}$ und integrirt dann, so kommt:

$$A\cos\psi + C = \tfrac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = \frac{A^2y^2}{2\varepsilon}.$$

Die Constante C kann man unter andern durch die grösste Abweichung der Curve von der Axe, d. i. durch den grössten Werth von y, welcher h heisse, bestimmen. Er findet statt für $\psi = 0$, oder für $\psi = 180°$, nachdem man die Axe der x, d. i. die Axe der elastischen Linie, nach der einen oder nach der andern Seite zu positiv seyn lässt. Man wähle diejenige Richtung dieser Axe zur positiven, bei welcher für den grössten Werth von y, $\psi = 0$ wird, und man hat:

$$A + C = \frac{A^2}{2\varepsilon}h^2,$$

$$\text{folglich}\quad 2\varepsilon(1-\cos\psi) = A(h^2-y^2),$$

woraus zugleich ersichtlich, dass die Richtung der auf den Anfang der Curve in der Axe wirkenden Kraft A mit der für die Axe festgesetzten positiven Richtung übereinstimmt; denn ε sowohl, als h^2-y^2, ist positiv.

Setzt man nun noch $\frac{A}{2\varepsilon}(h^2-y^2) = z^2$,

$$\text{so wird}\quad \frac{dx}{ds} = \cos\psi = 1-z^2, \text{ und}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\cos\psi}{\sin\psi} = \frac{\cos\psi}{\sqrt{1-\cos\psi}\sqrt{1+\cos\psi}},$$

$$\text{d. i.}\quad dx = \frac{1-z^2}{z\sqrt{2-z^2}}dy.$$

Weil z eine bekannte Function von y ist, so sind in dieser Gleichung die Veränderlichen getrennt, und die dadurch mögliche Integration giebt die verlangte Gleichung zwischen x und y. Indessen hängt diese In-

tegration von der Rectification der Kegelschnitte ab und ist daher durch einen geschlossenen Ausdruck nicht ausführbar.

Was noch die Spannung der elastischen Linie anlangt, so ist hier wegen $\int X ds = A$ und $\int Y ds = B = 0$:

$$T = -A\frac{dx}{ds} = -A\cos\psi \quad (\S.318.\ e.).$$

Die Spannung in irgend einem Punkte der elastischen Linie ist demnach dem Cosinus des Winkels proportional, den die Berührende daselbst mit der Axe macht, und ist eine Pressung oder eine wirkliche Spannung, je nachdem dx positiv oder negativ ist, d. h. *je nachdem, wenn man in der Curve vom Anfange zum Ende fortgeht, die Richtung dieses Wegs, wenn sie nach der Richtung der am Anfange wirkenden Kraft A geschätzt wird, mit dieser Richtung*, als der positiven Richtung der Axe der x, *übereinstimmt, oder ihr entgegensetzt ist.* In dem von der Axe entferntesten Punkte, wo $dx = ds$, ist daher die Spannung stets eine Pressung und hat unter allen Pressungen und eigentlichen Spannungen den absolut grössten Werth $= A$.

Bei der elastischen Linie $PRSTQ$ (Fig. 87.) z. B., auf deren Anfangspunkt P und Endpunkt Q gleiche und entgegengesetzte Kräfte nach den Richtungen MP und NQ wirken, wo daher PQ die Axe und MP die positive Richtung derselben ist, und wo die in R und T an die Curve gelegten Tangenten die Axe rechtwinklich treffen, nimmt x von P bis R ab, von R bis T zu und von T bis Q wieder ab. Mithin findet von P bis R und von T bis Q wirkliche Spannung, von R bis T aber Pressung statt. In R und T, wo $dx = 0$, geht die eine in die andere durch Null über.

Bei der weniger gekrümmten Linie PSQ (Fig. 88.) nimmt x von P bis Q fortwährend zu, und es herrscht folglich hier überall Pressung. In beiderlei Curven aber bezeichnet S den von der Axe entlegensten Punkt, wo die Pressung am stärksten ist.

§. 322.

Entwickelt man in der im vor. §. erhaltenen Differentialgleichung den Coefficient von dy in eine nach wachsenden Potenzen von z fortlaufende Reihe, so wird diese, wenn die Curve nur wenig von ihrer Axe abweicht, wenn also h, und folglich auch z nur klein ist, schnell convergiren. Für eine sehr geringe Abweichung kann es hinreichen, nur das erste Glied dieser Reihe beizubehalten; man hat alsdann:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2 \,.\, z}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{A}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{h^2 - y^2}},$$

und wenn man integrirt:

$$y = h \sin\left(\sqrt{\frac{A}{\varepsilon}} \,.\, x\right),$$

wo die neue Constante unter der Voraussetzung, dass y mit x zugleich verschwinden soll, weggelassen ist. Die hierdurch ausgedrückte Linie läuft wellenförmig über und unter der Axe hin (Fig. 89.) und schneidet sie in Punkten F, H, K, M, deren jeder von dem nächstfolgenden um ein Intervall $= \pi\sqrt{(\varepsilon : A)}$ entfernt ist, wo $\pi =$ der halben Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser $= 1$. Mitten zwischen je zwei solchen Punkten ist die Abweichung der Curve von der Axe am grössten, nämlich $= h$.

Setzt man den Bogen FGH der Curve, der zwischen zwei nächstfolgende Durchschnitte derselben

mit der Axe fällt, $=l$, so ist l grösser, als der davon überspannte Theil $\pi\sqrt{(\varepsilon : A)}$ der Axe, mithin

$$A > \frac{\pi\varepsilon}{l^2}.$$

Da nun, wenn der Bogen FGH für sich im Gleichgewichte seyn soll, die zwei einander gleichen und direct entgegengesetzten Kräfte A unmittelbar an dem Anfangs- und Endpunkte des Bogens angebracht werden müssen, so ziehen wir hieraus den merkwürdigen Schluss:

Soll eine elastische Gerade durch zwei an ihren Enden angebrachte einander gleiche und entgegenwirkende Kräfte zu einem Bogen gekrümmt werden, so muss die gemeinschaftliche Intensität der Kräfte ein gewisses Minimum überschreiten. Dieses Minimum von Intensität, welches man auch die elastische Kraft der Geraden nennt, ist im directen Verhältnisse des Coefficienten der Elasticität ε und im umgekehrten quadratischen Verhältnisse der Länge l der Geraden. — So ist z. B. die geringste Kraft, welche zur Krümmung einer zwei- oder dreimal so langen Geraden erfordert wird, nur der vierte oder neunte Theil der geringsten Kraft, welche zur Krümmung der Geraden von einfacher Länge nöthig ist.

Verlängert man die elastische Linie FGH über H hinaus, bis sie der Axe weiterhin in K, M,... begegnet, so sind nicht nur die Geraden FH, HK, KM, etc. unter sich, sondern auch die Bögen FGH, HIK, etc. unter sich gleich, und man kann die der A gleiche und entgegengesetzte Kraft, statt in H, auch in K, oder in M, etc. anbringen. Es wird folglich auch die geringste Kraft, um eine Gerade $=2l$, oder $3l$, etc. oder $il = k$ zu einem doppelten Bogen, wie FK, oder zu einem dreifachen, wie FM, etc. oder

zu einem $i$fachen zu krümmen, eben so gross seyn seyn müssen, als die geringste Kraft, welche nöthig ist, um eine Gerade $= l = k : i$ in einen einfachen Bogen FGH zu verwandeln; die Kraft wird folglich proportional mit $i^2 : k^2$ seyn müssen, d. h. direct proportional dem Quadrate der Zahl der Bögen, in welche die Gerade sich theilen soll, und umgekehrt dem Quadrate der Länge der Geraden.

§. 323.

Unter den mannigfachen Formen, welche die elastische Linie haben kann *), ist auch die Kreisform enthalten. Denn stellt man sich vor, dass eine geschlossene Kreislinie gleichförmig elastisch wird, und sich in eine Gerade auszudehnen strebt, so ist bei der überall gleichen Krümmung des Kreises kein Grund vorhanden, warum irgend ein Theil desselben seine Krümmung, falls er sie ändert, mehr oder weniger, als ein anderer Theil ändern sollte. Durch eine gleichförmige Aenderung der Krümmung würde aber der Kreis selbst entweder grösser oder kleiner, welches nicht seyn kann, da die Linie von unveränderlicher Länge seyn soll. Mithin bleibt der Kreis unverändert.

Als Axe der elastischen Kreislinie ist eine in der Kreisebene unendlich entfernte Gerade anzunehmen. Denn nur bei dieser Annahme kann die Entfernung jedes Punktes der Kreislinie von der Axe als proportional der von einem Punkte zum andern constanten Krümmung des Kreises angesehen werden.

Soll daher ein Theil des elastischen Kreises, getrennt von dem übrigen, seine Kreisbogenform unver-

---

*) Euler zählt neun Species dieser Formen. Siehe dessen Methodus inveniendi lineas curv. etc. Additam I. de curvis elasticis.

ändert behalten, so hat man entweder das erste und letzte Element des Bogens unbeweglich zu machen, oder, wenn man das eine dieser Elemente, oder auch beide, beweglich bleiben lässt, an einem unendlich entfernten Punkte, der mit dem beweglichen Elemente in fester Verbindung steht, eine Kraft anzubringen, deren Moment in Bezug auf den beweglich gelassenen Endpunkt dem endlichen Momente der Elasticität daselbst gleich ist, also eine unendlich kleine Kraft, indem sonst, wäre die Kraft endlich, ihr Moment unendlich gross seyn würde. Wir wissen aber aus §. 26. b. dass eine unendlich kleine auf einen unendlich entfernten Punkt wirkende Kraft die Wirkung eines Kräftepaares hat. Mithin hat man an zwei Punkten, die mit dem beweglichen Endelemente des Bogens in fester Verbindung stehen, zwei einander gleiche, parallele und entgegengesetzte Kräfte anzubringen, deren Moment, welches rücksichtlich aller Punkte der Ebene gleiche Grösse hat (§. 31.), dem Momente der Elasticität gleich ist.

Kann umgekehrt das freie Ende der elastischen Linie nur durch ein Kräftepaar im Gleichgewichte erhalten werden, so ist die Linie ein Kreisbogen. Denn da in jedem Punkte M der elastischen Linie das auf ihn bezogene Moment der mit dem freien Endelemente in Verbindung gebrachten Kräfte der Krümmung in M proportional ist, und da ein Paar, rücksichtlich aller Punkte seiner Ebene, gleich grosse Momente hat, so muss unter der gemachten Voraussetzung die Krümmung von einem Punkte der Curve zum andern constant, und folglich die Curve ein Kreis seyn.

Da übrigens ein Kräftepaar in seiner Ebene willkührlich verlegt werden kann (§. 17.), so erhellet

noch, indem man die Richtungen der Kräfte jenes Paares normal auf der Tangente am Ende des Bogens seyn lässt, dass bei einem elastischen Kreise oder Kreisbogen die Spannung null ist.

§. 324.

Wir gehen jetzt zum Gleichgewichte eines elastisch biegsamen Fadens im Raume über. — Für das Gleichgewicht eines vollkommen biegsamen Fadens, wenn auf jedes Element ds desselben eine Kraft (Xds, Yds, Zds) wirkt, hat man nach §. 281. *b.* die drei Gleichungen:

$$\int dz \int Yds - \int dy \int Zds = 0,$$
$$\int dx \int Zds - \int dz \int Xds = 0,$$
$$\int dy \int Xds - \int dx \int Yds = 0,$$

von denen jede eine Folge der beiden übrigen ist, und von denen die letzte z. B. ausdrückt, dass, wenn man die Fadencurve und die auf sie wirkenden Kräfte auf die Ebene der x, y projicirt, in Bezug auf die Projection (x, y) des Punktes (x, y, z) das Moment aller projicirten Kräfte, welche vom Anfangspunkte der Curve bis zum Punkte (x, y, z) auf sie wirken, null ist.

Ist der Faden nicht vollkommen biegsam, sondern stellt sich der Biegung die Elasticität als Hinderniss entgegen, so können wir nach der Vorstellungsweise in §. 317. an je zwei nächstfolgenden Elementen der Curve, wie LM und MN (Fig. 86.) zwei einander gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte hinzugefügt denken, welche die Biegung LMN aufzuheben streben, und von welchen die auf MN wirkende in Bezug auf M ein Moment

$$u = -2\varepsilon \, . \, LMN : LM^3 \quad (\S.\ 319.)$$

hat, wo ε wiederum den constanten Coefficienten der

Elasticität ausdrückt; das Moment der auf LM wirkenden Kraft ist in Bezug auf denselben Punkt M, $= -u$. Je zwei auf diese Art zusammengehörige Kräfte sind nun auch in jeder Projection einander gleich und direct entgegengesetzt. Ist daher A der Anfangspunkt des Fadens, M der Punkt (x, y, z), und sind A', L', M', N' die Projectionen von A, L, M, N auf eine der drei Coordinatenebenen, so reducirt sich eben so, wie in §. 317., das auf M' bezogene Moment aller in der Projection von A' bis M' wirkenden elastischen Kräfte auf das Moment der auf das Element $L'M'$ vom Elemente $M'N'$ her wirkenden Kraft allein, und dieses Moment, es sey $= -u'$, ist, wenn wir für die Coordinatenebene successive die der yz, der zx und der xy wählen, der 1sten, 2ten und 3ten obiger Gleichungen linker Hand noch hinzuzusetzen.

Ist aber p irgend eine Kraft in der Ebene LMN, und p' die Projection dieser Kraft auf die Ebene $L'M'N'$, so verhält sich das Moment von p in Bezug auf M zum Momente von p' in Bezug auf M', wie das durch p und M bestimmte Dreieck zu dem durch p' und M' bestimmten, also auch wie LMN zu $L'M'N'$, da jedes Dreieck der einen Ebene zu seiner Projection auf die andere in einem und demselben Verhältnisse steht. Es verhält sich daher auch $u : u' = LMN : L'M'N'$, und es ist mithin $$u' = -2\varepsilon \, . \, L'M'N' : LM^3.$$

Setzen wir folglich die Projectionen der Dreiecksfläche LMN auf die Ebenen der yz, zx und xy resp. $= \Delta_1$, Δ_2 und Δ_3, so sind

$$\frac{2\varepsilon\Delta_1}{ds^3}, \quad \frac{2\varepsilon\Delta_2}{ds^3}, \quad \frac{2\varepsilon\Delta_3}{ds^3}$$

die in den drei Gleichungen links noch hinzuzufügenden Grössen. Da endlich nach §. 319.

$$2\Delta_3 = dxd^2y - dyd^2x, \text{ und eben so}$$
$$2\Delta_1 = dyd^2z - dzd^2y, \text{ u. s. w.}$$

ist, so werden die Gleichungen für das Gleichgewicht an einem elastisch biegsamen Faden im Raume, wenn auf jedes Element ds desselben eine Kraft (Xds, Yds, Zds) wirkt:

$$\int dz \int Yds - \int dy \int Zds = \varepsilon \frac{dzd^2y - dyd^2z}{ds^3},$$

$$\int dx \int Zds - \int dz \int Xds = \varepsilon \frac{dxd^2z - dzd^2x}{ds^3},$$

$$\int dy \int Xds - \int dx \int Yds = \varepsilon \frac{dyd^2x - dxd^2y}{ds^3},$$

drei Gleichungen, deren jede, wie bei denen für die unelastische Linie, aus den beiden übrigen folgen muss. Diess bestätigt sich auch sogleich, wenn man die Gleichungen differentiirt, sie hierauf resp. mit dx, dy, dz multiplicirt und endlich addirt: denn man gelangt damit zu der identischen Gleichung: $0 = 0$.

§. 325.

Zusätze. *a.* Da jede der drei eben aufgestellten Gleichungen eine Folge der beiden übrigen ist, so reichen schon zwei derselben, die man beliebig wählen kann, hin, um, wenn X, Y, Z als Functionen von x, y, z gegeben sind, die Gestalt des Fadens beim Gleichgewichte zu bestimmen. Bei der hierzu nöthigen Rechnung führen die in den zwei gewählten Gleichungen linker Hand befindlichen Integralausdrücke zu 5 Constanten, wie schon in §. 281. *d.* bei der nicht elastischen Linie bemerkt worden. Hierzu kommen, wegen der rechter Hand in den 2 Gleichungen stehenden Differentialen der 2ten Ordnung noch 4 Constan-

ten, so dass die 2 Gleichungen, vollständig integrirt, 9 Constanten in sich fassen.

Um diese Constanten zu bestimmen, kann man, wie a. a. O., die Werthe von fünf derselben dadurch festsetzen, dass man die Coordinaten des Anfangs- und Endpunktes des Fadens und seine Länge gegeben seyn lässt. Und da die Bedingung, dass eine durch ihre zwei Gleichungen ausgedrückte Curve im Raume in einem ihrer Punkte eine durch ihn gehende gegebene Gerade zur Tangente hat, von der Erfüllung zweier Gleichungen zwischen den Coordinaten des Punktes und den die Richtung der Geraden bestimmenden Winkeln abhängt, so kann man zur Bestimmung der vier übrigen Constanten die Richtungen der Tangenten im Anfangs- und Endpunkte des Fadens gegeben annehmen.

Derselbe Satz, den wir in §. 319. für die elastische Curve in einer Ebene aufgestellt haben, gilt daher auch für diese Curve im Raume. Wenn nämlich zwei Punkte eines elastisch biegsamen Fadens gegebene Oerter einnehmen und seine Elemente daselbst gegebene Richtungen haben, und wenn überdiess auf alle Elemente des Fadens Kräfte wirken, deren Intensitäten und Richtungen gegebene Functionen ihrer Angriffspunkte sind, so ist damit die Form des Fadens vollkommen bestimmt.

b. Wird der elastische Faden im Raume in irgend einem Punkte M unterbrochen, so kann das Gleichgewicht, eben so wie im §. 318. *c*. entweder dadurch, dass man das letzte noch übrige Element LM unbeweglich macht, oder dadurch, dass man an ihm gewisse Kräfte anbringt, gesichert werden. Das Moment dieser Kräfte in Bezug auf LM als Axe ist daher

null, mithin muss auch das auf LM bezogene Moment aller auf den Faden bis M wirkenden äusseren Kräfte, da sie den an LM anzubringenden Kräften das Gleichgewicht halten, null seyn. — Dasselbe erhellet auch mittelst der 3 Hauptgleichungen. Denn die in ihnen linker Hand stehenden Momente der Projectionen der äusseren Kräfte in Bezug auf die Projectionen von M kann man zugleich als die Momente dieser Kräfte selbst in Bezug auf drei durch M mit den Axen der x, y, z gelegte Parallelen betrachten (§. 281. *b.*). Mit diesen Parallelen macht das letzte Element LM Winkel, deren Cosinus $= \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sind. Multiplicirt man mit diesen Cosinussen die drei Momente und addirt sie hierauf, so erhält man das Moment der äussern Kräfte in Bezug auf LM (§. 90.). Letzteres Moment reducirt sich aber auf null, wenn man für die drei erstern ihre in den Gleichungen rechter Hand stehenden Werthe setzt.

c. Die an dem letzten Elemente LM oder ds anzubringenden Kräfte lassen sich bei dem elastisch biegsamen Faden im Raume im Allgemeinen nicht auf eine einzige Kraft zurückführen. Zerlegt man jede derselben in zwei Kräfte, von denen die eine auf ds normal ist und die andere mit ds zusammenfällt, so ist zufolge des in §. 318. *f.* von der Spannung gegebenen Begriffs die Summe der mit ds zusammenfallenden die Spannung des Elementes ds. Da nun bei dieser Zusammensetzung der Kräfte zur Spannung ihre Angriffspunkte nicht in Betracht kommen und da die an ds anzubringenden Kräfte mit den auf den Faden von seinem Anfange bis zum Elemente ds wirkenden äusseren Kräften im Gleichgewichte sind, so wird man die Span-

nung auch erhalten, wenn man letztere Kräfte parallel mit einer, ihrer ursprünglichen Richtung entgegengesetzten, Richtung an einen und denselben Punkt trägt und hierauf ihre Resultante, welche ($-\int X ds$, $-\int Y ds$, $-\int Z ds$) ist, auf die Richtung des Elementes ds projicirt, d. i. mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den die Richtung der Resultante mit dem Elemente ds bildet. Auf diese Weise findet sich die Spannung

$$T = -\frac{dx}{ds}\int X ds - \frac{dy}{ds}\int Y ds - \frac{dz}{ds}\int Z ds,$$

und ist wie in §. 318. *f.* eine wirkliche Spannung oder Pressung, nachdem sich für T ein positiver oder negativer Werth ergiebt.

Man nimmt übrigens leicht wahr, dass dieselben Betrachtungen, welche uns jetzt zu dem Ausdrucke für T bei dem elastischen Faden leiteten, zu dem nämlichen Ausdrucke für T auch bei dem nicht elastischen Faden führen, und dass auch in der That dieser Ausdruck durch Verbindung der Gleichungen (1) und (2) in §. 280. hervorgeht.

§. 326.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen über den elastisch biegsamen Faden im Raume wollen wir noch den speciellen Fall näher untersuchen, wenn auf den äussern Faden keine Kräfte wirken, sondern bloss das erste und letzte Element desselben an gegebenen Oertern und in gegebenen Richtungen befestigt sind.

Wird die Unbeweglichkeit des einen der beiden äussersten Elemente aufgehoben, und soll dabei die Gestalt des Fadens unverändert bleiben, so müssen an

Punkten dieses Elements, oder auch an Punkten, die mit ihm fest verbunden sind, Kräfte von gewisser Richtung und Intensität angebracht werden. Eben so kann auch die Unbeweglichkeit des andern Grenzelements durch Kräfte ersetzt werden, und letztere Kräfte müssen den erstern eben so, wie an einem festen Körper, das Gleichgewicht halten.

Die auf solche Weise an dem beweglich gemachten ersten Elemente anzubringenden Kräfte wollen wir, wie dies im Allgemeinen immer möglich ist, auf eine einfache Kraft A und ein Paar reduciren, und zwar so, dass die einfache Kraft auf der Ebene des Paares normal steht. Werde nun die Richtung von A zur Axe der x, und folglich die Ebene des Paares, oder eine mit ihr parallele, zur Ebene der y, z genommen. Alsdann ist, wenn das Moment des Paares in Bezug auf einen Punkt seiner Ebene $= m$ gesetzt wird, sein Moment auch rücksichtlich der Axe der x, so wie jeder damit parallelen Axe, $= m$; rücksichtlich der Axe der y aber, oder der Axe der z, oder irgend einer damit parallelen Axe ist es $= 0$. Ferner sind von der Kraft A in Bezug auf drei durch den Punkt (x, y, z) der Curve mit den Axen der x, y, z parallel gelegte Axen die Momente resp. $= 0$, $- Az$, $+ Ay$ *). In Bezug auf diese drei Axen sind daher die Momente aller auf das erste Element des Fadens wirkenden Kräfte resp.

$$= m, \; - Az, \; + Ay;$$

*) Ueberhaupt nämlich sind in Beziehung auf dieselben drei Axen die Momente einer Kraft (A, B, C), deren Angriffspunkt (a, b, c) ist:

$$C(b-y) - B(c-z), \; A(c-z) - C(a-x),$$
$$B(a-x) - A(b-y) \text{ (§§. 65. und 66.).}$$

und da bis zum Punkte (x, y, z) ausser ihnen keine andern Kräfte auf den Faden wirken sollen, so haben wir diese drei Momente in den drei Hauptgleichungen für die Integralausdrücke linker Hand zu substituiren, und wir erhalten damit, wenn wir noch, grösserer Einfachheit willen, dx constant setzen, die drei Gleichungen:

$$(\varDelta)\begin{cases} m = \varepsilon\dfrac{dxd^2y - dyd^2x}{ds^3}, \\ -\varDelta z = \varepsilon\dfrac{dxd^2z}{ds^3},\ \varDelta y = -\varepsilon\dfrac{dxd^2y}{ds^3}, \end{cases}$$

oder auch $m = -\dfrac{2\varepsilon\varDelta_1}{ds^3}$, $-\varDelta z = -\dfrac{2\varepsilon\varDelta_2}{ds^3}$, $\varDelta y = -\dfrac{2\varepsilon\varDelta_3}{ds^3}$,

wo $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$ die Projectionen des Elementardreiecks LMN auf die drei coordinirten Ebenen sind (§. 324.). Es ist aber, wenn wir dieses Dreieck $LMN = \varDelta$ setzen, und wenn r den Krümmungshalbmesser der Curve in M bedeutet: $r = -ds^3 : 2\varDelta$ (§. 319.), und wir können daher letztere drei Gleichungen auch also schreiben:

$$(B)\quad m = \frac{\varepsilon}{r}\frac{\varDelta_1}{\varDelta},\ -\varDelta z = \frac{\varepsilon}{r}\frac{\varDelta_2}{\varDelta},\ \varDelta y = \frac{\varepsilon}{r}\frac{\varDelta_3}{\varDelta}.$$

Aus ihnen lassen sich nachstehende merkwürdige Eigenschaften der elastischen Linie im Raume (vergl. §. 320.) herleiten. — Die jetzige Axe der x oder diejenige Gerade, welche rücksichtlich der auf das erste Element der Curve wirkenden Kräfte die Hauptlinie des Systems ist (§. 82.), heisse vorzugsweise die Axe der Curve. Nun ist $\varDelta_1$ die Projection des Dreiecks $\varDelta$ auf die Ebene der y, z, folglich $\varDelta_1 : \varDelta$ = dem Cosinus des Winkels, den die Ebene des Dreiecks $\varDelta$ mit der Ebene der y, z macht, $= \sin\chi$, wenn

χ der Winkel der Ebene von Δ, d. i. der Krümmungsebene, mit der Axe der Curve bedeutet. Statt der ersten der Gleichungen (B) können wir daher auch schreiben:

$$(a)\quad m = \frac{\varepsilon}{r}\sin\chi.$$

Ferner ist zu Folge der Eigenschaft rechtwinkliger Projectionen: $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = \Delta^2$, und daher, wenn man die Quadrate der 3 Gleichungen (B) addirt:

$$(b)\quad m^2 + A^2(y^2 + z^2) = \frac{\varepsilon^2}{r^2},$$

woraus in Verbindung mit (a)

$$(c)\quad A\sqrt{(y^2 + z^2)} = \frac{\varepsilon}{r}\cos\chi \text{ und}$$

$$(d)\quad A\sqrt{(y^2 + z^2)} = m\cot g\chi \text{ folgt.}$$

Die erste (a) dieser Gleichungen lehrt nun, *dass die Krümmung der elastischen Linie umgekehrt dem Sinus des Winkels proportional ist, den die Krümmungsebene mit der Axe der Linie bildet.*

Die zweite Gleichung (b) ist der Gleichung $Ay = \varepsilon : r$ für die elastische Linie in einer Ebene (§. 320.) analog und drückt aus, *dass die Krümmung in jedem Punkte proportional der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen eine Kathete von constanter Länge* ($= m : A$), *und dessen andere Kathete dem Abstande des Punktes von der Axe gleich ist.*

Auch hier also wird, wie in §. 320., die Krümmung desto schwächer, je näher die Curve der Axe kommt; und weil mit wachsendem r nach (a) auch $\sin\chi$ wächst, so nähert sich dabei die Krümmungsebene immer mehr der auf der Axe normalen Lage. Begeg-

net die Curve irgendwo der Axe, so ist daselbst die Krümmung am schwächsten (jedoch nicht null, wie in §. 320.), und die Krümmungsebene, folglich auch die Curve selbst, auf der Axe normal. — Parallel mit der Axe kann die Curve erst in unendlicher Entfernung von der Axe werden. Denn wird es die Curve, so wird auch die Krümmungsebene mit der Axe parallel, folglich $\chi = 0$, folglich nach (a) $r = 0$ und nach (b) $y^2 + z^2 = \infty$.

Dasselbe fliesst auch unmittelbar aus der Gleichung (d), welche zu erkennen giebt, *dass der Abstand eines Punktes der Curve von der Axe der Cotangente des Winkels der Krümmungsebene mit der Axe proportional ist.*

Man multiplicire noch die 3 Gleichungen (A) resp. mit dx, dy, dz und addire sie, so erhält man:

$$(e) \quad m dx + A(y dz - z dy) = 0.$$

Sind nun F, G zwei Punkte der Curve, F', G' ihre Projectionen auf die Axe der x und F_1, G_1 ihre Projectionen auf die Ebene der y, z, und ist O der Durchschnitt jener Axe mit dieser Ebene, so kommt, wenn man die Gleichung (e) von F bis G integrirt:

$$m \,.\, F'G' + A \,.\, OF_1G_1 = 0,$$

wo OF_1G_1 die Fläche in der Ebene der y, z verstellt, welche von den Geraden OF_1, OG_1 und der Projection F_1G_1 des Bogens FG der Curve begrenzt wird. Indem wir uns daher die Curve durch den einen Endpunkt F einer sich an der Axe rechtwinklig fortbewegenden und um sie sich zugleich drehenden Geraden $F'F$ erzeugt denken und diese Gerade den Radius Vector nennen, können wir die erhaltene Gleichung also aussprechen:

Jeder Theil der Axe, um welchen sich der Ra-

dius Vector an ihr fortbewegt, steht zu der Fläche, welche die Projection des Radius auf eine die Axe rechtwinklig treffende Ebene beschreibt, in einem constanten Verhältnisse, — in dem nämlichen, welches die Cotangente des Winkels, den die Krümmungsebene in irgend einem Punkte mit der Axe bildet, zu dem Abstande des Punktes von der Axe hat.

In dem besonderen Falle, wenn $m = 0$, und wenn daher die auf das erste Element wirkenden Kräfte auf eine einzige Kraft A zurückgeführt werden können, wird zu Folge der Gleichung (e): $ydz - zdy = 0$, und daher $y = az$, d. h. die Curve ist in einer die Axe und somit die Richtung der Kraft A enthaltenden Ebene begriffen. Ihre Krümmung im Punkte (x, y, z) ist alsdann, wie die Gleichung (b) lehrt, und wie wir bereits aus §. 320. wissen, proportional mit $\sqrt{(y^2 + z^2)}$ d. h. mit dem Abstande des Punktes von der Axe.

Wenn dagegen die am ersten Elemente anzubringenden Kräfte auf ein Paar reducirbar sind, und somit $A = 0$ ist, so gehen die Gleichungen (b) und (e) über in $m = \varepsilon : r$ und $mdx = 0$ oder $x =$ Const., d. h. die Curve liegt in einer mit der Ebene des Paares parallelen oder zusammenfallenden Ebene, was nach §. 50. auf eines und dasselbe hinauskommt, und die Krümmung ist unveränderlich, die Curve selbst also ein Kreis, — übereinstimmend mit dem bereits in §. 323. Gefundenen.

§. 327.

Statt der drei Gleichungen (A) können auch die zwei (b) und (e) als die Gleichungen der elastischen Linie im Raume angesehen werden. Kennt man daher

eine Linie, welche diesen zwei Gleichungen Genüge leistet, so wird sie eine elastische seyn und die Axe der x zu ihrer Axe haben.

So wird unter anderen hierher die cylindrische Spirale oder die Schraubenlinie gehören, und die Axe des Cylinders wird die Axe der Curve seyn. Denn erstens ist der Abstand jedes Punktes dieser Spirale von der Axe von gleicher Grösse, desgleichen auch die Krümmung constant, und hiermit wird die Gleichung (b) erfüllt. Da ferner eine cylindrische Spirale von dem Endpunkte eines auf der Axe normal stehenden Radius beschrieben wird, wenn derselbe um die Axe gedreht und zugleich längs der Axe fortgerückt wird, so dass seine Fortrückung der gleichzeitigen Drehung immer proportional ist, so geschieht auch der durch die Gleichung (e) ausgedrückten Bedingung Genüge.

Ist eine Spirale ihrer Form und Grösse nach gegeben und sollen die zu ihrer Erhaltung nöthigen Kräfte gefunden werden, oder soll umgekehrt aus den Kräften die Form und Grösse der Spirale bestimmt werden, so hat man nur die Gleichungen (A) der elastischen Linie mit denen der Spirale in Verbindung zu setzen. Sey zu dem Ende a der Halbmesser des Cylinders der Spirale oder die Länge des vorhin gedachten Radius Vector und b der Weg, um welchen derselbe an der Axe während einer ganzen Umdrehung fortrückt. Wird nun diese Axe zur Axe der x genommen, und geschieht bei einem Fortrücken nach der positiven Seite dieser Axe die gleichzeitige Drehung in dem Sinne, nach welchem die Axe der x mit der der y einen Winkel $= 90°$, nicht $= 270°$, macht, so sind die Gleichungen der Spirale:

$$y = a\cos\frac{2\pi x}{b},\ z = a\sin\frac{2\pi x}{b}.$$

Hieraus fliesst durch Differentiation

$$dy = -\frac{2\pi z}{b}\,dx,\ dz = \frac{2\pi y}{b}\,dx,$$

folglich $ds = \frac{l}{b}\,dx$, wo $l = \sqrt{(b^2 + 4\pi^2 a^2)}$

= dem, während einer ganzen Umdrehung des Radius, erzeugten Theile der Spirale.

Durch nochmalige Differentiation, wobei wir dx, wie bei den Gleichungen ($\mathcal{A}$), constant setzen, erhalten wir:

$$d^2y = -\frac{4\pi^2 y}{b^2}\,dx^2,\ d^2z = -\frac{4\pi^2 z}{b^2}\,dx^2.$$

Substituiren wir nun diese Werthe von y und z und ihren Differentialen in den 3 Gleichungen ($\mathcal{A}$), so giebt die erste derselben:

$$m = -\frac{8\pi^3 \varepsilon a^2}{l^3};$$

jede der beiden andern aber giebt:

$$\Delta = \frac{4\pi^2 \varepsilon b}{l^3};$$

und hiermit sind die Relationen zwischen den Kräften und den Parametern der Curve gefunden.

Der hierbei sich negativ ergebende Werth von m zeigt an, dass der Sinn dieses Moments dem Sinne, nach welchem der Winkel der Axe der z mit der der y, = 90° ist, also auch dem Sinne, nach welchem die Drehung des Radius bei einem positiven Fortrücken an der Axe der x geschieht, entgegengesetzt seyn muss. Denken wir uns daher diese Axe etwa vertical, und windet sich die Spirale nach oben zu von rechts nach links um die Axe, und wird ihr unterstes Element als

das erste betrachtet, als dasjenige also, mit welchem die einfache Kraft A und die Kräfte des Paares in Verbindung gesetzt sind, so muss die mit der Axe zusammenfallende Kraft A nach oben, und der Sinn des horizontalen Paares von der Linken nach der Rechten gerichtet seyn.

Aus den für A und m erhaltenen Werthen fliesst die Proportion:

$$-m : A = 2\pi a^2 : b.$$

Sie giebt zu erkennen, dass, wenn man die in der Axe wirkende Kraft A geometrisch durch den vom Radius a während einer Umdrehung längs der Axe zurückgelegten Weg b ausdrückt, das Moment m des normal auf der Axe wirkenden Paares durch das Doppelte der auf der Axe normalen Basis des Cylinders vorgestellt wird.

Macht man die Breite des Paares $= a$ und setzt $m : a = B$, so dass $+B$ und $-B$ die Kräfte des Paares sind, so wird

$$-B : A = 2\pi a : b = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} : dx.$$

Man kann alsdann dem Paare eine solche Lage geben, dass seine Kräfte auf einem Radius in den zwei Endpunkten desselben perpendicular stehen, dass also die eine Kraft $+B$ irgend einem Elemente der Curve und die andere $-B$ der Axe, also auch der Kraft A, begegnet. Zufolge der letztern Proportion werden sich dann $-B$ und A zu einer mit dem Elemente parallelen Kraft zusammensetzen lassen, also zu einer Kraft, deren Moment in Bezug auf das Element null ist. Da nun auch die dem Elemente begegnende Kraft $+B$ rücksichtlich desselben ein Moment $=0$ hat, so erhellet auf diese Weise ganz einfach, dass, wie wir bereits aus §. 325. *b.* schliessen können,

das Moment der Kräfte A, B, $-B$ in Bezug auf jedes Element der Curve $= 0$ ist.

Um endlich noch der Spannung der Spirale zu gedenken, so ist sie, weil $\int X ds = A$, $\int Y ds = 0$ und $\int Z ds = 0$ sind;

$$T = -A\frac{dx}{ds} = -A\frac{b}{l},$$

also von einem Punkte der Curve zum andern constant und wegen des negativen Zeichens keine eigentliche Spannung, sondern eine Pressung.

---

§. 328.

Ehe ich die Lehre vom Gleichgewichte an einem elastisch biegsamen Faden verlasse, will ich noch zeigen, wie die Sätze, welche in der Dynamik das Princip der lebendigen Kräfte und das Princip der kleinsten Wirkung heissen und in §. 305. auf das Gleichgewicht an einem vollkommen biegsamen Faden übergetragen wurden, mit gehöriger Modification auch auf einen elastisch biegsamen Faden angewendet werden können, wobei ich mich aber, um nicht eine allzulange Rechnung herbeizuführen, auf den Fall beschränken werde, wenn der Faden und die auf ihn wirkenden Kräfte in einer Ebene enthalten sind.

Für diesen Fall ist die Gleichung für's Gleichgewicht:

$$\int dy \int X ds - \int dx \int Y ds = \varepsilon p \quad (§. 319.),$$

wo p das Reciproke des Krümmungshalbmessers r bedeutet; die Gleichung für die Spannung aber ist:

$$dx \int X ds + dy \int Y ds = -T ds \quad (§. 318, e.).$$

Man setze [1] $dx = \xi ds$, $dy = \eta ds$, $dp = \varrho ds$,

wo daher $\xi^2 + \eta^2 = 1$ und $\xi d\xi + \eta d\eta = 0$,

so werden die beiden Gleichungen, nachdem man zuvor die erstere differentiirt hat:

$$\eta\int X ds - \xi\int Y ds = \varepsilon\varrho,$$
$$\xi\int X ds + \eta\int Y ds = -T,$$

Hieraus folgt: [2] $\begin{cases}\int X ds = -T\xi + \varepsilon\varrho\eta, \\ \int Y ds = -T\eta - \varepsilon\varrho\xi;\end{cases}$

und wenn man diese zwei Gleichungen abermals differentiirt, sie dann resp. mit ξ und η multiplicirt und hierauf addirt:

$$X dx + Y dy = -dT + \varepsilon\varrho\,(\xi d\eta - \eta d\xi).$$

Es ist aber, wenn ψ, wie im Vorigen, den Winkel der Tangente der Curve mit der Axe der x bezeichnet:

[3] $\begin{cases} dx = \cos\psi ds,\ dy = \sin\psi ds, \text{ folglich} \\ \xi = \cos\psi,\quad \eta = \sin\psi \text{ und daher}\end{cases}$

$$\xi d\eta - \eta d\xi = d\psi;$$

ferner ist [4] $\frac{d\psi}{ds} = -\frac{1}{r}$ (§. 319.) $= -p$.

Hiermit wird: $X dx + Y dy = -dT - \varepsilon p dp$.

Ist demnach $X dx + Y dy$ *das vollständige Differential einer Function* V *von* x *und* y, V' dieselbe Function der Coordinaten des Punktes (x', y') der Fadencurve, T' die Spannung und p' das Reciproke des Krümmungshalbmessers daselbst, so kommt, wenn man letztere Gleichung vom Punkte (x', y') bis zum Punkte (x, y) der Curve integrirt:

$$\text{I.}\quad V - V' + T - T' + \tfrac{1}{2}\varepsilon(p^2 - p'^2) = 0,$$

und man kann folglich, wenn man die Function V, *für irgend zwei Punkte der Fadencurve die Coordinaten und die Krümmungshalbmesser, und in dem einen Punkte die Spannung kennt, die Spannung in dem anderen ohne Weiteres berechnen.*

Dies ist der erste der hier zu beweisenden Sätze. Um den zweiten zu entwickeln, welcher dem Princip der kleinsten Wirkung entspricht, denke man sich in der Ebene des Fadens von einem beliebigen Punkte M_1 der Ebene bis zu einem andern beliebigen M_2 irgend eine Curve gezogen. Unter der abermaligen Voraussetzung, dass $Xdx + Ydy$ das Differential einer gegebenen Function V von x und y ist, werde für jeden Punkt (x, y) dieser Curve mit Hülfe ihres Krümmungshalbmessers $1 : p$ in (x, y) der Werth von T nach der Gleichung I., in welcher man die auf den Punkt (x', y') des Fadens sich beziehenden V', T', p' als gegebene Constanten ansehe, berechnet, und damit das Integral $\int Tds$ von M_1 bis M_2 gebildet. Man lasse nun die Curve sich um ein unendlich Weniges ändern und untersuche die Aenderung $\delta\int Tds$, welche dadurch das Integral erfährt.

Nach I. ist $\delta T = -\delta V - \varepsilon p\delta p$

$$= -X\delta x - Y\delta y - \varepsilon p\delta p \text{ (vgl. §. 305.)}$$

und daher $\delta\,(Tds) = \delta T\,.\,ds + T\delta ds$

$$= -Xds\delta x - Yds\delta y - \varepsilon pds\delta p$$
$$+ T\xi d\delta x + T\eta d\delta y \text{ (ebendas.)}.$$

Hiervon das Integral von M_1 bis M_2 genommen, giebt, weil $\int\delta\,(Tds) = \delta\int Tds$ ist, die gesuchte Aenderung.

Nehmen wir jetzt an, die zu variirende Curve sey der im Gleichgewichte befindliche elastische Faden selbst, also M_1 und M_2 zwei Punkte desselben. Für den Faden haben Xds und Yds die aus [2] durch Differentiation sich ergebenden Werthe, und es wird damit

$$\delta(Tds) = d(T\xi - \varepsilon\varrho\eta)\,.\,\delta x + d(T\eta + \varepsilon\varrho\xi)\,.\,\delta y$$
$$- \varepsilon pds\delta p + T\xi d\delta x + T\eta d\delta y$$

$$= d(T\xi\delta x) + d(T\eta\delta y) + \varepsilon\Omega,$$

wo $\Omega = -d(\varrho\eta)\,\delta x + d(\varrho\xi)\,\delta y - pds\delta p$

$$= -d(\varrho\eta\delta x) + d(\varrho\xi\delta y) + \Psi,$$

wo $\Psi = \varrho\eta\delta dx - \varrho\xi\delta dy - pds\delta p.$

Nach den Formeln [3] ist aber

$$\eta\delta dx - \xi\delta dy = \sin\psi\,\delta(\cos\psi\,ds) - \cos\psi\,\delta(\sin\psi\,ds)$$

$= -ds.\delta\psi$; folglich nach [1] und [4]

$$\Psi = -dp\delta\psi + d\psi\delta p = -d(p\delta\psi) + \delta(pd\psi)$$

$$= -d(p\delta\psi) - \delta(p^2 ds).$$

Hiermit wird, wenn man

$T\xi - \varepsilon\varrho\eta = F$ und $T\eta + \varepsilon\varrho\xi = G$ setzt:

$$\delta(Tds) = d(F\delta x) + d(G\delta y) - \varepsilon d(p\delta\psi) - \varepsilon\delta(p^2 ds);$$

und wenn man vom Punkte M_1 bis zum Punkte M_2 der Fadencurve integrirt und den Werth von

$$F\delta x + G\delta y - \varepsilon p\delta\psi$$

in M_1, $= A_1$ und in M_2, $= A_2$ setzt:

$$\delta\int(Tds + \varepsilon p^2 ds) = A_2 - A_1.$$

Werde nun angenommen, dass bei der Variation des Stücks $M_1\,M_2$ der Fadencurve die Punkte M_1 und M_2 ihre Oerter unverändert behalten, und dass daher δx und δy für jeden der beiden Punkte null sind. Werde ferner gesetzt, dass die variirte Curve mit der ursprünglichen in M_1 und M_2 einerlei Tangenten habe, so ist auch $\delta\psi$, als die Variation des Winkels der Tangente mit der Axe der x, an beiden Orten null. Hiermit werden die Grössen A_1 und A_2, welche von den Werthen der Variationen δx, δy und $\delta\psi$ in M_1 und M_2 abhängen, gleichfalls null, und die zuletzt erhaltene Gleichung reducirt sich auf

II. $\delta\int(Tds + \varepsilon p^2 ds) = 0$, d. h.

Sind Kräfte (X, Y) *an einem elastisch biegsamen Faden im Gleichgewichte, und ist* $Xdx + Ydy$ *das vollständige Differential einer Function* V *von*

x und y, so ist es unter allen Curven, welche von einem beliebigen Punkte M_1 des Fadens bis zu einem beliebigen andern M_2 desselben gezogen werden und in M_1 und M_2 den Faden zugleich berühren, die zwischen M_1 und M_2 enthaltene Fadencurve selbst, für welche das von M_1 bis M_2 ausgedehnte Integral

$$\int\left(T ds + \varepsilon\frac{ds}{r^2}\right)$$

seinen grössten oder kleinsten Werth hat. Dabei ist T mit Hülfe der Gleichung

$$V - V' + T - T' + \tfrac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2}\right) = 0$$

zu berechnen, wo V', T' und r' die irgend einem Punkte der Fadencurve zugehörigen Werthe der Function V, der Spannung und des Krümmungshalbmessers bedeuten.

§. 329.

Zusätze. *a.* Sind X und Y null, wirken also auf den Faden keine Kräfte, sondern sind bloss das erste und letzte Element in gegebenen Lagen befestigt, so ist V constant, also $V = V'$ und

$$T - T' + \tfrac{1}{2}\varepsilon(p^2 - p'^2) = 0, \text{ d. h.}$$

Bei der elastischen Linie (§. 320.) ist der Unterschied der Spannungen in irgend zwei Punkten dem Unterschiede der Quadrate der Reciproken der Krümmungshalbmesser in den beiden Punkten proportional.

b. Substituirt man den aus letzterer Gleichung sich ergebenden Werth von T in dem Integrale, welches ein Maximum oder Minimum ist, so wird dasselbe

$$= \int(T' + \tfrac{1}{2}\varepsilon(p^2 + p'^2))ds = Cl + \tfrac{1}{2}\varepsilon\int p^2 ds,$$

wo $C =$ der constanten Grösse $T' + \frac{1}{2}\varepsilon p'^2$, und $l =$

der Länge der von M_1 bis M_2 gezogenen Curve. Wird folglich noch die Bedingung hinzugefügt, dass l constant, dass also alle von M_1 bis M_2 gezogenen Curven von gleicher Länge seyn sollen, so wird $\int p^2 ds$ selbst ein Minimum, — nicht ein Maximum, weil hier das Integral mit der Länge der Curve offenbar über jede Grenze hinaus wachsen kann. — Wir gelangen hiermit zu dem merkwürdigen schon von Daniel Bernoulli *) entdeckten Satze:

Unter allen Linien von gleicher Länge, welche von einem gegebenen Punkte zu einem andern gegebenen gezogen werden und in diesen Punkten von Geraden, die ihrer Lage nach gegeben sind, berührt werden, ist es die elastische Linie, für welche das von dem einen zum andern Punkte ausgedehnte Integral des durch das Quadrat des Krümmungshalbmessers dividirten Linienelements seinen kleinsten Werth hat.

c. In den bisherigen Untersuchungen über den elastisch biegsamen Faden ist in Uebereinstimmung mit Allen, welche über diesen Gegenstand geschrieben haben, das Moment der Elasticität u an jeder Stelle des Fadens der Krümmung daselbst proportional gesetzt worden, indem dieses nicht allein die einfachste, sondern auch eine mit der Erfahrung gut harmonirende Hypothese ist (§. 319.). Ohne die Erfahrung näher zu

*) Siehe den Eingang zu der bereits in §. 323. angeführten Euler'schen Abhandlung de curvis elasticis. Euler berichtet daselbst, wie Bernoulli ihm mitgetheilt habe, dass er die gesammte in einem elastischen Bleche (lamina) enthaltene Kraft in dem einfachen Ausdrucke $\int(ds : r^2)$ zusammenfassen könne, und dass dieser Ausdruck, welchen er die vis potentialis des Bleches nennt, für die elastische Linie ein Minimum seyn müsse.

befragen, kann man bloss behaupten, dass das Moment u eine Function der Krümmung ist, und zwar eine solche, die mit der Krümmung zugleich wächst und abnimmt und durch Null in das Entgegengesetzte übergeht. Denn unter der Annahme, dass alle Elemente des Fadens von gleicher Länge sind, kann das Moment u des von den Richtungen zweier nächstfolgenden Elemente gebildeten Winkels $d\psi$ von diesem Winkel allein abhängig seyn; und da u eine endliche Grösse, ds aber constant gesetzt worden ist, so muss u eine Function von $d\psi : du$, d. i. von der Krümmung, seyn. Dass aber u mit der Krümmung zugleich ab- und zunehmen muss u. s. w., folgt aus der Natur der Sache selbst.

Ich mache diese Bemerkung hier um deswillen, weil, wie ich noch hinzufügen will, die im vor. §. angestellte Rechnung auch unter der Voraussetzung, dass das Moment u überhaupt eine Function der Krümmung, also von r oder von $p, = 1 : r$, ist, geführt werden kann.

In der That stelle P irgend eine gegebene Function von p vor, und sey dem gemäss die allgemeinere Gleichung für das Gleichgewicht am elastischen Faden:

$$\int dy \int X ds - \int dx \int Y ds = P.$$

Alsdann werden, wenn man $dP = \Pi dp$ setzt, die Gleichungen [2]:

$$\int X ds = - T\xi + \Pi \varrho \eta,$$
$$\int Y ds = - T\eta - \Pi \varrho \xi.$$

Verbindet man diese Gleichungen auf die oben angezeigte Weise und setzt $\int \Pi p dp = Q$, und den Werth, welchen Q für $x = x'$ und $y = y'$ erlangt, $= Q'$, so erhält man statt der Gleichung I.:

$$V - V' + T - T' + Q - Q' = 0,$$

und man kann daher auch jetzt noch die Spannung T schon durch die Function V und durch den Krümmungshalbmesser, von welchem Q eine gegebene Function ist, bestimmen.

Eine weitere analoge Durchführung der Rechnung giebt mit der Bemerkung, dass $\delta Q = \Pi p \delta p$ und $\delta P = \Pi \delta p$ ist:

$$\Psi = -dP\delta\psi + \delta P d\psi = -d(P\delta\psi) + \delta(Pd\psi)$$
$$= -d(P\delta\psi) - \delta(Ppds),$$

und man gelangt damit zu dem Integrale

$$\int(Tds + Ppds),$$

welches unter den nämlichen Voraussetzungen, welche im vor. §. gemacht wurden, ein Maximum oder Minimum seyn muss.

Gleichgewicht an einem elastisch drehbaren Faden.

§. 330.

Eine krumme Linie im Raume können wir ihrer Grösse und Form nach als gegeben ansehen, wenn die Längen ihrer Elemente, die Winkel je zweier nächstfolgenden Elemente und die Winkel, welche die Ebenen von je zwei nächstfolgenden der erstern Winkel mit einander machen, gegeben sind. Von diesen drei, zur Bestimmung einer Linie von doppelter Krümmung dienenden Arten von Grössen setzten wir in diesem Kapitel zuerst alle drei veränderlich und liessen durch die Veränderung der Längen der Elemente elastische Kräfte entstehen (§. 313—315.). Wir setzten zweitens die Längen der Elemente constant, und nur die beiden Arten von Winkeln veränderlich, und liessen durch die Aenderung der Winkel der ersten Art elastische Kräfte erzeugt werden (§. 316—§. 329.).

Auf diesem Wege fortgehend, wollen wir nun drittens und letztens die Längen der Elemente sowohl, als die Winkel der ersten Art, constant und nur die der zweiten Art als veränderlich annehmen und durch ihre Veränderung elastische Kräfte hervorgehen lassen. So wie wir aber bei der zuletzt geführten Untersuchung der Einfachheit willen die Winkel der ersten Art beim anfänglichen Zustande der Linie sämmtlich null setzten und damit die Linie eine Gerade seyn liessen, so wollen wir auch jetzt, so lange auf die Linie noch keine Kräfte wirken, die Winkel der zweiten Art null annehmen und somit eine Curve von einfacher Krümmung voraussetzen.

Sind demnach L, M, N, O irgend vier zunächst auf einander folgende Punkte der Curve, also LM, MN, NO drei nächstfolgende Elemente derselben und LMN, MNO zwei nächstfolgende Winkel der ersten Art, so sollen die ursprünglich zusammenfallenden Ebenen derselben, wenn sie, durch äussere Kräfte genöthigt, an ihrem gemeinschaftlichen Elemente MN einen Winkel (der zweiten Art) mit einander machen, durch elastische Kräfte zur Wiedervereinigung getrieben werden. Entfernt man die äussern Kräfte und soll nichtsdestoweniger der Ebenenwinkel unverändert erhalten werden, so kann dieses dadurch geschehen, dass man irgend zwei Punkte, etwa L und O, der einen und andern Ebene, von denen keiner in dem gemeinschaftlichen Elemente MN liegt, durch eine steife gerade Linie LO von unveränderlicher Länge mit einander verbindet; denn hierdurch werden die beiden Ebenen in eine unveränderliche Lage gegen einander gebracht. Den elastischen Kräften halten daher die Pressungen der Linie LO das Gleichgewicht, und man kann

sich folglich die elastischen Kräfte als zwei einander gleiche, nach den Richtungen *LO* und *OL* auf die Ebenen *LMN* und *MNO* wirkende, Kräfte vorstellen, und eben so als zwei nach *L'O'* und *O'L'* gerichtete Kräfte, wenn *L'* und *O'* irgend zwei andere Punkte in den Ebenen *LMN* und *MNO* sind. Heissen nun *p* und —*p* die beiden erstern und *p'* und —*p'* die beiden letztern Kräfte, so müssen nach demselben Schlusse, wie in §. 316., wenn das Element *MN* unbeweglich angenommen wird, die Kräfte *p* und *p'*, welche nach den Richtungen *LO* und *L'O'* auf die um *MN* drehbare Ebene *LMN* wirken, gleichwirkend seyn; es müssen folglich die Momente von *p* und *p'* in Bezug auf *MN*, als Axe, einander gleich seyn. Die gemeinschaftliche Grösse dieser Momente wollen wir das Moment der Elasticität des Ebenenwinkels *LMN*^*MNO* nennen und, wenn die Länge der Axe = 1 ist, mit *v* bezeichnen. Kennt man dieses Moment, so kann man für jede gegebene Richtung der Kraft *p* oder *p'* die Intensität der letztern finden. Denn das Moment einer ihrer Grösse und Richtung nach durch *LO* ausgedrückten Kraft in Bezug auf die Linie *MN*, als Axe, ist gleich dem Sechsfachen der Pyramide *MNLO* (§. 59.) = *LMNO* (§. 63. 1.), und daher nach §. 91. das Moment einer nach *LO* gerichteten Kraft *p* in Bezug auf eine Axe, welche die Richtung *MN* und eine Länge = 1 hat:

$$v = \frac{6.LMNO}{LO.MN}p, \text{ folglich } p = \frac{LO.MN}{6.LMNO}.v.$$

Eben so, wie bei dem Linienwinkel in §. 316., ist demnach auch hier mit dem Momente der Elasticität die Wirkung derselben vollkommen bestimmt.

Was zuletzt noch die Grösse des Moments *v* an-

langt, so ist wohl auch hier die naturgemässeste Hypothese, dasselbe bei einem gleichförmig elastischen Faden, sobald die Elemente desselben einander gleich angenommen werden, dem mehrgedachten Ebenenwinkel proportional zu setzen, also überhaupt, — mag ds constant angenommen werden, oder nicht —

$$v = \vartheta \frac{d\chi}{ds}$$

zu setzen, wenn $d\chi$ den unendlich kleinen Ebenenwinkel und ϑ eine von der Elasticität des Fadens abhängige Constante bezeichnet.

Weil endlich

$$6 . LMNO = 2LMN . \frac{2MNO}{MN} . \sin LMN \wedge MNO$$

$$= 4 . \frac{LMN^2}{ds} d\chi = 4LMN^2 . \frac{v}{\vartheta},$$

so kann nach derselben Hypothese das Moment v auch

$$= \vartheta . 6LMNO : 4LMN^2$$

gesetzt werden. Dabei ist ϑ eine positive Grösse, weil das Moment ϑ mit der Pyramide $LMNO$ einerlei Zeichen hat.

§. 331.

Dieses vorausgeschickt, gehen wir jetzt zur Entwickelung der unser Problem in Rechnung setzenden Differentialgleichungen über. Hierbei wollen wir, wie bei der vorigen Untersuchung, die in §. 281. *b*. aufgestellten Gleichungen für das Gleichgewicht eines vollkommen biegsamen Fadens zum Grunde legen. Diese vollkommene Biegsamkeit wird gegenwärtig durch die zwei Bedingungen beschränkt, dass die im vor. §. sogenannten Winkel der ersten Art unveränderlich und dass die der zweiten Art elastisch seyn sollen, und

wir haben desshalb zu den in jenen Gleichungen bereits vorkommenden Kräften noch zweierlei andere Kräfte hinzuzufügen. Damit aber diese neuen Kräfte, gleich den bereits vorkommenden, den Faden selbst afficiren und somit auf eben die Art, wie jene, in Rechnung genommen werden können, wollen wir die Unveränderlichkeit der Winkel der ersten Art uns dadurch bewerkstelligt denken, dass von je drei nächstfolgenden Punkten des Fadens, wie L, M, N, der erste mit dem dritten durch eine gerade Linie LN von unveränderlicher Länge verbunden ist. Die Elasticität der Winkel der zweiten Art oder der Ebenenwinkel wollen wir, den vorangegangenen Erläuterungen gemäss, als darin bestehend uns vorstellen, dass auf den ersten und vierten von je vier nächstfolgenden Punkten, wie L, M, N, O, zwei einander gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte wirken. Die Kräfte, welche gegenwärtig am Faden sich das Gleichgewicht halten sollen, sind demnach:

1) Die äusseren Kräfte (Xds, Yds, Zds), welche auf die einzelnen Elemente LM, MN, NO, ... wirken, und wohin auch die endlichen Kräfte gehören, die am Anfang und Ende des Fadens thätig sind;

2) die Pressungen, welche von den steifen Geraden LN, MO, ... auf die sie begrenzenden Punkte des Fadens hervorgebracht werden;

3) die elastischen Kräfte, deren Richtungen in LO, ... fallen.

Den allgemeinen Gleichungen in §. 281. zufolge ist nun zunächst analytisch auszudrücken, dass in Bezug auf jede der drei Axen, welche durch irgend einen Punkt (x, y, z) oder M des Fadens parallel mit den

Coordinatenaxen gelegt werden, das Moment aller jener vom Anfangspunkte A bis zum Punkte M auf den Faden wirkenden Kräfte null ist. Auf solche Weise erhalten wir drei Gleichungen, oder vielmehr nur zwei, da aus je zweien derselben, nachdem sie differentiirt worden, die dritte folgt.

Von allen auf den Faden von A bis M wirkenden Pressungen sind aber zwei und zwei einander gleich und direct entgegengesetzt, die zwei ausgenommen, welche die Punkte L und M nach den Richtungen LN und MO treiben, indem die ihnen entgegengesetzten auf die nicht mehr zum Theil AM des Fadens gehörigen Punkte N und O wirken; und weil die nach MO gerichtete Pressung jeder durch M gelegten Axe begegnet, so reducirt sich in Bezug auf eine solche Axe das Moment aller jener Pressungen auf das Moment der nach LN gerichteten Pressung allein. Wir wollen die Momente dieser Pressung in Bezug auf die drei durch M mit den Axen der x, y, z parallel gelegten Axen resp. $= p$, q, r setzen.

Ganz auf dieselbe Weise kommen, wenn K der dem L nächstvorangehende Punkt ist, die Momente aller elastischen Kräfte von A bis M auf die Momente der zwei auf K und L nach KN und LO gerichteten Kräfte zurück. Heissen rücksichtlich jener drei Axen die Momente der erstern dieser zwei Kräfte: $f_{\prime}$, $g_{\prime}$, $h_{\prime}$, der letztern: f, g, h. Alsdann sind, wenn wir noch die Momente der äussern Kräfte von A bis M rücksichtlich derselben drei Axen kurz mit (X), (Y), (Z) bezeichnen, die vorhin gedachten drei Gleichungen:

$$(a)\quad \begin{cases} (X)+p+f_{\prime}+f=0, \\ (Y)+q+g_{\prime}+g=0, \\ (Z)+r+h_{\prime}+h=0, \end{cases}$$

und es ist nur noch übrig, aus diesen Gleichungen die die Werthe von p, q, r bestimmende Pressung zu eliminiren. Die zwei Gleichungen, welche dadurch hervorgehen, findet man am leichtesten, wenn man jene drei addirt, nachdem man sie das einemal mit den Cosinussen $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, ζ der Winkel multiplicirt hat, welche das Element LM mit den Coordinatenaxen macht, und das anderemal mit den Cosinussen ξ, η, ζ der Winkel des Elements MN mit denselben drei Axen. Man erhält auf diese Weise:

$$(b)\quad \begin{cases} (X)\xi_{,} + (Y)\eta_{,} + (Z)\zeta_{,} + f_{,}\xi_{,} + g_{,}\eta_{,} + h_{,}\zeta_{,} = 0, \\ (X)\xi + (Y)\eta + (Z)\zeta + f\xi + g\eta + h\zeta = 0. \end{cases}$$

Denn die Aggregate $p\xi_{,} + q\eta_{,} + r\zeta_{,}$ und $f\xi_{,} + g\eta_{,} + h\zeta_{,}$ sind nach §. 90. die auf LM, als Axe, bezogenen Momente der nach LN gerichteten Pressung und der elastischen nach LO gerichteten Kraft, und jedes dieser beiden Momente ist null, weil die Axe LM den Richtungen der Pressung und der elastischen Kraft, in L, begegnet; und eben so erhellet, dass auch $p\xi + q\eta + r\zeta$ und $f_{,}\xi + g_{,}\eta + h_{,}\zeta$, als die Momente der Pressung nach LN und der elastischen nach KN gerichteten Kraft, in Bezug auf MN, als Axe, null sind.

Von den zwei Gleichungen (b) selbst drückt die erste aus, dass das Moment aller auf den Faden von A bis L (oder M) wirkenden Kräfte rücksichtlich des Elements LM, als Axe, null ist, und die zweite, das das Moment aller Kräfte von A bis M (oder N) rücksichtlich der Axe MN null ist. Beide Gleichungen drücken daher eines und dasselbe, nur in Bezug auf zwei verschiedene Punkte der Curve, aus, und da diese zwei Punkte einander unendlich nahe liegen, so muss sich die eine dieser Gleichungen durch Differentiation

der andern ergeben. Durch die Elimination der Pressung aus (a) haben wir daher, genau betrachtet, nur Eine Gleichung erhalten; auch war dieses leicht vorauszusehen, da von den drei Gleichungen (a), nachdem sie differentiirt worden, eine jede eine Folge der beiden andern ist.

Es bleibt uns jetzt noch übrig, in einer der beiden Gleichungen (b), wozu wir die zweite wählen, für die darin vorkommenden Momente ihre uns schon bekannten Werthe zu substituiren. Es ist nämlich

$(X) = \int dz \int Y ds - \int dy \int Z ds$, $(Y) =$ etc. (§. 281. b.)

Ferner ist $f\xi + g\eta + h\zeta =$ dem Momente v der elastischen nach LO gerichteten Kraft in Bezug auf eine nach MN gerichtete Axe,

$$= \vartheta \,.\, 6LMNO : 4LMN^2 \text{ (vor. §.)}.$$

Aus der analytischen Geometrie weiss man aber, dass

$$6LMNO = (dyd^2z - dzd^2y)\, d^3x + (dzd^2x - dxd^2z)d^3y$$
$$+ (dxd^2y - dyd^2x)d^3z \text{ *)}$$

und $4LMN^2 = 4(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2)^2$ (§. 324.)

$$= (dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2.$$

Endlich ist $\xi = dx : ds$, etc. und es wird daher, wenn man noch der Einfacheit willen dx constant annimmt, die gesuchte Gleichung fürs Gleichgewicht:

$$dx \int (dz \int Y ds - dy \int Z ds) + dy \int (dx \int Z ds - dz \int X ds)$$
$$+ dz \int (dy \int X ds - dx \int Y ds)$$
$$= \vartheta ds \frac{dx(d^2zd^3y - d^2yd^3z)}{(dzd^2y - dyd^2z)^2 + dx^2(d^2y^2 + d^2z^2)}.$$

Mit dieser Gleichung ist aber noch die Bedingung

---

*) Auch kann dieser Ausdruck leicht aus dem in §. 64. durch die Coordinaten ihrer Ecken ausgedrückten Werthe einer Pyramide hergeleitet werden.

zu verbinden, dass die Curve von doppelter Krümmung, zu welcher die ebene Curve gedreht worden, in jedem ihrer Punkte denselben Krümmungshalbmesser r hat, als die ebene Curve in dem entsprechenden Punkte; d. h. man hat zu der letztern Gleichung noch die zwischen r und s bei der ebenen Curve statt findende Gleichung, als eine auch bei der doppelt gekrümmten geltende, hinzuzufügen. Zu dem Ende bestimme man, wenn $y = f(x)$ die Gleichung der ebenen Curve ist, aus dieser Gleichung das Verhältniss $ds : dx$ und r, als Functionen von x. Hiermit findet sich auch das Verhältniss $\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dx} : \frac{ds}{dx}$, als Function von x. Man eliminire hierauf x aus den Werthen von r und $dr : ds$, so erhält man die gesuchte Gleichung zwischen r und $dr : ds$, in welcher nur noch für ds, r und dr ihre allgemeinen Werthe, durch die ersten, zweiten und dritten Differentiale von x, y, z ausgedrückt, zu substituiren sind.

Ist z. B. die gegebene Curve ein Kreis, dessen Halbmesser $= a$, so hat man die Bedingungsgleichung

$$a = \frac{ds^3}{\sqrt{[(dxd^2y - dyd^2x)^2 + \ldots]}}.$$

Durch diese zweite Gleichung, in Verbindung mit der vorhin entwickelten Momentengleichung, ist aber, sobald noch X, Y, Z gegebene Functionen von x, y, z sind, die Beschaffenheit der Curve bestimmt.

§. 332.

Zusätze. *a.* Die Herleitung der zwei endlichen Gleichungen zwischen x, y, z aus den zwei Differentialgleichungen des vor. §. erfordert 12 Integrationen

und führt damit 12 willkührliche Constanten herbei. Denn zuerst hat man die 3 Integrale $\int Xds$, $\int Yds$, $\int Zds$ mit 3 willkührlichen Constanten. Hierzu kommen durch Integration der 3 Ausdrücke: $dx\int Yds - dy\int Zds$, etc. 3 neue Constanten; und da von den Integralen dieser Ausdrücke, nachdem sie resp. mit dx, dy, dz multiplicirt worden, die Summe einem Ausdrucke gleich zu setzen ist, welcher Differentiale der 1sten bis 3ten Ordnung enthält, so kommen bei vollständiger Integration dieser ersten Differentialgleichung noch 3 neue Constanten hinzu. Diese 9 Constanten werden aber durch Integration der zweiten Gleichung, welche von der 3ten Ordnung im Allgemeinen ist, (nur für den Kreis von der 2ten) noch um 3 vermehrt, so dass die Anzahl sämmtlicher Constanten auf 12 steigt.

Sind demnach eine ebene Curve, zwei Punkte A' und B' in derselben und die Oerter A und B gegeben, welche diese Punkte im Raume einnehmen, nachdem die Curve unter dem Einflusse äusserer Kräfte und ihrer eigenen mit der zweiten Krümmung verbundenen Elasticität eine zweite Krümmung erhalten hat, sind ferner in diesen zwei Oertern noch die Tangenten und die Krümmungsebenen der doppelt gekrümmten Curve gegeben, so ist damit letztere Curve selbst vollkommen bestimmt. — Denn eben so gross, als die Zahl (zwölf) der willkührlichen Constanten, ist auch die Zahl der Gleichungen, welche zwischen den Constanten in den zwei Gleichungen der Curve erfüllt seyn müssen, wenn diese die eben aufgestellten Bedingungen erfüllen soll.

In der That giebt die Bedingung, dass die Curve durch den Punkt A gehen soll, 2 Gleichungen, die bestimmte Richtung ihrer Tangente in A führt zu einer

3ten und 4ten Gleichung (§. 325. *a.*), die bestimmte Lage der diese Tangente enthaltenden Krümmungsebene zu einer 5ten Gleichung, und die Bedingung, dass der Punkt *A* der doppelt gekrümmten Curve ursprünglich der Punkt *A'* der ebenen Curve gewesen, dass also erstere Curve in *A* und letztere in *A'* einander gleiche Krümmungshalbmesser haben, leitet zu einer 6ten Gleichung. Auf gleiche Art ergeben sich auch für den Punkt *B* und für die Tangente, die Krümmungsebene und den Krümmungshalbmesser daselbst 6 Gleichungen. Man hat daher in Allem 12 Gleichungen zwischen den 12 Constanten und kann damit letztere vollkommen bestimmen.

Statt der einen der zwei Gleichungen für die Krümmungshalbmesser in *A* und *B* kann auch die Gleichung gesetzt werden, welche ausdrückt, dass die Länge der doppelt gekrümmten Curve von *A* bis *B* eben so gross, als die der ursprünglichen, einfach gekrümmten von *A'* bis *B'* ist.

In dem besondern Falle, wenn die ursprüngliche Curve ein Kreis ist, hat man von diesen zwei Gleichungen für den einen Krümmungshalbmesser und die Länge von *A* bis *B* nur die letztere beizubehalten, da der alsdann constante Krümmungshalbmesser in der zweiten Differentialgleichung selbst mit vorkömmt. Die Anzahl der Bedingungsgleichungen reducirt sich daher in diesem Falle auf 11. Von der andern Seite ist dann, wie gehörig, auch die Zahl der durch Integration entstehenden Constanten um Eins geringer, als im allgemeinen Falle, da beim Kreise die zweite Differentialgleichung sich nur bis zur zweiten Ordnung erhebt.

b. Wird die Curve in einem Punkte *M* unterbrochen, und soll nichtsdestoweniger das Gleichgewicht

fortdauern, so genügt es hier nicht, wie in §. 318. *c.* und §. 325. *b.*, bloss das letzte Element *LM* fest zu machen, sondern es müssen, um die zwei durch die Unterbrechung in *M* verloren gehenden, nach *KN* und *LO* gerichteten, elastischen Kräfte zu ersetzen, die zwei letzten Elemente *KL* und *LM*, oder, was dasselbe ist, die letzte Tangente und die letzte Krümmungsebene, unbeweglich gemacht werden.

§. 333.

Ziehen wir zum Schlusse noch den einfachsten Fall in Betracht, wenn *X*, *Y*, *Z* null sind, und daher nur durch Kräfte, welche am Anfang und Ende des Fadens angebracht sind, die zweite Krümmung desselben erzeugt wird. Die Kräfte am Anfange, d. h. die endlichen Kräfte, welche auf Punkte wirken, die mit den beiden ersten Elementen in unveränderlicher Verbindung stehen, seyen, wie in §. 326., auf eine einfache Kraft *A* und ein Paar reducirt, dessen Moment $= m$, und dessen Ebene auf *A* normal stehe; auch werde, wie dort, die Richtung von *A* zur Axe der *x* genommen. Die Momente dieser Kräfte in Bezug auf drei Axen, die man durch den Punkt (x, y, z) parallel mit den Axen der x, y, z gelegt hat, sind alsdann:

$$(X) = m, \ (Y) = -Az, \ (Z) = Ay,$$

und die erste Differentialgleichung der Curve wird damit:

$$mdx + A(ydz - zdy) = -vds = -\vartheta d\chi.$$

Wir ersehen hieraus unter andern, *dass, wenn auf den Anfang des Fadens bloss ein Kräftepaar wirkt, die zweite Krümmung*, $= d\chi : ds$, *in jedem Punkte proportional* mit $dx : ds$, d. i. mit dem Cosinus des

Winkels ist, den die Tangente der Curve mit der Axe der x macht, also *mit dem Sinus des Winkels, den die Tangente mit der Ebene des Paares macht*, dass folglich an den Stellen der Curve, wo ihre Tangente mit der Ebene des Paares parallel läuft, die zweite Krümmung verschwindet, und an den Stellen am grössten ist, wo die Tangente auf der Ebene des Paares normal steht.

Zusatz. Ist die Gestalt des Fadens, auf welchen nur am Anfang und Ende Kräfte wirken, ursprünglich kreisförmig, so kann seine nachherige Gestalt auch die einer cylindrischen Spirale seyn, deren Axe, wenn die Kräfte am Anfange, wie vorhin, auf eine einfache Kraft A und ein auf der Richtung von A normales Paar reducirt worden, mit der Richtung von A zusammenfällt. Denn erstens hat diese Spirale *eben so*, wie ein Kreis, einen constanten Krümmungshalbmesser, der hier dem des ursprünglichen Kreises gleich seyn muss; und zweitens wird auch der Momentengleichung durch die Gleichungen einer cylindrischen Spirale, deren Axe die Axe der x ist, Genüge geleistet. Diese Gleichungen sind nämlich (§. 327.), wenn a den Halbmesser des Cylinders der Spirale und b die Weite ihrer Gänge bedeutet, und wenn man der Kürze willen $2\pi : b = h$ setzt:

$$y = a\cos hx,\quad z = a\sin hx.$$

Die Differentiation dieser Gleichungen giebt unter der Annahme, dass dx constant ist:

$$dy = -hz\,dx\ ,\quad dz = +hy\,dx,$$
$$d^2y = -h^2y\,dx^2,\quad d^2z = -h^2z\,dx^2,$$
$$d^3y = +h^3z\,dx^3,\quad d^3z = -h^3y\,dx^3;$$

folglich $ds^2 = (1 + h^2a^2)\,dx^2$, und wenn man

$ydx - xdy = t$, $dyd^2x - dxd^2y = t'$,
$d^2yd^3x - d^2xd^3y = t''$ und $d^2y^2 + d^2x^2 = u$ setzt:
$t = ha^2dx$, $t' = h^3a^2dx^3$, $t'' = h^5a^2dx^5$, $u = h^4a^2dx^4$.

Die Momentengleichung aber, welche sich mit den jetzt angenommenen Zeichen also schreiben lässt:

$$mdx + At = -\vartheta ds \frac{t''dx}{t'^2 + udx^2},$$

wird dadurch $m + Aha^2 = -\frac{\vartheta h}{\sqrt{1+h^2a^2}} = -\frac{2\pi\vartheta}{l}$,

wo l die Länge eines Ganges der Spirale ausdrückt (§. 327.). Diese Gleichung enthält nun bloss Constanten und giebt eben damit zu erkennen, dass unter den vorausgesetzten Umständen der Faden die Spiralform annehmen kann. Hiernach sind wir berechtigt zu schliessen:

Wird, wie dies immer möglich ist, ein elastisch drehbarer und ursprünglich kreisförmiger Faden in die Gestalt einer cylindrischen Spirale gebracht, und werden die zwei ersten, so wie die zwei letzten Elemente des Fadens in der dadurch erhaltenen Lage unbeweglich gemacht, so wird der dazwischen begriffene Faden von selbst in der Spiralform verharren.

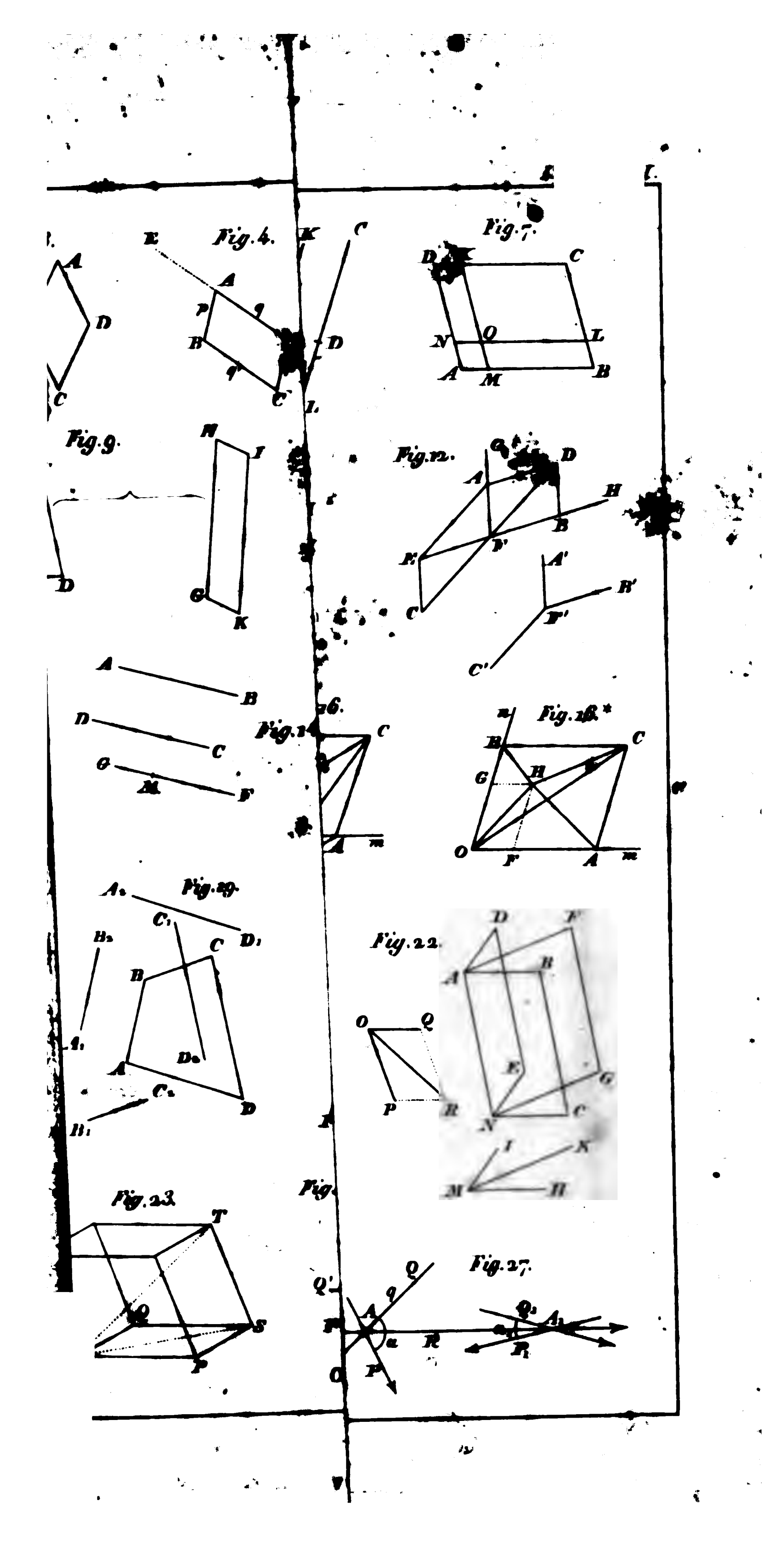
Noch kann man bemerken, dass der Krümmungshalbmesser der Spirale, also auch der Halbmesser des ursprünglichen Kreises,

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{(t'^2 + udx^2)}} = \frac{1+h^2a^2}{h^2a} = \frac{l^2}{4\pi^2a} \text{ ist.}$$

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite 31 Zeile 1 v. o. lies: die ihn treffende.
— 32 — 6 v. u. vor *nach* setze ein Komma.
— 45 — 3 v. o. lies: und hiernach
— 59 — 8 v. u. lies: *AF*, *A'F'*, *A''F'*, ...
— 101 — 12 v. u. lies: unbekannten Richtungen
— 139 — 4 v. u. An das Ende der Zeile setze ein Komma.
— 159 — 8 v. u. vertilge: auch
— 185 — 9 v. u. lies: wo
— 212 — 5 v. o. vertilge: + (1 : *h*).
— 221 — 9 u. 10 v. o. statt: geben, lies: getrieben.
— 230 — 5 v. u. statt: $\int Y dt$ lies: $\int X dt$.
— 249 — 1 v. o. lies: eine positive constante Grösse ist.
— 284 — 7 u. 6 v. u. lies: auf den Faden keine äussern *Kräfte*

Druck von J. B. Hirschfeld.


Fig. 4.
Fig. 7.
Fig. 9.
Fig. 12.
Fig. 16.
Fig. 18.*
Fig. 19.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 27.



